উচ্চতর মাধ্যমিক গণিত

অধ্যাপক স্বরাজ মুখোপাধ্যায়

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চমধ্যমিক শিক্ষাসংসদ কর্তৃক ১৯৭৬ সালের নব প্রবর্তিত পাঠ্যক্রম অনুসারে একাদশ ও দ্বাদশ শ্রেণীর জন্য লিখিত।

উচ্চতর মাধ্যমিক গণিত

প্রথম পত্র

[বীজগণিত—ত্রিকোণমিতি—স্থানাঙ্ক জ্যামিতি]

অধ্যাপক স্বরাজ মুখোপাধ্যায় এম. এস্.-সি, বি. এড.

অধ্যাপক, নবগ্রাম হীরালাল পাল কলেজ, নবগ্রাম, কোন্নগর।
পরীক্ষক, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়।
শিক্ষক, নবগ্রাম বিদ্যাপীঠ। ভূতপূর্ব শিক্ষক, নবগ্রাম হীরালাল পাল বালিকা বিদ্যালয়, নবগ্রাম, হুগলী।

ইণ্ডিয়ান প্রোগ্রেসিভ পাবলিশিং কোং প্রাইভেট লিঃ
১৫, কলেজ স্কোয়ার, কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক ঃ
সি. ভট্টাচার্য বি. এ., বি. টি.
১৫, কলেজ স্কোয়ার
কলিকাতা-৭০০০৭৩

This book has been printed on paper allotted by Government of India at a concessional rate.

মূল্য ঃ আঠারো টাকা নব্বই পয়সা

মুদ্রাকর ঃ
বংশীধর সিংহ
বাণী মুদ্রণ
১২, নরেন সেন স্কোয়ার
কলিকাতা-৭০০০০৯

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ উচ্চতর মাধ্যমিক শিক্ষা সংসদের পরিচালনায় ১৯৭৬ সাল হইতে একাদশ ও দ্বাদশ মানের শিক্ষা পদ্ধতি চালু হইয়াছে। এই নতুন পাঠক্রমে গণিতের পাঠ্যসূচীর বিরাট পরিবর্তন সাধন করা হইয়াছে। এই পাঠ্যসূচীতে গণিতের বিভিন্ন বিষয় সংযোজন করা হইয়াছে। এই অংশে বীজগণিত, ত্রিকোণমিতি ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতি রহিয়াছে এবং বিভিন্ন অধ্যায়ে বিষয়গুলি বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হইয়াছে। ছাত্রদের সুবিধার জন্য সহজ হইতে কঠিন বিভিন্ন উদাহরণ সংযোজিত হইয়াছে। আশাকরি নতুন এই গাণিতিক পরিবেশে ছাত্ররা এই বইটি হইতে তাহাদের প্রয়োজনীয় বিষয়গুলি সহজেই অনুধাবন করিতে পারিবে। বিশেষ সতর্কতার সহিত সবদিক লক্ষ্য করা হইলেও কিছু মুদ্রণ ত্রুটি থাকিয়া যাইতে পারে। শিক্ষক ও ছাত্ররা তাহা উল্লেখ করিয়া দিলে আমি তাহাদের কাছে কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ থাকিব। বইটি ছাত্র ও শিক্ষকদের প্রয়োজন মিটাইতে সক্ষম হইলে শ্রম সার্থক বলিয়া মনে করিব। যে কোন প্রকার সমালোচনা, উপদেশ ও পরামর্শ ধন্যবাদের সহিত গৃহীত হইবে।

নবগ্রাম বিনীত

৩০শে এপ্রিল, ১৯৭৭ **স্বরাজ মুখোপাধ্যায়**

সূচীপত্র

বীজগণিত (Algebra)

ত্রিকোণমিতি (Trignometry)

স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)

উচ্চতর মাধ্যমিক গণিত

প্রথম পত্র

প্রথম অধ্যায়

ভেদ (Variation)

ধ্রুবক (Constant) **ও চলরাশি** (Variable) : যদি কোন রাশিমালার অন্তর্গত কোন একটি রাশির মান সর্বদা একই থাকে, অর্থাৎ অন্য রাশিগুলির মান পরিবর্তিত হইলেও ঐ রাশিটির মানের কোন পরিবর্তন না ঘটে, তবে সেই রাশিটিকে **ধ্রুবক** (Constant) বলা হয়। অপর পক্ষে কোন রাশিমালার যে রাশিটির মান পরিবর্তনীয় তাহাকে **চলরাশি** (Variable) বলে। উদাহরণস্বরূপ বৃত্তের পরিধি $2\pi r$; এখানে এই রাশিমালায় r-এর মানের যে কোন পরিবর্তনই হউক না কেন, π-এর মানের কোন পরিবর্তন ঘটিবে না। এ ক্ষেত্রে π ধ্রুবক কিন্তু r চলরাশি।

ভেদ (Variation) : যদি দুইটি চলরাশির মধ্যে এরূপ সম্পর্ক থাকে যে, একটির মান পরিবর্তিত হইলে অপর রাশিটির মানও একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়, তবে একটি রাশি অপরটির সহিত **সরল ভেদে** (Varies directly as the other) আছে বলা হইয়া থাকে। সংক্ষেপে 'সরল ভেদে' না বলিয়া আমরা 'ভেদে' আছে বলিয়া থাকি। উপরের উদাহরণে r-এর মান দ্বিগুণ করিলে বৃত্তের পরিধির মান দ্বিগুণ হইবে, তিনগুণ করিলে পরিধির মান তিনগুণ হইবে ইত্যাদি। সুতরাং আমরা বলিতে পারি বৃত্তের পরিধি উহার ব্যাসার্ধের সহিত সরল ভেদে আছে।

উদাহরণ : মনে করি, 8 জন লোক দৈনিক কাজ করিয়া মোট 40 টাকা উপার্জন করে। যদি লোকের সংখ্যা দ্বিগুণ করিয়া 16 করা হয় তবে টাকার সংখ্যাও দ্বিগুণ হইয়া 80 হইবে। আবার লোকের সংখ্যা অর্ধেক করিয়া 4 করিলে টাকার সংখ্যাও অর্ধেক হইয়া 20 হইবে, সুতরাং লোক এবং টাকা একইভাবে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং লোক ও টাকা পরস্পরের সহিত সরল ভেদে আছে।

ভেদ চিহ্ন : দুইটি রাশি পরস্পরের সহিত ভেদে আছে বুঝাইবার জন্য '$\propto$' এই প্রতীক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। 'A Varies as B' ইহাকে আমরা $A \propto B$ লিখিয়া থাকি।

উপরের উদাহরণে লোক (A) এবং টাকা (B) ধরিলে,

প্রথম ক্ষেত্রে $\frac{A}{B}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\frac{A}{B}=\frac{16}{80}=\frac{1}{5}$

তৃতীয় ক্ষেত্রে $\frac{A}{B}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ অর্থাৎ $\frac{A}{B}=$ ধ্রুবক।

মনে করি, $\frac{A}{B}=k$ $\therefore\ A=kB$।

সুতরাং $A\propto B$ হইলে আমরা লিখিতে পারি $A=kB$ যখন k ধ্রুবক। 'k'কে **ভেদ ধ্রুবক** (Constant of Variation) বলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : $A\propto B$ হইলে $B\propto A$ হইবে। কারণ $A\propto B$,

$\therefore\ A=kB$ বা, $B=\frac{1}{k}A.$ যেহেতু k ধ্রুবক।

সুতরাং $\frac{1}{k}=$ ধ্রুবক। $\therefore\ B\propto A$

অন্যোন্যক (Reciprocal) : কোন রাশির অন্যোন্যক বলিতে ($1\div$ সেই সংখ্যা) বুঝায়। অর্থাৎ 5-এর অন্যোন্যক $1\div 5=\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$-এর অন্যোন্যক $1\div\frac{3}{5}=\frac{5}{3}$, x-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{x}$ ইত্যাদি।

ব্যস্ত ভেদ (Inverse Variation) : একটি রাশি অপর একটি রাশির সহিত ব্যস্ত ভেদে (Varies inversely as the other) আছে বলিতে আমরা বুঝি একটি রাশি অপর রাশিটির অন্যোন্যকের সহিত সরল ভেদে আছে।

যদি A ও B ব্যস্ত ভেদে থাকে তবে $A\propto\frac{1}{B}$.

$\therefore\ A=k.\frac{1}{B}$ (k ভেদ ধ্রুবক) $\therefore\ AB=k$

বিপরীতক্রমে বলা যায় B, A-র সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। A ও B ব্যস্ত ভেদে থাকিলে B-র মান যেই হারে বৃদ্ধি পায়, A-র মান সেই হারে হ্রাস পায়। কিন্তু যে কোন ক্ষেত্রেই $AB=$ ধ্রুবক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি দুইটি চলরাশির গুণফল সর্বদা ধ্রুবক হয়, তবে একটি রাশি অপরটির সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে বুঝিতে হইবে।

উদাহরণ : একটি নির্দিষ্ট কাজ শেষ করিতে নিযুক্ত শ্রমিকের সহিত দিনসংখ্যা ব্যস্তানুপাতে থাকে। একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলের আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের ব্যস্তানু-

পাতিক। পণ্যের চাহিদা সমান থাকিলে, পণ্যের মূল্যমান, সরবরাহের সহিত ব্যস্তানুপাতিক হয়।

যৌগিক ভেদ (Joint Variation) : যদি একটি চলরাশির মান অপর একাধিক নিরপেক্ষ পরিবর্তনশীল চলরাশির মানের উপর নির্ভর করে এবং যদি ঐ চলরাশিটি উহাদের গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকে তবে প্রথম চলরাশিটি, অপর চলরাশিগুলির সহিত **যৌগিক ভেদে** আছে বুঝিতে হইবে। যদি $A \propto BC$ হয়, তবে B ও C-র সহিত A-র যৌগিক ভেদ আছে। এখানে $A = k.BC$.

যদি A, B-র সহিত সরল ভেদে এবং C-র সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে $A \propto \frac{B}{C}$ অর্থাৎ $A = k.\frac{B}{C}$, $k =$ ধ্রুবক। এক্ষেত্রে B এবং C উভয়েই চলরাশি হইবে।

যৌগিক ভেদের উপপাদ্য (Theorem on Joint Variation) : যখন C ধ্রুবক তখন যদি A, B-র সহিত সরল ভেদে থাকে এবং B ধ্রুবক হইলে যদি A, C-র সহিত সরলভেদে থাকে, তবে প্রমাণ কর B এবং C উভয়ে চলরাশি হইলে A, BC-র সহিত সরল ভেদে থাকিবে।

[If A varies as B when C is constant and A varies as C when B is constant, then A varies as BC when both B and C vary.]

প্রমাণ : মনে করি, যখন B-র মান b_1 এবং C-র মান c_1 তখন A-র মান a_1.

মনে করি, A-র মান a_1 হইতে পরিবর্তিত হইয়া a' হইল যখন B-এর মান b_1 হইতে b_2 হইল কিন্তু C-এর মান (c_1)-এর পরিবর্তন হইল না।

$\therefore$ ভেদের নিয়মানুসারে, $\frac{a_1}{a'} = \frac{b_1}{b_2}$ ... (1)

আবার মনে করি, A-র মান a' হইতে a_2 হইল যখন C-এর মান c_1 হইতে c_2তে পরিবর্তিত হইল কিন্তু B-এর মান (b_2) স্থির থাকিল।

$\therefore \frac{a'}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ... (2)

(1) ও (2)-কে গুণ করিলে পাই,

$\frac{a_1}{a'} \times \frac{a'}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \times \frac{c_1}{c_2}$ বা, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2}$

যেহেতু $\{a_1, b_1, c_1\}$ এবং $\{a_2, b_2, c_2\}$, A, B, C-র মানের দুইটি সেট্, সুতরাং যখন BC-র মান b_1c_1 হইতে b_2c_2তে পরিবর্তিত হয়, A-র মান a_1 হইতে a_2তে একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়। সুতরাং $A \propto BC$ যখন B এবং C উভয়ে পরিবর্তিত হয়।

বিকল্প প্রমাণ : যেহেতু $A \propto B$, যখন C ধ্রুবক

$\therefore$ $A = kB$, যখন k ধ্রুবক (A ও B-র সাপেক্ষে)

আবার, যেহেতু $A \propto C$, যখন B ধ্রুবক

$\therefore$ $kB \propto C$ যখন B ধ্রুবক বা, $k \propto C$ যখন B ধ্রুবক

$\therefore$ $k = mC$, যখন m, k এবং C-এর সাপেক্ষে ধ্রুবক ।

যেহেতু k, A এবং B-র সাপেক্ষে ধ্রুবক, সুতরাং m, A, B এবং C-র সাপেক্ষে ধ্রুবক ।

$\therefore$ $A = kB = mCB = mBC$

$\therefore$ $A \propto BC$, যখন B, C উভয়ে পরিবর্তনীয় ।

ভেদের প্রাথমিক নিয়মাবলী (Elementary Properties of Variation): যদি কোন একটি সমস্যা সমাধানে দুই বা ততোধিক ভেদ থাকে, তবে বিভিন্ন ভেদের জন্য বিভিন্ন ভেদ ধ্রুবক ধরা প্রয়োজন ।

(i) যদি $A \propto B$, তবে $B \propto A$.

যেহেতু $A \propto B$, $\therefore$ $A = k.B$ যখন k ধ্রুবক

$\therefore$ $B = \frac{1}{k}.A$ $\therefore$ $B \propto A$. যেহেতু $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক

(ii) যদি $A \propto B$ এবং $B \propto C$, তবে $A \propto C$

যেহেতু $A \propto B$ $\therefore$ $A = kB$, যখন k ধ্রুবক

যেহেতু $B \propto C$ $\therefore$ $B = k_1 C$ যখন k_1 ধ্রুবক

$\therefore$ $A = kk_1 C$ $\therefore$ $A \propto C$, যেহেতু kk_1 ধ্রুবক ।

(iii) যদি $A \propto C$ এবং $B \propto C$ তবে $A \pm B \propto C$ এবং $\sqrt{AB} \propto C$

যেহেতু $A \propto C$ $\therefore$ $A = kC$ যখন k ধ্রুবক ।

যেহেতু $B \propto C$ $\therefore$ $B = k_1 C$ যখন k_1 ধ্রুবক ।

$\therefore$ $A \pm B = (k \pm k_1)C$ $\therefore$ $A \pm B \propto C$

আবার $AB = kk_1 C^2$ $\therefore$ $\sqrt{AB} = \sqrt{kk_1}C$

$\therefore$ $\sqrt{AB} \propto C$ যখন $\sqrt{kk_1}$ ধ্রুবক ।

(iv) যদি $A \propto B$, তবে $A^n \propto B^n$

যেহেতু $A \propto B$, $\therefore$ $A = kB$ $\therefore$ $A^n = k^n B^n$

$\therefore$ $A^n \propto B^n$

(v) যদি $A \propto B$ এবং $C \propto D$ তবে $AC \propto BD$ এবং $\frac{A}{C} \propto \frac{B}{D}$

এখন $A=kB$ এবং $C=k_1D$ যখন k, k_1 ধ্রুবক

$\therefore \quad AC=kk_1BD \qquad \therefore \quad AC\propto BD$ যেহেতু kk_1 ধ্রুবক

আবার $\frac{A}{C}=\frac{k}{k_1}.\frac{B}{D} \qquad \therefore \quad \frac{A}{C}\propto\frac{B}{D}$ যেহেতু $\frac{k}{k_1}$ ধ্রুবক

(vi) যদি $A\propto BC$ তবে $B\propto\frac{A}{C}$ এবং $C\propto\frac{A}{B}$

এখন $A=kBC \qquad \therefore \quad B=\frac{1}{k}\cdot\frac{A}{C}$ এবং $C=\frac{1}{k}\cdot\frac{A}{B}$

$\therefore \quad B\propto\frac{A}{C}$ এবং $C\propto\frac{A}{B}$ যখন $\frac{1}{k}$ ধ্রুবক।

উদা. 1. যদি x, y-এর বর্গের সহিত সরল ভেদে থাকে এবং $x=12$ যখন $y=4$ হয় তবে (i) ভেদ ধ্রুবকের মান কত? (ii) x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক কি? (iii) যখন $y=\frac{2}{3}$ তখন x এর মান কত?

(i) $x\propto y^2 \qquad \therefore \quad x=ky^2$ (যখন k ভেদ ধ্রুবক)

$\therefore \quad y=4$ যখন $x=12, \quad \therefore \quad 12=k.16$

$\therefore \quad k=\frac{12}{16}=\frac{3}{4} \qquad \therefore$ ভেদ ধ্রুবকের মান $\frac{3}{4}$

(ii) x ও y-এর মধ্যে সম্পর্ক $x=\frac{3}{4}y^2$ বা, $4x=3y^2$

(iii) $x=\frac{3}{4}y^2$,

এখানে $y=\frac{2}{3}$ বসাইয়া পাই, $x=\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}$

বা, $x=\frac{1}{3} \qquad \therefore$ x-এর নির্ণেয় মান $\frac{1}{3}$

উদা. 2. যদি $x+y\propto x-y$ প্রমাণ কর

(i) $x^3+y^3\propto x^3-y^3 \qquad$ (ii) $ax+by\propto px+qy$

(i) $x+y\propto x-y \qquad \therefore \quad x+y=k(x-y)$, k ভেদ ধ্রুবক

বা, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{k}{1} \qquad$ বা, $\frac{x+y+x-y}{x+y-x+y}=\frac{k+1}{k-1}$ [comp. এবং divd. প্রক্রিয়া দ্বারা

বা, $\frac{x}{y}=k_1 \qquad$ যখন $k_1=\frac{k+1}{k-1}=$ ধ্রুবক

বা, $\frac{x^3}{y^3}=\frac{k_1^3}{1} \qquad$ বা, $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}=\frac{k_1^3+1}{k_1^3-1}=k_2$ (ধরি)

[comp. এবং divd. প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $x^3+y^3=k_2(x^3-y^3) \qquad \therefore \quad x^3+y^3\propto x^3-y^3$

(ii) $\frac{x}{y}=k_1$ (পূর্বে প্রমাণিত) $\therefore\ x=k_1y$

এখন $\frac{ax+by}{px+qy}=\frac{ak_1y+by}{pk_1y+qy}=\frac{ak_1+b}{pk_1+q}=$ ধ্রুবক

$\therefore\ ax+by \propto px+qy$

উদা. 3. যদি x, y, z এরূপ চলরাশি হয়, যাহাতে $y+z-x$ ধ্রুবক এবং $(z+x-y)(x+y-z)\propto yz$, প্রমাণ কর $x+y+z\propto yz$

$(z+x-y)(x+y-z)\propto yz$

বা, $\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}=kyz$ $\quad k=$ ধ্রুবক

বা, $x^2-(y-z)^2=kyz$ $\quad$ বা, $x^2-\{(y+z)^2-4yz\}=kyz$

বা, $x^2-(y+z)^2=kyz-4yz$

বা, $(x+y+z)(x-y-z)=(k-4)yz$

বা, $(x+y+z)(y+z-x)=(4-k)yz$

$\because\ y+z-x=$ ধ্রুবক $=k_1$ (ধরি)

$\therefore\ (x+y+z).k_1=(4-k)yz$ $\quad \therefore\ x+y+z=\frac{4-k}{k_1}.yz$

$\therefore\ x+y+z\propto yz$ $\quad$ যেহেতু $\frac{4-k}{k_1}$ ধ্রুবক

উদা. 4. x দুইটি সংখ্যার সমষ্টির সমান। ইহাদের একটি y-এর সহিত সরল ভেদে অপরটি y-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে ; যদি $x=5$ যখন $y=1$ এবং $x=7$ যখন $y=3$ হয়, তবে x, y-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক নির্ণয় কর এবং যখন $y=\frac{1}{2}$ তখন x-এর মান কত ?

এখানে যেহেতু x যে দুইটি রাশির সমষ্টি তাহাদের একটি y-এর সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি ব্যস্ত ভেদে আছে,

সুতরাং, প্রথমটি ky এবং দ্বিতীয়টি $\frac{k_1}{y}$ হইবে, যখন k, k_1 ধ্রুবক।

$$\therefore\ x=ky+\frac{k_1}{y}$$

$\therefore\ y=1$ হইলে $x=5$ $\quad \therefore\ 5=k.1+\frac{k_1}{1}=k+k_1\cdots\cdots(1)$

আবার $y=3$ হইলে $x=7$ $\quad \therefore\ 7=k.3+\frac{k_1}{3}$

$\therefore\ 21=9k+k_1\cdots(2)$

(1) ও (2) সমাধান করিয়া পাই, $k=2, \quad k_1=3$

$\therefore$ x, y-এর নির্ণেয় সম্পর্ক $x=2y+\frac{3}{y}$

যখন $y=\frac{1}{2}$, $\quad x=1+6=7$

উদা. 5. যদি x, y-এর বর্গের সহিত সরল ভেদে এবং z-এর ঘনমূলের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে এবং $x=2$ যখন $y=4$, $z=8$ হয়, তবে y-এর মান কত হইবে যখন $x=3$ এবং $z=27$? [C. U. '17]

প্রশ্নানুসারে $x \propto y^2$ এবং $x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$

$\therefore \quad x \propto y^2 . \frac{1}{\sqrt[3]{z}} \qquad \therefore \quad x=k.\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$

এখন $x=2$, যখন $y=4$, $z=8$, $\therefore \quad 2=k.\frac{4^2}{\sqrt[3]{8}} \qquad \therefore \quad k=\frac{1}{4}$.

$$\therefore \quad x=\tfrac{1}{4}.\frac{y^2}{\sqrt[3]{z}}$$

যখন $x=3$, $z=27$, $\quad 3=\frac{1}{4}.\frac{y^2}{\sqrt[3]{27}}=\frac{y^2}{12}$ বা, $y^2=36$ বা, $y=\pm 6$

উদা. 6. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 একর জমি চাষ করিতে পারে তবে 25 জন লোক কত দিনে 30 একর জমি চাষ করিবে, তাহা ভেদ নিয়ম প্রয়োগ করিয়া নির্ণয় কর। [C. U. '34]

মনে করি $m=$লোক সংখ্যা, $d=$দিন সংখ্যা এবং $a=$জমির একরের পরিমাণ নির্দেশ করে। ইহা সহজেই বুঝা যায় m, a-র সহিত সরল ভেদে আছে যখন d ধ্রুবক এবং d-র সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে যখন a ধ্রুবক।

$\therefore \quad m \propto \frac{a}{d}$ যখন a, d উভয়েই চল।

$\therefore \quad m=k.\frac{a}{d}$, যখন $k=$ভেদ ধ্রুবক

যখন $m=5$, $a=10$ এবং $d=9 \qquad \therefore \quad 5=k.\frac{10}{9}$

$\therefore \quad k=\frac{9}{2} \qquad \therefore \quad m=\frac{9}{2}.\frac{a}{d}$.

যখন $m=25$ এবং $a=30$, $\quad 25=\frac{9}{2}\cdot\frac{30}{d} \qquad \therefore \quad d=\frac{9\times 30}{2\times 25}=\frac{27}{5}$ দিন

উদা. 7. গোলকের আয়তন উহার ব্যাসার্ধের ত্রিঘাতের সহিত সরল ভেদে আছে এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল ব্যাসার্ধের বর্গের সমানুপাতিক। প্রমাণ কর ঘনফলের বর্গ বক্রতলের ক্ষেত্রফলের ত্রিঘাতের সহিত সরল ভেদে থাকে। [C. U. 1924]

মনে করি গোলকের আয়তন$=v$, বক্রতলের ক্ষেত্রফল$=s$ এবং ব্যাসার্ধ$=r$.

$\therefore\ v \propto r^3 \qquad \therefore\ v=kr^3 \qquad \therefore\ v^2=k^2r^6$

$s \propto r^2 \qquad \therefore\ s=k_1r^2 \qquad \therefore\ s^3={k_1}^3r^6$

$\therefore\ \dfrac{v^2}{s^3}=\dfrac{k^2r^6}{{k^3}_1r^6}=\dfrac{k^2}{{k_1}^3} \qquad \therefore\ v^2=\dfrac{k^2}{{k_1}^3}s^3 \quad \therefore\ v^2 \propto s^3$

উদা. 8. আলোকের ঔজ্জ্বল্য উৎস হইতে বস্তুর দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্তভেদে থাকে। একখানি বই একটি উৎস হইতে 8 ইঞ্চি দূরে আছে, উহাকে আর কতটা সরাইলে ঔজ্জ্বল্য অর্ধেক হইবে? [H. S. '64]

মনে করি, আলোকের ঔজ্জ্বল্য$=\mathrm{I}$, উৎস হইতে দূরত্ব$=d$

$\therefore\ \mathrm{I} \propto \dfrac{1}{d^2} \qquad \therefore\ \mathrm{I}=\dfrac{k}{d^2},\ k=$ভেদ ধ্রুবক।

মনে করি, যখন $d=8''$, $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1$

$\therefore\ \mathrm{I}_1=\dfrac{k}{8^2} \qquad \therefore\ \mathrm{I}_1=\dfrac{k}{64}\cdots\cdots(1)$

মনে করি, মোট x ইঞ্চি দূরে থাকিলে ঔজ্জ্বল্য অর্ধেক হইবে।

অর্থাৎ যখন $d=x$, $\mathrm{I}=\dfrac{\mathrm{I}_1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{\mathrm{I}_1}{2}=\dfrac{k}{x^2}$ বা, $\mathrm{I}_1=\dfrac{2k}{x^2}\cdots\cdots(2)$ $\therefore$ (1) ও (2) হইতে

$\dfrac{k}{64}=\dfrac{2k}{x^2}$ বা, $x^2=128$, বা, $x=\sqrt{128}$ বা, $x=8\sqrt{2}$ ইঞ্চি

$\therefore$ আর $(8\sqrt{2}-8)$ বা $8(\sqrt{2}-1)$ ইঞ্চি সরাইলে ঔজ্জ্বল্য অর্ধেক হইবে।

উদা. 9. মালগাড়ীবিহীন একটি ইঞ্জিন ঘণ্টায় 36 মাইল বেগে যাইতে পারে। উহার সহিত গাড়ী (বগী) যুক্ত থাকিলে উহার গতিবেগ হ্রাসের পরিমাণ বগী সংখ্যার বর্গমূলের সমানুপাতিক হয়। যখন 9টি বগী যুক্ত হয় তখন উহার বেগ ঘণ্টায় 24 মাইল। ইঞ্জিনটি সর্বাধিক কতটি বগী লইয়া চলিতে পারিবে?

মনে করি গতিবেগ হ্রাস V এবং বগী সংখ্যা N

$\therefore\ V \propto \sqrt{N} \quad \therefore\ V=k\sqrt{N},\ k=$ভেদ ধ্রুবক।

যখন $N=9$, $V=36-24=12$

$\therefore\ 12=k\sqrt{9}=3k$ $\therefore\ k=4$ $\therefore\ V=4\sqrt{N}$.

যখন $V=36$, $36=4\sqrt{N}$ $\therefore\ \sqrt{N}=9$, $N=81$

যখন 81টি বগী যুক্ত হইবে তখন গাড়ীটি থামিয়া যাইবে। সুতরাং উহা সর্বাধিক $(81-1)=80$টি বগী লইয়া চলিতে পারিবে।

উদা. 10. পিরামিডের ঘনফল উহার উচ্চতা ও ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক ভেদে আছে এবং যখন ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গ ফুট ও উচ্চতা 14 ফুট হইবে, তখন ঘনফল 280 ঘনফুট। যখন ঘনফল 390 ঘনফুট ও উচ্চতা 26 ফুট তখন পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

মনে করি পিরামিডের ঘনফল $=V$, উচ্চতা $=h$, ভূমির ক্ষেত্রফল $=a$.

$\therefore\ V\propto ah$ $\therefore\ V=kah$, যখন $k=$ ধ্রুবক

যখন $V=280$, $h=14$, $a=60$

$\therefore\ 280=k.60.14$ $\therefore\ k=\frac{280}{60.14}=\frac{1}{3}$ $\therefore\ V=\frac{1}{3}ah$

যখন $V=390$, $h=26$, $390=\frac{1}{3}a.26$

$\therefore\ a=\frac{390.3}{26}=45$ $\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল $=45$ বর্গফুট।

Exercise 1

1. যদি $x\propto y^3$ এবং $y=4$ হইলে $x=48$ হয়, তবে $y=2$ হইলে x-এর মান কত এবং $x=20\frac{1}{4}$ হইলে y-এর মান কত ?

2. যদি $a\propto b^2$ এবং $a=4$ হইলে $b=4$ হয়, তবে $a=3$ হইলে b-এর এবং $b=9$ হইলে a-এর মান কত হইবে ? a-র দ্বারা b-র মান নির্ণয় কর।

3. নিম্নের শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) যদি $t\propto\sqrt{l}$ তবে $l\propto\cdots\cdots$

(ii) যদি $x\propto\frac{1}{\sqrt{a}}$ তবে $a\propto\cdots\cdots$

4. যদি B ও C-এর সহিত A যৌগিক ভেদে থাকে এবং যদি $B=\frac{3}{5}$, $C=\frac{10}{7}$ হয়, যখন $A=2$ তবে যখন $A=54$, $B=\frac{3}{5}$ তখন C-র মান কত হইবে ?

5. যদি $x^2 \propto yz$, $y^2 \propto zx$ এবং $z^2 \propto xy$, তবে তিনটি ভেদ ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

6. যদি $x+y \propto z$ যখন y ধ্রুবক এবং যদি $z+x \propto y$ যখন z ধ্রুবক, দেখাও যে, $x+y+z \propto yz$ যখন y ও z উভয়েই চল।

7. যদি $x^2+y^2 \propto x^2-y^2$, প্রমাণ কর,

(i) $x \propto y$ (ii) $x+y \propto x-y$

8. a দুইটি রাশির সমষ্টির সমান এবং b-র সহিত একটি রাশির সরল ভেদ অপরটির ব্যস্ত ভেদ আছে। যদি $b=1$ হইলে $a=5$ এবং $b=6$ হইলে $a=12\cdot5$ হয় তবে a, b-এর মধ্য সম্পর্ক এবং $b=3$ হইলে a-র মান নির্ণয় কর।

9. যদি $x=\alpha+\beta+\gamma$, যখন α ধ্রুবক এবং $\beta \propto y$ এবং $\gamma \propto y^2$ হয় এবং যখন $y=1, 2, 3$, $x=6, 17, 34$ (যথাক্রমে) হয়, তবে x, y-এর মধ্যে একটি সম্পর্ক স্থাপন কর।

10. a দুইটি সংখ্যার সমষ্টির সমানুপাতিক। তাহাদের একটি b^2-এর সহিত সরল ভেদে এবং অপরটি c এর সহিত ব্যস্ত ভেদে আছে। যখন $b=2, c=1$ তখন $a=16$ এবং যখন $b=1$ এবং $c=2$, $a=5$; a-র মান কত হইবে যখন $b^2=3$ এবং $c^2=16$ হইবে?

11. যদি $x \propto \frac{1}{y}$ যখন z ধ্রুবক, $x \propto \frac{1}{z}$ যখন y ধ্রুবক, প্রমাণ কর $x \propto \frac{1}{yz}$ যখন y এবং z উভয়ে চল।

12. যদি $x \propto y+z$ যখন $y-z$ ধ্রুবক এবং $x \propto y-z$ যখন $y+z$ ধ্রুবক, প্রমাণ কর $x \propto y^2-z^2$ যখন y এবং z উভয়ে চল।

13. (i) যদি $ax^2+by^2 \propto cx^2+dy^2$ প্রমাণ কর $x \propto y$

(ii) যদি $x+y \propto x-y$ প্রমাণ কর $x^2+xy+y^2 \propto x^2-xy+y^2$

14. যদি $x=ky$ ও $y=k'z$ ভেদে x, y, z এর যথাক্রমে a, b, c ও a', b', c' এইরূপ দুই সেট্ মান হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\dfrac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}$

[C. U. '22]

15. যদি $a \propto b$ এবং $b \propto c$ হয়, প্রমাণ কর $a^3+b^3+c^3 \propto 3abc$

16. বৃত্তের ক্ষেত্রফল উহার ব্যাসার্ধের বর্গের সহিত সরল ভেদে আছে। ব্যাসার্ধ 4 ফুট 8 ইঞ্চি হইলে ক্ষেত্রফল $68\frac{4}{9}$ বর্গফুট হয়। তবে ব্যাসার্ধ 3 ফুট 6 ইঞ্চি হইলে ক্ষেত্রফল কত হইবে?

17. যদি স্থিরাবস্থা হইতে কোন বস্তু t সেকেণ্ডে d ফুট পড়ে তবে $d \propto t^2$. যদি উহা 2 সে.-এ 64 ফুট পড়ে তবে 8 সেকেণ্ডে এবং 8তম সেকেণ্ডে কত ফুট পড়িবে ?

18. তিনটি গোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 3, 4 এবং 5 ইঞ্চি। তাহাদের গালাইয়া একটি নতুন গোলক তৈরী করা হইল। নতুন গোলকের ব্যাসার্ধ কত হইবে, যদি গোলকের আয়তন উহার ব্যাসার্ধের ত্রিঘাতের সমানুপাতিক হয়।

19. যদি 10 জন লোক 18 দিনে 60 একর জমি চাষ করিতে পারে, তবে 15 জন লোক কতদিনে 80 একর জমি চাষ করিতে পারিবে, তাহা ভেদের নিয়ম প্রয়োগ করিয়া বাহির কর।

20. একটি বোর্ডিংয়ের ব্যয় আংশিক ধ্রুবক ও আংশিক বোর্ডারের সংখ্যার সহিত সরল ভেদে আছে। বোর্ডারের সংখ্যা 450 হইলে খরচ হয় 1485 টাকা এবং বোর্ডারের সংখ্যা 920 হইলে খরচ হয়, 2895 টাকা। 1000 জন বোর্ডারের খরচ কত হইবে ?

21. শঙ্কুর ঘনফল উহার উচ্চতা ও বৃত্তাকার ভূমির ক্ষেত্রফলের সহিত যৌগিক ভেদে থাকে। উচ্চতা 15 ফুট ও ভূমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গফুট হইলে ঘনফল 50 ঘনফুট হয়। ঘনফল 770 ঘনফুট ও উচ্চতা 15 ফুট হইলে ভূমির ব্যাসার্ধ কত হইবে ?

22. আলোকের ঔজ্জ্বল্য উৎস হইতে বস্তুর দূরত্বের বর্গের সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে। একখানি বই একটি উৎস হইতে 20 সে.মি. দূরে আছে, উহাকে আর কতটা সরাইলে ঔজ্জ্বল্য অর্ধেক হইবে ?

23. একটি মালগাড়ীর এঞ্জিনে বগী যুক্ত না থাকিলে উহা ঘণ্টায় 24 মাইল বেগে যাইতে পারে। উহার গতিবেগ হ্রাসের পরিমাণ উহার সহিত যুক্ত বগী সংখ্যার বর্গমূলের সমানুপাতিক। 14 খানা বগী যুক্ত হইলে উহার গতি ঘণ্টায় 20 মাইল হয়। এঞ্জিনটি সর্বাধিক কতখানি বগী লইয়া চলিতে পারিবে ? [H. S. '69]

24. একটি খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 8 : 7 এবং উহার $\frac{2}{3}$ অংশ বসিবার স্থান। যদি উহার প্রস্থ $\frac{1}{9}$ অংশ কম করা হয়, তবে উহার দৈর্ঘ্য কি অনুপাতে বাড়াইলে বসিবার স্থান পূর্বের তিনগুণ হইতে পারে ? [C. U. '32]

25. কোন বস্তুর ভর (m) উহার ঘনত্ব (d)-এর সহিত সরল ভেদে থাকে যখন উহার আয়তন (v) ধ্রুবক হয় ; এবং উহা v-এর সহিত সরল ভেদে থাকে যখন d ধ্রুবক হয়। যদি এক একক আয়তন ও এক একক ঘনত্ব বিশিষ্ট বস্তুকে উহার একক ধরা হয়, তবে দেখাও যে $m = vd$। [C. U. '29]

26. নির্দিষ্ট ভরের কিছু পরিমাণ গ্যাসের আয়তন চরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক যখন চাপ স্থির থাকে এবং চাপের সহিত ব্যস্তানুপাতিক যখন তাপমাত্রা স্থির থাকে।

যখন চাপ পারদের 60 ইঞ্চি চরম তাপমাত্রা 300° তখন আয়তন 50 ঘন ইঞ্চি। যখন চাপ পারদের 70 ইঞ্চি, এবং চরম তাপমাত্রা 280° তখন আয়তনের মান নির্ণয় কর।

27. যদি কোন আয়করের হার কোন ব্যক্তির 3000 টাকা উর্ধ্বে আয়ের বর্গের সমানুপাতিক হয় এবং 6000 টাকা আয়ের কোন ব্যক্তির আয়করের পরিমাণ 100 টাকা হয়, তবে দেখাও যে এই পদ্ধতিতে আয়কর ধার্য হইলে যে ব্যক্তির আয় 96000 টাকা তিনি দেউলিয়া হইয়া যাইবেন।

28. একটি দামী পাথরের মূল্য উহার ওজনের বর্গের সমানুপাতিক। পাথরটি চারিখণ্ডে বিভক্ত হইয়া গেল এবং অংশগুলির ওজনের অনুপাত 1 : 2 : 3 : 4; যদি ইহাতে মোট 70000 টাকা ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে মূল পাথরের মূল্য কত ছিল?

29. একটি গোলকের ওজন উহার ব্যাসার্ধের ত্রিঘাত এবং যাহা দ্বারা তৈরী তাহার ঘনত্বের সহিত যৌগিক ভেদে আছে। দুইটি গোলকের ব্যাসার্ধের অনুপাত 16 : 7 এবং উপাদানের ঘনত্বের অনুপাত 2 : 3; যদি প্রথমটির ওজন 256 gm. হয় তবে দ্বিতীয়টির ওজন কত?

30. একটি রৌপ্যমুদ্রার মূল্য উহার ব্যাসের বর্গের সমানুপাতিক যখন উহার বেধ ধ্রুবক এবং বেধের সমানুপাতিক যখন ব্যাস স্থির থাকে। দুইটি রৌপ্যমুদ্রার ব্যাসের অনুপাত 5 : 6, তাহাদের বেধের অনুপাত নির্ণয় কর যদি প্রথমটির মূল্য দ্বিতীয়টির 3 গুণ হয়।

31. এঞ্জিনের কয়লা খরচ উহার গতিবেগের বর্গের সমানুপাতিক। যখন এঞ্জিনের বেগ ঘণ্টায় 50 কিমি. তখন ঘণ্টায় কয়লা খরচ 100 kg.; প্রতি kg. কয়লার দাম 25 প. এবং প্রতি ঘণ্টায় এঞ্জিন চালাইবার অন্যান্য খরচ 4 টাকা হইলে, ঐ এঞ্জিনের 300 কিমি. যাইতে কমপক্ষে কত ব্যয় হইবে?

32. খালি জাহাজের ওজন এবং তাহার টনেজ (Tonnage) যথাক্রমে উহার দৈর্ঘ্যের বর্গ এবং ঘনর সমানুপাতিক। যদি l_1 দৈর্ঘ্যের কোন জাহাজের কার্গো (cargo) সহ ওজন w_1 হয়, এবং l_2 এবং l_3 দৈর্ঘ্যের জন্য যথাক্রমে w_2 এবং w_3 হয়, প্রমাণ কর।

$$\frac{w_1}{l_1^2}(l_2-l_3)+\frac{w_2}{l_2^2}(l_3-l_1)+\frac{w_3}{l_3^2}(l_1-l_2)=0$$

33. দেওয়া আছে W, P-র সহিত সরল ভেদে এবং Q-র সহিত বিপরীত ভেদে থাকে, তবে এই সূত্র হইতে (i) নিম্নের সূত্রটি সম্পূর্ণ কর: Q...এর সহিত সরলভেদে এবং···এর সহিত বিপরীত ভেদে পরিবর্তিত হয়, এবং (ii) Q-এর শতকরা হিসাবে পরিবর্তন নির্ণয় কর:—দেওয়া আছে যে P শতকরা 20 ভাগ কমিয়া গিয়াছে, এবং W শতকরা 60 ভাগ বাড়িয়া গিয়াছে? [H. S. 1972]

দ্বিতীয় অধ্যায়

সমান্তর শ্রেণী

(Arithmetic Progression)

শ্রেণী : (Series) যদি কোন রাশিমালার পরপর রাশি বা পদগুলি একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসারে পাওয়া যায়, তবে সেই রাশিমালাকে শ্রেণী বলে। যথা, 1, 4, 7, 10, …অথবা, -2, -5, -8, প্রভৃতি রাশি একটি শ্রেণী গঠন করিয়াছে।

সমান্তর শ্রেণী : যদি কোন শ্রেণীর অন্তর্গত যে কোন পদের সহিত তাহার ঠিক পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান থাকে, তবে সেই শ্রেণীকে **সমান্তর শ্রেণী** বলে। আর ঐ সমান অন্তরটিকে **সাধারণ অন্তর** (Common difference) বলে। যে কোন পদ হইতে পূর্ববর্তী পদটি বিয়োগ করিলেই সাধারণ অন্তর পাওয়া যায়। যথা—

(*i*) 3, 8, 13, 18,……শ্রেণীর সাধারণ অন্তর$=13-8=5$

(*ii*) -5, -8, -11,……শ্রেণীর সাধারণ অন্তর$=-8-(-5)=8+5=-3$

(*iii*) $a, a+b, a+2b$,……শ্রেণীর সাধারণ অন্তর$=a+b-a=b$.

কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রারম্ভে যে পদ থাকে তাহাকে **প্রথম পদ** (first term) বলে। প্রথম পদের সহিত সাধারণ অন্তর যোগ করিলে দ্বিতীয় পদ, দ্বিতীয় পদের সহিত সাধারণ অন্তর যোগ করিলে তৃতীয় পদ, ইত্যাদি, এইভাবে যে কোন পদ পাওয়া যায়। এই শ্রেণীর n-তম পদকে **সাধারণ পদ** (general term) বলে। শ্রেণীর শেষ পদকে l দ্বারা সূচিত করা হয়।

সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।

[To find the n-th term of a Arithmetic Progression.]

মনে করি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b ;

$\therefore$ প্রথম পদ $t_1=a \quad =a+(1-1)b$

দ্বিতীয় পদ $t_2=a+b \quad =a+(2-1)b$

তৃতীয় পদ $t_3=a+2b \quad =a+(3-1)b$

চতুর্থ পদ $t_4=a+3b \quad =a+(4-1)b$

ইহা হইতে দেখা যায়, যে কোন পদে b-র সহগ ঐ পদসংখ্যা অপেক্ষা 1 কম। ইহার সহিত প্রথম পদ a যোগ করিলেই যে কোন পদ পাওয়া যায়।

সুতরাং n-তম পদ $= t_n = a+(n-1)b$; যদি শ্রেণীটিতে n সংখ্যক পদ থাকে তবে শেষ পদ $l = a+(n-1)b$.

কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটি নির্ণয় করা যায়। অথবা যে কোন দুইটি পদ দেওয়া থাকিলেও সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. একটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর -2 ; ইহার 15 তম পদটি নির্ণয় কর।

এখানে $a=5, b=-2, n=15$ $\qquad t_n = a+(n-1)b$

$\therefore \quad t_{15} = 5+(15-1)(-2)$ $\quad$ বা, $t_{15} = 5-28 = -23$

উদা. 2. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 3 এবং 20 তম পদ 60 ; ইহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে করি, সাধারণ অন্তর $= b$; এখানে $a=3, t_{20}=60$

$\therefore \quad a+(20-1)b = 60$ $\quad$ বা, $3+19b = 60$

বা, $19b = 60-3$ $\quad$ বা, $b=3$ $\quad \therefore$ সাধারণ অন্তর $= b$.

উদা. 3. যে সমান্তর শ্রেণীর 6-তম পদ 25 এবং 18-তম পদ -35, তাহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

মনে করি, প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= b$

$\therefore$ 6-তম পদ $= a+5b = 25$ $\quad \cdots \quad (1)$

18-তম পদ $= a+17b = -35$ $\quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) কে সমাধান করিয়া পাওয়া যায় $b=-5, a=50$

$\therefore$ প্রথম পদ $= 50$, সাধারণ অন্তর $= -5$

উদা. 4. 10, 8, 6$\cdots$শ্রেণীটির কত তম পদ -16 হইবে ?

এখানে $a=10, b=8-10=-2$ $\qquad$ মনে করি n তম পদ $t_n = -16$

$\therefore \quad a+(n-1)b = -16$ $\quad$ বা, $10+(n-1)(-2) = -16$

বা, $10-2n+2 = -16$ $\quad$ বা, $2n = 28$ $\quad$ বা, $n=14$

$\therefore$ 14 তম পদ -16 হইবে।

উদা. 5. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে c এবং d হইলে, উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর বাহির কর। [C. U. '34]

মনে করি প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= b$

$\therefore$ p-তম পদ $= a+(p-1)b = c$ $\quad \cdots \quad (1)$

q-তম পদ $= a+(q-1)b = d$ $\quad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $(p-q)b=c-d$

$$\therefore \quad b=\frac{c-d}{p-q}$$

(1) হইতে পাই, $a=c-(p-1)b$

$$=c-\frac{(p-1)(c-d)}{p-q}=\frac{c(p-q)-(p-1)(c-d)}{p-q}$$

বা, $$a=\frac{cp-cq-cp+c+dp-d}{p-q}=\frac{d(p-1)-c(q-1)}{p-q}$$

সমান্তরীয় মধ্যক (Arithmetic Mean)

যদি তিনটি রাশি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে মধ্যপদটিকে **সমান্তরীয় মধ্যক** বলে। যদি a, b, c সমান্তর শ্রেণী গঠন করে তবে b-কে a, ও c-এর সমান্তরীয় মধ্যক বলে। দুইটি রাশির মধ্যবর্তী এক বা একাধিক সমান্তরীয় মধ্যক থাকিতে পারে।

উদা. 1. a ও b-এর মধ্যবর্তী সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

মনেকরি a, b-এর সমান্তরীয় মধ্যক m; সুতরাং a, m, b সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\therefore \quad m-a=b-m$ (উভয় পক্ষেই সাধারণ অন্তর সমান বলিয়া)

বা, $2m=a+b \qquad \therefore \quad m=\dfrac{a+b}{2}$

সুতরাং দুইটি রাশির সমান্তরীয় মধ্যক রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক।

n সংখ্যক পদের সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করিতে হইলে পদগুলির সমষ্টিকে n দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

যদি $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$ সংখ্যক পদ থাকে, তবে তাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক

$$=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\sum_{r=1}^{n}\frac{a_r}{n}$$

যদি পদগুলি সমান্তর শ্রেণীতে থাকে, তবে উভয় প্রান্ত হইতে সমদূরত্ব পদটি (বিজোড় হইলে) অথবা সমদূরত্বের পদদ্বয়ের (জোড় হইলে) সমষ্টির অর্ধেক সমান্তরীয় মধ্যক হইবে।

উদা. 2. a ও b-এর মধ্যবর্তী n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

মনে করি a ও b-এর মধ্যে n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক $m_1, m_2, m_3 \cdots m_n$

a ও b-এর মধ্যে n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক লইলে পদ সংখ্যা হইবে $n+2$; এই সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং $(n+2)$ তম পদ $=b$.

মনে করি, সাধারণ অন্তর $= d$

$\therefore$ $(n+2)$ তম পদ $= a+(n+2-1)d = b$

বা, $(n+1)d = b-a$ বা, $d = \frac{b-a}{n+1}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $m_1 = a+\frac{b-a}{n+1}$, $m_2 = a+\frac{2(b-a)}{n+1}$

$m_3 = a+\frac{3(b-a)}{n+1} \cdots m_n = a+\frac{n(b-a)}{n+1}$

উদা. 3. 7 এবং 62-এর মধ্যে 10টি সমান্তরীয় মধ্যক বাহির কর।

7 এবং 62-এর মধ্যে 10টি মধ্যক লইলে মোট পদসংখ্যা হইবে 12টি পদযুক্ত একটি সমান্তর শ্রেণী যাহার প্রথম পদ $a = 7$, 12 তম পদ $= 62$

মনে করি, সাধারণ অন্তর $= 6$

$\therefore$ 12 তম পদ $= a+11b = 62$ বা, $7+11b = 62$

বা, $b = 5$ $\therefore$ প্রথম মধ্যক $= 7+5 = 12$,

দ্বিতীয় মধ্যক $= 12+5 = 17$ ইত্যাদি।

এইরূপে নির্ণেয় মধ্যকগুলি 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57

উদা. 4. 1 এবং 28-এর মধ্যে n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে। ইহার তৃতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $= 2:5$; n এর মান নির্ণয় কর।

1 এবং 28-এর মধ্যে n সংখ্যক মধ্যক লইলে উৎপন্ন সমান্তর শ্রেণীর মোট পদ সংখ্যা হইবে $(n+2)$। উহার প্রথম পদ $= 1$, $(n+2)$ তম পদ $= 28$

মনে করি, সাধারণ অন্তর $= b$

$\therefore$ $(n+2)$ তম পদ $= a+(n+2-1)b = 28$

বা, $1+(n+1)b = 28$ বা, $(n+1)b = 27$ $\cdots$ (1)

যেহেতু b সাধারণ অন্তর।

$\therefore$ তৃতীয় মধ্যক $= 1+3b$ শেষ মধ্যক $= 28-b$

$\therefore$ $\frac{1+3b}{28-b} = \frac{2}{5}$ বা, $5+15b = 56-2b$

বা, $15b+2b = 56-5$ বা, $17b = 51$ বা, $b = 3$

(1) হইতে $(n+1)\cdot 3 = 27$ বা, $n+1 = 9$ বা, $n = 9-1 = 8$

সমান্তর শ্রেণীর যে কোন পদের সমষ্টি নির্ণয়

কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর দেওয়া আছে। উহার n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

(To find the sum of n terms of an A. P. having given the first term and the common difference.)

মনে করি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b, উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে করি, n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= s$, শেষতম পদ $= l$.

$$\therefore \quad s = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (l-2b) + (l-b) + l$$

শ্রেণীটিকে উল্টাইয়া লিখিলে,

$$s = l + (l-b) + (l-2b) + \cdots + (a+2b) + (a+b) + a$$

(যোগ করিয়া) $2s = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l)$

$= (a+l) + (a+l) + (a+)l + \cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= n(a+l)$

$$\therefore \quad s = \frac{n}{2}(a+l)$$

এখন যেহেতু শেষ পদ $l = a + (n-1)b$

$$\therefore \quad s = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$

সুতরাং কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর জানা থাকিলে এই সূত্রের সাহায্যে উহার যে কোন পদের সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

সমান্তর শ্রেণীর দুইটি ধর্ম :

(i) যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদের সহিত একটি ধ্রুবক রাশি যোগ বা বিয়োগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত পদগুলি উভয়ক্ষেত্রে সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে যাহাদের সাধারণ অন্তর মূল শ্রেণীর সাধারণ অন্তর হইবে।

(ii) যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদকে একটি ধ্রুবক রাশিদ্বারা গুণ বা ভাগ করা হয়, তবে প্রাপ্ত পদগুলি উভয়ক্ষেত্রে সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে যাহাদের সাধারণ অন্তর যথাক্রমে মূল শ্রেণীর সাধারণ অন্তর এবং ধ্রুবক রাশির গুণফল বা ভাগফলের সমান হইবে।

উদা. 1. 4, 7, 10,......এই শ্রেণীর 23টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে $a = 4,\ b = 7 - 4 = 3\ \ n = 23.$

এখন $s = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\} = \frac{23}{2}\{2.4 + (23-1)3\}$

$= \frac{23}{2}(8 + 66) = 23 \times 37 = 851$

উদা. 2. $27+24+21+18+\cdots\cdots$ এই সমান্তর শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি 126 হইবে ?

এখানে $a=27,\quad b=24-27=-3,\quad s=126$

মনে করি, n পদের সমষ্টি 126 হইবে।

এখন $\quad s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}$

বা, $\quad 126=\frac{n}{2}\{2.27+(n-1)(-3)\}\qquad$ বা, $\quad 252=n(54-3n+3)$

বা, $\quad 252=-3n^2+57n\qquad$ বা, $\quad 3n^2-57n+252=0$

বা, $\quad n^2-19n+84=0\qquad$ বা, $\quad n^2-7n-12n+84=0$

বা, $\quad n(n-7)-12(n-7)=0\qquad$ বা, $\quad (n-7)(n-12)=0$

$\therefore\ n=7$ অথবা 12.

উদা. 3. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1+3+5+\cdots$ শ্রেণীর 40টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '21]

এখানে $a=1,\ b=3-1=2$

$t_n=a+(n-1)b\qquad\therefore\ t_{40}=1+(40-1)2=79$

মনে করি সমষ্টি $=s$

$$\therefore\ s=1+\ 3+\ 5+\cdots\cdots\cdots+75+77+79$$
$$s=79+77+75+\ldots\ldots\ldots+\ 5+\ 3+\ 1$$
$$2s=80+80+80+\ldots\ldots\ldots 40\text{টি পদ পর্যন্ত}=80\times40$$
$$\therefore\ s=1600$$

উদা. 4. $3+4+8+9+13+14+18+19+\ldots$ শ্রেণীটির 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '71]

$3+4+8+9+13+14+18+19+\ldots$ শ্রেণীটিতে দুইটি সমান্তর শ্রেণী মিশিয়া আছে। যথা, $(3+8+13+18+\cdots)$ এবং $(4+9+14+19+\ldots)$; সুতরাং প্রত্যেকটির পদসংখ্যা 10.

$\therefore\ s=(3+8+13+18+\ \ldots 10\text{-তম পদ})+(4+9+14+19+\ldots 10\text{-তম পদ})$

$=\frac{10}{2}\{2.3+(10-1)5\}+\frac{10}{2}\{2.4+(10-1)5\}$

$=5(6+45)+5(8+45)=5\times51+5\times53=520$

উদা. 5. প্রমাণ কর কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টির সমান।

মনে করি, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, শেষ পদ $=l$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$ এবং পদসংখ্যা $=n$ $\quad\therefore\ l=a+(n-1)b$

প্রথম হইতে r-তম পদ $=a+(r-1)b$

শেষ হইতে r-তম পদ $=$ প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদ

$$=a+(n-r+1-1)b=a+(n-r)b$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=a+(r-1)b+a+(n-r)b=a+a+(r-1+n-r)b$

$$=a+a+(n-1)b=a+l.$$

উদা. 6. দেখাও যে 4, 12, 20, 28, ⋯শ্রেণীটির n-পদের সমষ্টি একটি যুগ্ম রাশির বর্গ।

এখানে $a=4,\ b=12-4=8$

n-পদের সমষ্টি $=\frac{n}{2}\{2.4+(n-1)8\}=n(4+4n-4)=4n^2=(2n)^2=$ একটি যুগ্মরাশির বর্গ।

উদা. 7. একটি শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি $\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$; ইহার r-তম পদ নির্ণয় কর।

মনে করি, n-পদের সমষ্টি $=S_n$ $\quad\therefore\ S_n=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ বসাইয়া পাই

$S_1=\dfrac{1(4.1^2-1)}{3}=1$ $\quad\therefore$ ১ম পদ $=1=(2.1-1)^2$

$S_2=\dfrac{2(4.2^2-1)}{3}=10$ $\quad\therefore$ ২য় পদ $=10-1=9=(2.2-1)^2$

$S_3=\dfrac{3(4.3^2-1)}{3}=5$ $\quad\therefore$ ৩য় পদ $=35-10=25=(2.3-1)^2$

$S_4=\dfrac{4(4.4^2-1)}{3}=84$ $\quad\therefore$ ৪র্থ পদ $=84-35=49=(2.4-1)^2$

$\therefore$ r-তম পদ $=(2r-1)^2$

উদা. 8. যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, এবং $a+b+c \neq 0$ হয়, প্রমাণ কর, $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\therefore \quad \frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\therefore \quad \frac{a+b+c}{a}-1, \frac{a+b+c}{b}-1, \frac{a+b+c}{c}-1$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\therefore \quad \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

উদা. 9. 72-কে এরূপ তিনটি অংশে বিভক্ত কর, যাহারা সমান্তর শ্রেণী গঠন করে এবং প্রথম দুইটির গুণফল 480 হয়।

[তিনটি সংখ্যা সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে তাহাদের $a-b, a, a+b$ ধরিলে সুবিধা হয়।]

মনে করি, অংশত্রয় $a-b, a, a+b$

$\therefore \quad a-b+a+a-b=72 \quad \therefore \quad 3a=72 \quad \therefore \quad a=24$

আবার, $a(a-b)=480$ বা, $24(24-b)=480$

বা, $576-24b=480$ বা, $24b=576-480=96$, $\therefore \; b=4$

$\therefore$ অংশত্রয় $a-b=24-4=20, \quad a=24, \quad a+b=24+4=28.$

উদা. 10. যদি a, b, c যথাক্রমে কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ হয়, তবে প্রমাণ কর $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$

মনে করি, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ x, সাধারণ অন্তর y

$\therefore \quad a=x+(p-1)y \ldots(1), \quad b=x+(q-1)y \ldots(2)$
$c=x+(r-1)y \ldots(3)$

$(1)-(2)$ করিয়া পাই $a-b=(p-q)y$

$(2)-(3)$ করিয়া পাই $b-c=(q-r)y$

$\therefore \quad \frac{a-b}{b-c}=\frac{(p-q)y}{(q-r)y}$ বা, $\frac{a-b}{b-c}=\frac{p-q}{q-r}$

$\therefore \quad (a-b)(q-r)-(b-c)(p-q)=0$

বা, $a(q-r)-b(q-r)-b(p-q)+c(p-q)=0$

বা, $a(q-r)-b(q-r+p-q)+c(p-q)=0$

বা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$

উদা. 11. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে a, b ও c হয়, তবে প্রমাণ কর $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ হইবে।

মনে করি, সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=x$, সাধারণ অন্তর $=d$

$\therefore \quad \frac{p}{2}\{2x+(p-1)d\}=a \ldots (1), \ \frac{q}{2}\{2x+(q-1)d\}=b \ldots (2)$

এবং $\frac{r}{2}\{2x+(r-1)d\}=c \ldots (3)$

(1) নং এর উভয় পক্ষকে $\frac{p}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $2x+(p-1)d=\frac{2a}{p} \ldots (4)$

(2) নং এর উভয় পক্ষকে $\frac{q}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $2x+(q-1)d=\frac{2b}{q} \ldots (5)$

(3) নং এর উভয় পক্ষকে $\frac{r}{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $2x+(r-1)d=\frac{2c}{r} \cdots (6)$

(4) − (5) করিয়া পাই, $(p-q)d=2\left(\frac{a}{p}-\frac{b}{q}\right) \cdots (7)$

(5) − (6) করিয়া পাই, $(q-r)d=2\left(\frac{b}{q}-\frac{c}{r}\right) \cdots (8)$

(7) ÷ (8) করিয়া পাই $\frac{p-q}{q-r}=\frac{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}}{\frac{b}{q}-\frac{c}{r}}$

$\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r)=\frac{b}{q}(p-q)-\frac{c}{r}(p-q)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $\frac{a}{p}(q-r)-\frac{b}{q}(q-r)-\frac{b}{q}(p-q)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

বা, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(-q+r-p+q)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

বা, $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$

উদা. 12. কোন স্থান হইতে রওনা হইয়া A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যাইতে লাগিল এবং তাহার $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে B রওনা হইয়া একই দিকে প্রথম ঘণ্টায় 3 মাইল, দ্বিতীয় ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ মাইল, তৃতীয় ঘণ্টায় 4 মাইল, এইভাবে যাইতে লাগিল। B কত ঘণ্টায় Aকে ধরিবে ? [H. S. '65]

মনে করি, B n ঘণ্টা পর Aকে ধরিবে।

সুতরাং A মোট $(n+4\frac{1}{2})$ বা, $(n+\frac{9}{2})$ ঘণ্টা, ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে চলিয়াছে।

$\therefore$ A মোট দূরত্ব অতিক্রম করে $=5(n+\frac{9}{2})=5n+\frac{45}{2}$ মাইল,

B-র গতিবেগ একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, যাহার প্রথম পদ $a=3$, সাধারণ অন্তর $b=\frac{1}{2}$.

B, n ঘণ্টায় মোট দূরত্ব অতিক্রম করে

$\frac{n}{2}\{2.3+(n-1)\frac{1}{2}\}$ মাইল $=\frac{11n}{4}+\frac{n^2}{4}$ মাইল

যখন B, Aকে ধরিবে তখন উভয়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করিবে।

$\therefore\ \frac{11n}{4}+\frac{n^2}{4}=5n+\frac{45}{2}$ বা, $11n+n^2=20n+90$

বা, $n^2-9n-90=0$ বা, $n^2-15n+6n-90=0$

বা, $n(n-15)+6(n-15)=0$ বা, $(n-15)(n+6)=0$

$\therefore\ n-15=0$ বা, $n=15$

বা, $n+6=0$ বা, $n=-6$ ইহা হইতে পারে না।

$\therefore$ B, 15 ঘণ্টা পর Aকে ধরিবে।

Exercise 2

1. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 3 ; ইহার 15-তম এবং p-তম পদ নির্ণয় কর।

2. কোন সমান্তর শ্রেণীর 5ম পদ 11 এবং 9ম পদ 7 হইলে 14-তম পদ কত হইবে ?

3. এমন একটি সমান্তর শ্রেণী নির্ণয় কর যাহার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b.

4. যদি $k^2+2k+1,\ 3k^2+6k+5,\ 4k^2+5k+3$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে তবে k-এর মান কত হইবে ?

5. 2, 7, 12, 17,...শ্রেণীর কত তম পদের মান 797 এবং $5p-18$ হইবে ?

6. 8, 5, 2,...এই শ্রেণীটির -447 কোন পদ হইবে কি?

7. নিম্নলিখিত শ্রেণী দুইটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

(i) $a,\ a+\frac{1}{n},\ a+\frac{2}{n}......$

(ii) $\frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n},\ \frac{2n+1}{n},........$

8. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $2\sqrt{2}$ এবং 13 তম পদ $8\sqrt{2}$; সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

9. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে q এবং p; ইহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর বাহির কর।

10. কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m; উহার p-তম পদ নির্ণয় কর।

11. কোন সমান্তর শ্রেণীর p-তম পদ q এবং q-তম পদ p; দেখাও যে m-তম পদ $p+q-m$।

12. কোন সমান্তর শ্রেণীর r-তম পদ $3r-1$; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

13. কোন সমান্তর শ্রেণীর m-তম পদ n এবং n-তম পদ m; উহার $(m+n)$-তম পদ নির্ণয় কর।

14. প্রমাণ কর সমান্তর শ্রেণীর দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।

15. সমান্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর :

(i) 9 এবং 31 (ii) -7 এবং 29 (iii) -35 এবং -10

(iv) $(a-b)^2$ এবং $(a+b)^2$ (v) $\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ এবং $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

16. 2 এবং 23 এর মধ্যে 5টি সমান্তরীয় মধ্যক বাহির কর।

17. $2\frac{1}{2}$ এবং $60\frac{1}{2}$ এর মধ্যে 7টি সমান্তরীয় মধ্যক বাহির কর।

18. 1 এবং 51 এর মধ্যে এরূপ n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে যাহাতে চতুর্থ মধ্যক : সপ্তম মধ্যক $=3:5$; n-এর মান নির্ণয় কর।

19. 5 এবং 35 এর মধ্যে এরূপ n সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে যাহাতে দ্বিতীয় মধ্যক : শেষ মধ্যক $=1:4$; n-এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

20. $3+7+11+15+\ldots\ldots$15-তম পদ

21. $1+3+5+7+\ldots\ldots$12-তম পদ

22. $5+17+29+41+\ldots\ldots$20-তম পদ

23. $20+18+16+\ldots\ldots$12 তম পদ

24. $-14-11-8-\cdots\cdots$20-তম পদ

25. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots\ldots$9 তম পদ

26. $5{\cdot}3+3{\cdot}9+2{\cdot}5+\cdots\cdots$15 তম পদ

27. $1+5+9+\cdots\cdots(n-1)$-তম পদ

28. $\sqrt{2}+\sqrt{2}(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}(1-2\sqrt{2})+\cdots\cdots 21$-তম পদ

29. $n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots n$-তম পদ

30. $2+5+8+\cdots\cdots+152$ [C. U. '48]

31. $(2a-3b)+(a-2b)-b-\cdots\cdots n$-তম পদ

32. $\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots\cdots n$-তম পদ

33. $(x+y)^2+(x^2+y^2)+(x-y)^2+\ \ldots\ldots n$-তম পদ

34. $9+6+3+\ldots\ldots+(-24)$

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

35. $4+7+10+\ldots\ldots\ldots 112$-তম পদ

36. $27+24+21+\cdots\cdots\cdots 11$-তম পদ

37. $3+7+11+\cdots\cdots\cdots n$-তম পদ

38. $5+8+11+\cdots\cdots\cdots+41$

39. 2, 5, 8,$\cdots$শ্রেণীটির কতটি পদের সমষ্টি 301 হইবে ?

40. 93, 90, 87,... শ্রেণীটির কতটি পদের সমষ্টি 975 হইবে ? এক্ষেত্রে দুইটি মান পাইবার কারণ উল্লেখ কর।

41. 296 এবং 530-এর মধ্যে 11-এর গুণিতকগুলির সমষ্টি বাহির কর।

42. কোন সমান্তর শ্রেণীর 12-তম পদ 23 এবং প্রথম 22টি পদের সমষ্টি 484 ; প্রথম 30টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

43. কোন সমান্তর শ্রেণীর প্রথম দুইটি পদ $1\frac{1}{2}$ এবং $2\frac{1}{3}$; উহার কতগুলি পদের সমষ্টি 171 হইবে ?

44. $1+5+7+11+13+17+19+\cdots\cdots 21$টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

45. $21+19+17+\cdots$সমান্তর শ্রেণীর কতিপয় পদের সমষ্টি 120 ; উহার শেষ পদ ও পদসংখ্যা নির্ণয় কর। [D. B. '27]

46. কোন সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি $3n+4n^2$; ইহার 13-তম পদ নির্ণয় কর।

47. দুইটি সমান্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টির অনুপাত $2n+1 : 2n-1$; ইহাদের 10ম পদের অনুপাত নির্ণয় কর।

48. প্রমাণ কর দুইটি রাশির অন্তর্বর্তী x সমান্তরীয় মধ্যকের সমষ্টি এবং y সমান্তরীয় মধ্যকের সমষ্টির অনুপাত $x : y$।

49. প্রমাণ কর যে, 8, 16, 24,……শ্রেণীটির যে কোন সংখ্যক পদের সমষ্টির সহিত 1 যোগ করিলে একটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমান হইবে।

50. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর pতম পদ $\frac{1}{q}$ এবং qতম পদ $\frac{1}{p}$ হয়, দেখাও যে pq সংখ্যক পদের সমষ্টি $\frac{1}{2}(pq+1)$ হইবে।

51. কোন সমান্তর শ্রেণীর m সংখ্যক পদের সমষ্টি এবং n সংখ্যক পদের সমষ্টির অনুপাত $m^2 : n^2$; দেখাও যে m-তম পদ এবং n-তম পদের অনুপাত $2m-1 : 2n-1$ হইবে।

52. সমান্তর শ্রেণীর তিনটি পদের সমষ্টি 36 ; এবং প্রথম ও শেষ পদের গুণফল 128 ; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

53. কোন সমান্তর শ্রেণীর চারিটি পদের সমষ্টি 32 এবং প্রান্তীয় সংখ্যা দুইটির গুণফল 55 ; সংখ্যা চারিটি নির্ণয় কর।

54. কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি m এবং m পদের সমষ্টি n ; প্রমাণ কর উহার $(m+n)$ পদের সমষ্টি $-(m+n)$ হইবে।

55. প্রমাণ কর অযুগ্ম সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোন সমান্তর শ্রেণীর মধ্যপদ প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টির অধিক।

56. প্রমাণ কর যুগ্ম সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোন সমান্তর শ্রেণীর মধ্যপদদ্বয়ের সমষ্টি, প্রথম ও শেষ পদের সমষ্টির সমান।

57. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর n-তম পদ t_n এবং $t_2 : t_4 = 3 : 7$ হয়, তবে $t_5 : t_9$-এর মান নির্ণয় কর।

58. সমান্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি পদের সমষ্টি 21 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 155 ; সংখ্যাত্রয় নির্ণয় কর।

59. যদি a, b, c সমান্তর শ্রেণী গঠন করে তবে দেখাও যে

(i) $b+c, c+a, a+b$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

(ii) $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

(iii) $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

60. যদি $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে প্রমাণ কর $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে $(a+b+c\neq 0)$।

61. চারিটি সমান্তরীয় সংখ্যার প্রান্তীয় সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 11 এবং মধ্যক দুইটির গুণফল $29\frac{1}{4}$; সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [D. B. '35]

62. কোন সমান্তর শ্রেণীর p, q ও r সংখ্যক পদের সমষ্টি যথাক্রমে x, y ও z হইলে প্রমাণ কর $xqr(q-r)+yrp(r-p)+zpq(p-q)=0$. [C. U.]

63. এক ব্যক্তি তাহার বন্ধুকে বিনা সুদে 1000 টাকা এই শর্তে ধার দিল যে মাসিক কিস্তিতে ঐ ধার শোধ করিতে হইবে এবং পর পর কিস্তির পরিমাণ 2 টাকা করিয়া কমিবে। যদি প্রথম কিস্তি 64 টাকা হয়, তবে কত মাসে ঐ ধার শোধ হইবে?

64. একটি শ্রেণীর ছাত্রদের বয়স সমান্তর শ্রেণী গঠন করে যাহার সাধারণ অন্তর 4 মাস। যদি কনিষ্ঠ ছাত্রের বয়স 8 বৎসর এবং ছাত্রদের মোট বয়স 168 বৎসর হয়, তবে ঐ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

65. দুই ব্যক্তি একই পথে একসঙ্গে যাত্রা আরম্ভ করিল। একজন প্রত্যহ 10 কি. মি. করিয়া সমভাবে যাইতে লাগিল। অপর ব্যক্তি প্রথম দিন 8 কি. মি. গিয়া পরে প্রতিদিন পূর্বদিন অপেক্ষা $\frac{1}{2}$ কি.মি. বেশী যাইতে লাগিল। দ্বিতীয় ব্যক্তি কতদিনে প্রথম ব্যক্তিকে ধরিবে?

66. 500 ফুট গভীর একটি কূপ খনন করিতে খরচ নিম্নরূপ ; প্রথম ফুট খনন করার খরচ 25 পয়সা এবং পরবর্তী প্রতি ফুটের জন্য অতিরিক্ত 4 পয়সা খরচ হয়। কূপটির শেষতম ফুট খনন করার খরচ কত এবং কূপটি খননের মোট খরচই বা কত?

67. এক ব্যক্তি 9600 টাকা বিনা সুদে ধার লইয়া 48টি কিস্তিতে শোধ করিবে বলিয়া ঠিক হইল। কিস্তিগুলি একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। যখন 40টি কিস্তি দেওয়া হইল তখন ঐ ব্যক্তির পক্ষে আর টাকা দেওয়া সম্ভব হইল না এবং দেখা গেল তখনও 2400 টাকা বাকী আছে। তাহার প্রথম কিস্তির পরিমাণ কত ছিল?

68. তিনটি সমান্তর শ্রেণীর প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 1, 2 ও 3 ; যদি s_1, s_2, s_3 যথাক্রমে উহাদের n-সংখক পদের সমষ্টি সূচিত করে, তবে দেখাও যে $s_1+s_3=2s_2$।

69. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি s_n হয়, তবে প্রমাণ কর

$$qr(q-r)s_{pm}+rp(r-p)s_{qm}+pq(p-q)s_{rm}=0.$$

70. কোন সমান্তর শ্রেণীর n_1, n_2, n_3 পদের সমষ্টি যথাক্রমে s_1, s_2, s_3 দেখাও যে,

$$\frac{s_1}{n_1}(n_2-n_3)+\frac{s_2}{n_2}(n_3-n_1)+\frac{s_3}{n_3}(n_1-n_2)=0$$

স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় (Sum of natural numbers)

1, 2, 3, 4; ......প্রভৃতি সংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা** বলা হয়।

উদা. 1. n-স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s=1+2+3+\cdots\cdots+n$

এখানে $a=1 \quad b=1$

$$\therefore \quad s=\frac{n}{2}\{2.1+(n-1)1\}=\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

উদা. 2. n-সংখ্যক যুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s=2+4+6+\ldots\ldots n$-তম পদ

এখানে, $a=2, \quad b=2$

$$\therefore \quad s=\frac{n}{2}\{2.2+(n-1)2\}=n(2+n-1)=n(n+1)$$

উদা. 3. n-সংখ্যক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s=1+3+5+\cdots\cdots n$-তম পদ

$$\therefore \quad s=\frac{n}{2}\{2.1+(n+1)2\}=n(1+n-1)=n^2$$

উদা. 4. n-স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

এখানে n-এর মান যাহাই হউক না কেন

$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ [যেহেতু ইহা অভেদ]

এই অভেদে n-এর পরিবর্তে পর পর 1, 2, 3,$\cdots\cdots n$ বসাইয়া পাই

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1$$
$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$\underline{n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1}$$

(যোগ করিয়া) $n^3=3(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)$
$\qquad -3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$

[$\because$ বামপক্ষের সবগুলি পদ কাটিয়া কেবল n^3 থাকে]

বা, $n^3=3s-\dfrac{3n(n+1)}{2}+n$

বা, $3s = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n(n+1) - 2n}{2}$

$= \frac{n(2n^2 + 3n + 3 - 2)}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$

$\therefore \quad 3s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \qquad \therefore \quad s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

উদা. 5. n স্বাভাবিক সংখ্যার ত্রিঘাতের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3$

n-এর মান যাহাই হউক না কেন

$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

এই অভেদে n-এর পরিবর্তে $1, 2, 3, \cdots\cdots n$ বসাইয়া পাই

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 = 6.3^2 + 4.3 - 1$$
$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^4 - 6.n^2 + 4.n - 1$$

(যোগ করিয়া) $n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3)$

$- 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n) - n$

বা, $n^4 = 4s - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2} - n$

বা, $4s = n^4 + n + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$

$= n(n^3 + 1) + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$

$= n(n+1)(n^2 - n + 1) + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$

$= n(n+1)(n^2 - n + 1 + 2n + 1 - 2)$

$= n(n+1)(n^2 + n) = n(n+1)n(n+1) = n^2(n+1)^2$

$\therefore \quad s = \frac{\{n(n+1)\}^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

বা, $\Sigma n^3 = (\Sigma n)^2 \qquad [\Sigma = \text{sigma}]$

[উপরের সূত্রগুলি উত্তমরূপে আয়ত্ত করিবে]

উদা. 6. n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1.3+3.5+5.7+7.9+\ldots$

এস্থলে প্রত্যেক পদের ন্যায় n-তম পদটিও দুইটি উৎপাদক লইয়া গঠিত।

$\therefore$ ইহার n-তম পদ $t_n=(1, 3, 5, \cdots n\text{-তম পদ}).(3, 5, 7, \cdots n\text{-তম পদ})$

$$=\{1+(n-1)2\}\{3+(n-1)2\}$$

$\therefore$ $t_n=(2n-1).(2n+1)=4n^2-1$

$\therefore$ $n=1, 2, 3, \ldots n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-1$$
$$t_2=4.2^2-1$$
$$t_3=4.3^2-1$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$t_n=4n^2-1$$

(যোগ) $s=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-n=\frac{4n(n+1)(2n+1)-6n}{6}$$

$$=\frac{2n}{6}\{2(n+1)(2n+1)-3\}=\frac{n}{3}(4n^2+6n-1)$$

উদা. 7. n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1^2+3^2+5^2+\cdots$

এস্থলে $t_n=1, 3, 5, \ldots$ শ্রেণীর n-তম পদের বর্গ

$$=\{1+(n-1)2\}^2=(1+2n-2)^2=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$$

n-এর পরিবর্তে $1, 2, 3, \ldots n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=4.1^2-4.1+1$$
$$t_2=4.2^2-4.2+1$$
$$t_3=4.3^2-4.3+1$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$t_n=4.n^2-4.n+1$$

(যোগ) $s=4(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-4(1+2+3+\ldots+n)+n$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n$$

$$=\frac{4n(n+1)(2n+1)-12n(n+1)+6n}{6}$$

$$=\frac{2n\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}}{6}$$

$$=\frac{n}{3}(2n^2+3n+1-6n-6+3)$$

$$=\frac{n}{3}(2n^2-3n-2)=\frac{n}{3}(n-2)(2n+1)$$

উদা. 8. n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1+3+6+10+15+\ldots$

মনে করি, নির্ণেয় সমষ্টি s এবং n-তম পদ t_n

$$\therefore\quad s=1+3+6+10+15+\cdots+t_n$$

আবার $s= \quad 1+3+\ 6+10+\ldots+t_{n-1}+t_n$ [এক পদ সরাইয়া লিখিলে]

বিয়োগ করিলে $0=1+2+3+4+5+\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+2+3+4+5+\ldots$ n তম পর্যন্ত

$$=\frac{n(n+1)}{2}=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{2}n$$

n-এর পরিবর্তে $1, 2, 3, \ldots n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=\tfrac{1}{2}.1^2+\tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2=\tfrac{1}{2}.2^2+\tfrac{1}{2}.2$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$t_n=\tfrac{1}{2}.n^2+\tfrac{1}{2}.n$$

(যোগ) $s=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2)+\frac{1}{2}(1+2+\ldots+n)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\tfrac{1}{12}n(n+1)(2n+1+3)$$
$$=\tfrac{1}{12}n(n+1)(2n+4)=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

উদা. 9. n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1.3^2+2.4^2+3.5^2+\ldots$

এস্থলে $t_n=(1, 2, 3, \cdots n\text{-তম পদ}).(3, 4, 5, \cdots n\text{-তম পদের বর্গ})$

$$=n(n+2)^2=n^3+4n^2+4n$$

n-এর পরিবর্তে $1, 2, 3, \cdots n$ বসাইয়া পাই

$$t_1=1^3+4.1^2+4.1$$
$$t_2=2^3+4.2^2+4.2$$
$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots$$
$$t_n=n^3+4.n^2+4.n$$

(যোগ) $s=1^3+2^3+\cdots+n^3+4(1^2+2^2+\cdots+n^2)$
$+4(1+2+\ldots+n)$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}$$

$$=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32)$$

উদা. 10. n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$

এস্থলে $t_n=\dfrac{1}{(1, 3, 5, \cdots n\text{-তম পদ}).(3, 5, 7, \cdots n\text{-তম পদ})}$

$$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$n=1, 2, 3, \cdots\cdots n$ বসাইয়া

এখন $t_1=\frac{1}{1.3} \qquad =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$

$t_2=\frac{1}{3.5} \qquad =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$t_3=\frac{1}{5.7} \qquad =\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

... ...

$t_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

(যোগ) $s=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

উদা. 11. $(2n+1)$-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

$$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-\cdots$$

$s=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2-\cdots(2n+1)$-তম পদ

$=1^2-(2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-7^2+\cdots 2n$-তম পদ)

$=1-\{(2^2-3^2)+(4^2-5^2)+(6^2-7^2)+\cdots n$-তম পদ$\}$

$=1-(-5-9-13\cdots n$-তম পদ)

$=1+5+9+13+\cdots(n+1)$-তম পদ

$$=\frac{n+1}{2}\{2.1+(n+1-1)4\}$$

$$=\frac{n+1}{2}(4n+2)=(n+1)(n+2)$$

উদা. 12. $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\cdots(3n+1)$-তম পদ পর্যন্ত

$1, 4, 7, \cdots$ এই শ্রেণীর n তম পদ $=1+(n-1)3=3n-2$

$2, 5, 8, \cdots$,, ,, ,, ,, ,, $=2+(n-1)3=3n-1$

$3, 6, 9, \cdots$,, ,, ,, ,, ,, $=3+(n-1)3=3n$

প্রদত্ত শ্রেণীর $3n$-তম পদ 3টির সমষ্টি $=3n-2+3n-1-3n=3n-3$

প্রদত্ত শ্রেণীর $(3n+1)$-তম পদ $=3n+1$

$3n$ পদের সমষ্টি $=3(1+2+\cdots+n)-3n$

$$=\frac{3n(n+1)}{2}-3n=\tfrac{3}{2}n(n-1)$$

$\therefore$ $(3n+1)$-পদের সমষ্টি $=\tfrac{3}{2}n(n-1)+3n+1=\tfrac{1}{2}(3n^2+3n+2)$

Exercise—3

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির n-পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1.1+2.3+3.5+4.7+\cdots$

2. $2.3+3.4+4.5+\cdots$

3. $4.7+6.10+8.13+\cdots$

4. $1^2+3^2+5^2+\cdots$

5. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots$

6. $5^2+8^2+11^2+\cdots$

7. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$

8. $1.7+3.9+5.11+\cdots$

9. $2.1^2+3.2^2+4.3^2+\cdots$

10. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+\cdots$

11. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$

12. $(1)+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$

13. $1-2+3-4+5-6+\cdots$

14. $(3^3-2^3)+(5^3-4^3)+(7^3-6^3)+\cdots$ (H. S. '67)

15. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots r$-তম পদ

16. $n.1+(n-1).2+(n-2).3+\cdots+1.n$

17. $5+6+9+14+21+\cdots$

18. $2+11+28+53+86+\cdots$

19. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots 2n$-তম পদ

20. যদি কোন সমান্তর শ্রেণীর n-পদের সমষ্টি s_n হয়,

দেখাও যে, $s_{n+3}-3s_{n+2}+3s_{n+1}-s_n=0$

তৃতীয় অধ্যায়

গুণোত্তর শ্রেণী

(Geometrical Progression)

গুণোত্তর শ্রেণী : কোন শ্রেণীর অন্তর্গত পদগুলির যে কোন পদের সহিত যদি তাহার ঠিক পূর্বপদের অনুপাত সর্বদা সমান হয়, তাহা হইলে ঐ শ্রেণীকে **গুণোত্তর শ্রেণী** বলে। ঐ অনুপাতকে গুণোত্তর শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** (Common ratio) বলে।

(i) 2, 4, 8, 16,$\cdots$এই গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত$=2$

(ii) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \cdots$এই গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত$=-\frac{1}{2}$

গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাতকে সাধারণতঃ r দ্বারা সূচীত করা হয়। যে কোন পদকে সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করিলে শ্রেণীটির পরবর্তী পদ পাওয়া যায়।

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন পদকে তাহার ঠিক পূর্ব পদ দ্বারা ভাগ করিলে শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত পাওয়া যাইবে।

কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়

মনে করি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অনুপাত r; তাহা হইলে শ্রেণীটি হইবে $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$

$\therefore$ প্রথম পদ $t_1=a=a.r^{1-1}$

দ্বিতীয় পদ $t_2=ar=a.r^{2-1}$

তৃতীয় পদ $t_3=ar^2=a.r^{3-1}$

... ...

n-তম পদ $t_n=ar^{n-1}$

অনুসিদ্ধান্ত : কোন গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন দুইটি পদ জানা থাকিলে শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots$শ্রেণীটির 9-তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে প্রথম পদ $a=1$, সাধারণ অনুপাত$=\frac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}$.

পদসংখ্যা$=9$

$\because t_n=ar^{n-1}$ $\therefore t_9=1.(-\frac{1}{3})^{9-1}=(-\frac{1}{3})^8=\frac{1}{6561}$

উদা. 2. 1, −4, 16, −64,⋯শ্রেণীটির p-তম পদ নির্ণয় কর।

$a=1,\qquad r=\frac{-4}{1}=-4\qquad n=p$

$t_n=ar^{n-1}\qquad \therefore\ t_p=1.(-4)^{p-1}=(-4)^{p-1}$

এখানে t_p-র মান ধনাত্মক হইবে কি ঋণাত্মক হইবে তাহা বলা যায় না। যদি p-এর মান যুগ্ম হয় তবে t_p ঋণাত্মক এবং p এর মান অযুগ্ম হয় তবে t_p ধনাত্মক হইবে।

উদা. 3. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর 5-তম পদ 16 এবং 9-তম পদ 256 হইলে, শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

মনে করি প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$.

$\therefore$ 5-তম পদ $=ar^4=16\qquad$ 9-তম পদ $=ar^8=256$

$\therefore\ \dfrac{ar^8}{ar^4}=\dfrac{256}{16}\qquad$ বা, $r^4=16=2^4\quad\therefore\ r=\pm 2$

$\therefore\ ar^4=16\qquad \therefore\ a.16=16\qquad \therefore\ a=1$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণোত্তর শ্রেণীটি

1, 2, 4, 8, ... (যখন $r=2$)

অথবা, 1, −2, 4, −8,⋯⋯ (যখন $r=-2$)

উদা. 4. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম পদ c এবং q-তম পদ d হয়, তবে প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত বাহির কর। [C. U. '34]

মনে করি প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$

$\therefore$ p-তম পদ $=ar^{p-1}=c\cdot(1)\qquad$ এবং q-তম পদ $=ar^{q-1}=d\cdots(2)$

(1)÷(2) করিয়া পাই

$$\frac{ar^{p-1}}{ar^{q-1}}=\frac{c}{d}\quad\text{বা, } r^{p-q}=\frac{c}{d}\quad\text{বা, } r=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{p-q}}$$

$$(1)\text{ হইতে } a\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}=c\qquad \therefore\ a=c\times\left(\frac{d}{c}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}$$

$$\therefore\ a=c\times\frac{d^{\frac{p-1}{p-q}}}{c^{\frac{p-1}{p-q}}}=c^{1-\frac{p-1}{p-q}}d^{\frac{p-1}{p-q}}=c^{\frac{1-q}{p-q}}d^{\frac{p-1}{p-q}}$$

গুণোত্তর শ্রেণীর ধর্ম

(i) যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদকে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হয় তবে গুণফল বা ভাগফল বিশিষ্ট রাশিগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

(ii) গুণোত্তর শ্রেণীর পদগুলির অন্যোন্যক লইয়া গঠিত শ্রেণীটিও গুণোত্তর হইবে।

(iii) যদি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদকে একই ঘাত দ্বারা উন্নীত করা হয়, তবে প্রাপ্ত মানগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

গুণোত্তরীয় মধ্যক (Geometric Mean)

যদি তিনটি রাশি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে মধ্যের পদটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির **গুণোত্তরীয় মধ্যক** বলে।

উদা. 1. a ও b-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় কর।

মনে করি a ও b-এর গুণোত্তরীয় মধ্যক m ; সুতরাং a, m, b গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

$\therefore \quad \dfrac{m}{a}=\dfrac{b}{m} \qquad \therefore \quad m^2=ab \qquad \therefore \quad m=\pm\sqrt{ab}$

$\therefore$ a, b এর গুণোত্তরীয় মধ্যক $\pm\sqrt{ab}$.

n সংখ্যক পদের গুণোত্তরীয় মধ্যক ঐ পদগুলির গুণফলের n-তম মূল।

যদি $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ইত্যাদি n সংখ্যক পদ হয়, তবে তাহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

উদা. 2. a ও b এর মধ্যে n সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

a ও b এর মধ্যে n সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাইলে পদসংখ্যা হইবে $n+2$ এবং উহার $(n+2)$ তম পদ $=b$.

মনে করি সাধারণ অনুপাত $=r$

$\therefore \quad (n+2)$ তম পদ $=ar^{n+1}=b \qquad$ বা, $r^{n+1}=\dfrac{b}{a}$

$\therefore \quad r=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \cdots a\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

উদা. 3. $\frac{81}{16}$ এবং $\frac{64}{729}$ এর মধ্যে 9টি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

9টি মধ্যক বসাইলে পদসংখ্যা হইবে $=9+2=11$টি

$\therefore \quad 11$ তম পদ $=\frac{64}{729}$

মনে করি সাধারণ অনুপাত $=r \qquad$ প্রথম পদ $a=\frac{81}{16}$

$\therefore \quad 11$ তম পদ $=ar^{10} \qquad$ বা, $\frac{81}{16}r^{10}=\frac{64}{729}$

বা, $r^{10}=\frac{64\times16}{729\times81} \qquad$ বা, $r^{10}=(\frac{2}{3})^{10} \qquad \therefore \quad r=\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকগুলি $\frac{27}{8}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}$

উদা. 4. প্রমাণ কর দুইটি ধনাত্মক রাশির সমান্তরীয় মধ্যক, উহাদের গুণোত্তরীয় মধ্যক হইতে বড়।

মনে করি সংখ্যাদ্বয় a ও b

$\therefore$ উহাদের সমান্তরীয় মধ্যক $\frac{a+b}{2}$, গুণোত্তরীয় মধ্যক $\pm\sqrt{ab}$

মনে করি $a>b$ বা, $a-b>0$ বা, $(a-b)^2>0$

বা, $(a+b)^2-4ab>0$ বা, $(a+b)^2>4ab$

বা, $\frac{(a+b)^2}{4}>ab$ বা, $\frac{a+b}{2}>\pm\sqrt{ab}$ [বর্গমূল করিয়া]

$\therefore$ সমান্তরীয় মধ্যক > গুণোত্তরীয় মধ্যক

উদা. 5. যদি a ও b-এর সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যকের অনুপাত $m:n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$

a ও b এর সমান্তরীয় মধ্যক $=\frac{a+b}{2}$, গুণোত্তরীয় মধ্যক $=\sqrt{ab}$

$\therefore\ \frac{a+b}{2}:\sqrt{ab}=m:n$ বা, $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{m}{n}$

বা, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n}$ [comp. এবং divd. প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{m+n}{n-n}$ বা, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$ [বর্গমূল লইয়া]

বা, $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$

[Comp. এবং divd. প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$

বা, $\frac{a}{b}=\frac{m+n+m-n+2\sqrt{m^2-n^2}}{m+n+m-n-2\sqrt{m^2-n^2}}$ [বর্গ করিয়া]

বা, $\frac{a}{b}=\frac{2(m+\sqrt{m^2-n^2})}{2(m-\sqrt{m^2-n^2})}$

$\therefore\ a:b=m+\sqrt{m^2-n^2}:m-\sqrt{m^2-n^2}$

Exercise 4

1. 3, 9, 27,……শ্রেণীটির 5-তম পদ নির্ণয় কর।

2. 1, −3, 9, −27,……শ্রেণীটির 8-তম পদ নির্ণয় কর।

3. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$,……শ্রেণীটির 6-তম পদ নির্ণয় কর।

4. 16, 8, 4,……শ্রেণীটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

5. যে গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং দশম পদ 1, তাহার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [C. U. '25]

6. 9, 3, 1,……এই শ্রেণীটির কত তম পদ $\frac{1}{243}$?

7. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর 5-তম পদ 48, 12-তম পদ 6144; শ্রেণীটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [D. B. '28]

8. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 24 এবং পরবর্তী দুইটি পদের সমষ্টি 216; প্রথম পদটি নির্ণয় কর।

9. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n; p-তম এবং q-তম পদ নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী দুই পদের গুণফল ধ্রুবক।

11. গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি পদের সমষ্টি ও গুণফল যথাক্রমে 52 এবং 1728; সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

12. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ যথাক্রমে a এবং b হয়, তবে উহার n-তম পদ নির্ণয় কর।

13. 4 ও 64 এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বাহির কর।

14. $4\sqrt{3}$ এবং $3\sqrt{3}$ এর গুণোত্তরীয় মধ্যক বাহির কর।

15. 4 এবং 324 এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

16. $\frac{1}{9}$ এবং 9 এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তরীয় মধ্যক বসাও।

17. প্রমাণ কর গুণোত্তর শ্রেণীর যে কোন একটি পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল ঐ পদটির বর্গের সমান।

18. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের সমান্তরীয় মধ্যক 13 এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক 12।

19. প্রমাণ কর যে a ও b এর মধ্যবর্তী n সংখ্যক গুণোত্তরীয় মধ্যকের গুণফল উহাদের মধ্যবর্তী একটি মাত্র গুণোত্তরীয় মধ্যকের n-তম ঘাতের সমান।

20. দুইটি অসমান ধনাত্মক বস্তুর সংখ্যা p ও q এর সমান্তরীয় মধ্যক A এবং গুণোত্তরীয় মধ্যক G ; প্রমাণ কর যে $A > G > \frac{G^2}{A}$. [G. U. '50]

21. যদি দুই সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক A এবং দুইটি গুণোত্তরীয় মধ্যক p ও q হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{p^2}{q} + \frac{q^2}{p} = 2A$.

22. যদি দুইটি রাশির সমান্তরীয় ও গুণোত্তরীয় মধ্যক যথাক্রমে A ও G হয়, তবে দেখাও যে রাশি দুইটি $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$.

23. যদি p ও q দুইটি অসমান ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক A, গুণোত্তরীয় মধ্যক G এবং $H = \frac{2pq}{p+q}$ হয় তবে দেখাও যে, $A > G > H$. [C. B. S. B. 48]

24. দুইটি সংখ্যার সমান্তরীয় মধ্যক ও গুণোত্তরীয় মধ্যকের 3 গুণ। প্রমাণ কর যে ঐ সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $3 + 2\sqrt{2} : 3 - 2\sqrt{2}$।

25. গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 21 এবং গুণফল 64 ; সংখ্যা তিনটি বাহির কর।

গুণোত্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r এবং পদ সংখ্যা n ; $\therefore$ n-তম পদ $= ar^{n-1}$.

$\therefore$ শ্রেণীটি $a, ar, ar^2 \cdots\cdots ar^{n-1}$.

মনে করি $s = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$ (1)

((1)-কে r দ্বারা গুণ করিয়া $sr = \quad ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n$ (2)

(1) − (2) করিয়া পাই, $s - sr = a - ar^n$

বা, $s(1-r) = a(1-r^n)$ বা, $s = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

দ্রষ্টব্য: এখানে যোগফলের দুইটি মান পাওয়া গেল। r-এর মান 1 অপেক্ষা কম হইলে প্রথম সূত্র এবং 1 অপেক্ষা বেশী হইলে দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করিবে। যদি $r = 1$ হয় তবে $s = \frac{0}{0}$, যাহার অর্থ হয় না। সেক্ষেত্রে এই সূত্রের প্রয়োগ করা যায় না।

$a + a + a + \cdots\cdots n$-তম পদ $= na$.

উদা. 1. সমষ্টি নির্ণয় কর : $3 + 9 + 27 + \cdots\cdots 12$ তম পদ

এখানে $a = 3$, $r = \frac{9}{3} = 3$ $n = 12$

$s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(3^{12} - 1)}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^{12} - 1)$

উদা. 2. কোন সূত্রের সাহায্য ছাড়া $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots$এর n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এখানে n-তম পদ $=\frac{1}{3^{n-1}}$

মনে করি $s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$

$$\frac{1}{3}s=\quad\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}$$

(বিয়োগ করিয়া) $\frac{2}{3}s=1-\frac{1}{3^n}\quad\therefore\quad s=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

উদা. 3. $1+3+7+15+\cdots\cdots$শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি $s=1+3+7+15+\cdots\cdots+t_n$

$$s=\quad 1+3+7+\cdots\cdots+t_{n-1}+t_n$$

(বিয়োগ করিয়া) $0=1+2+4+8+\cdots\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$\therefore\quad t_n=1+2+4+8+\cdots\cdots n$ তম পদ

$$t_n=\frac{1(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

n এর পরিবর্তে 1, 2, 3,……n বসাইয়া পাই

$$t_1=2^1-1$$
$$t_2=2^2-1$$
$$t_3=2^3-1$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$t_n=2^n-1$$

(যোগ) $s=(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n)-n$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-2-n$$

উদা. 4. $5+55+555+5555+\cdots\cdots$শ্রেণীটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

মনে করি, $s=5+55+555+5555+\ldots\ldots n$ সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=5(1+11+111+1111+\ldots\ldots n$ সংখ্যক পদ)

$=\frac{5}{9}(9+99+999+9999+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ)

$=\frac{5}{9}\{(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ $\}$

$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\cdots\cdots n$ সংখ্যক পদ $)-($ n সংখ্যক 1 $)\}$

$$=\frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$$

উদা. 5. যদি কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হয়, প্রমাণ কর $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$. [H. S. '68]

মনে করি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=x$, সাধারণ অনুপাত $=d$

$\therefore\ a=xr^{p-1},\ b=xd^{q-1},\ c=xd^{r-1}$

$\therefore\ a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=(xd^{p-1})^{q-r}.(xd^{q-1})^{r-p}.(xd^{r-1})^{p-q}.$

$=x^{q-r}.d^{pq-q-pr+r}.x^{r-p}.d^{qr-r-pq+p}.x^{p-q}d.^{p-rp-qr+q}$

$=x^{q-r+r-p+p-q}.d^{pq-q-pr+r+qr-r-pq+p+pr-p-qr+q}.$

$=x^0.d^0=1.1=1.$

সমান্তর শ্রেণী ও গুণোত্তর শ্রেণীর মিলিত কয়েকটি বিবিধ উদাহরণ

উদা. 6. যদি a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং x, y যথাক্রমে a, b এবং b, c এর সমান্তরীয় মধ্যক হয়, প্রমাণ কর $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$ এবং $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$

[P. U. 1892]

যেহেতু a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, মনে করি $b=ar$, $c=ar^2$
x, y যথাক্রমে a, b এবং b, c-এর সমান্তরীয় মধ্যক।

$\therefore\ x=\dfrac{a+b}{2}$ এবং $y=\dfrac{b+c}{2}$

এখন $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\dfrac{a}{\frac{a+b}{2}}+\dfrac{c}{\frac{b+c}{2}}=2\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}\right)=2\left(\frac{a}{a+ar}+\frac{ar^2}{ar+ar^2}\right)$

$$=2\left(\frac{ar+ar^2}{ar+ar^2}\right)=2$$

আবার $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}=2\left(\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}\right)=2\times\frac{r+1}{ar(r+1)}$

$$=\frac{2}{ar}=\frac{2}{b}$$

উদা. 7. যদি s_1, s_2, s_3 যথাক্রমে কোন গুণোত্তর শ্রেণীর n, $2n$ এবং $3n$ পদের সমষ্টি হয়, তবে প্রমাণ কর $s_1(s_3-s_2)=(s_2-s_1)^2$

মনে করি গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r(>1)$

$\therefore\ s_1=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1},\ s_2=\dfrac{a(r^{2n}-1)}{r-1},\ s_3=\dfrac{a(r^{3n}-1)}{r-1}.$

$$\therefore \quad s_1(s_3-s_2)=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\left\{\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}-\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}\right\}$$

$$=\frac{a^2(r^n-1)}{(r-1)^2}\left\{r^{3n}-1-r^{2n}+1\right\}=\frac{a^2r^{2n}(r^n-1)^2}{(r-1)^2}$$

$$=\left\{\frac{ar^n(r^n-1)}{r-1}\right\}^2$$

$$(s_2-s_1)^2=\left\{\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}-\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{a(r^{2n}-1-r^n+1)}{r-1}\right\}^2=\left\{\frac{ar^n(r^n-1)}{r-1}\right\}^2$$

$\therefore$ বামপক্ষ=ডানপক্ষ

উদা. 8. যদি a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং ধনাত্মক হয়, তবে প্রমাণ কর $a+c>2b$. [C. U. '47]

যেহেতু a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, $\therefore \ \frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ বা, $ac=b^2$

যেহেতু a, b, c ধনাত্মক, $(a-c)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক।

$\therefore \ (a-c)^2>0$ বা, $(a+c)^2-4ac>0$

বা, $(a+c)^2>4ac$ বা, $(a+c)^2>4b^2$ $[\because \ ac=b^2]$

বা, $(a+c)^2>(2b)^2$ বা, $a+c>2b$

Exercise—5

সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1+3+9+27+\dots$9টি পদের 2. $81-27+9-\dots$7টি পদের
3. $128+64+32+\cdots$10টি পদের
4. $\sqrt{3}+3+3\sqrt{3}+\cdots$10টি পদের
5. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots n$ পদের
6. $\frac{1}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots n$ পদ পর্যন্ত
7. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdots n$ পদ পর্যন্ত
8. $3+4\frac{1}{2}+6\frac{3}{4}+\cdots+15\frac{3}{16}$ 9. $6+12+24+\cdots+768$
10. $A(1+i)^{n-1}+A(1+i)^{n-2}+\cdots+A$

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমষ্টি নির্ণয় কর :

11. $2+4+8+\cdots$ 12টি পদের **12.** $12+24+48+\cdots+768$

13. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots n$ পদের

14. 64, 32, 16, 8,...শ্রেণীটির কয়টি পদের সমষ্টি $127\frac{1}{2}$ হইবে ?

15. n এর ক্ষুদ্রতম মান কত হইলে $1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}>1000$ হইবে ?

16. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টি 12, এবং উহার চতুর্থ ও পঞ্চম পদের সমষ্টি 324 ; উহার প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [E. B. S. B. '49]

17. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। তাহাদের সমষ্টি 73 এবং গুণফল 512 ; সংখ্যা তিনটি বাহির কর।

18. এক ব্যক্তি বিনা সুদে 16,380 টাকা ধার করিয়া 12টি মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করিবেন বলিয়া স্থির হইল। যদি প্রতি কিস্তির পরিমাণ পূর্ববর্তী কিস্তির দ্বিগুণ হয় তবে কত মাসে উহা পরিশোধ হইবে এবং 11 তম কিস্তিটি কত হইবে ?

19. যদি a, b, c, d গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে দেখাও যে,

(i) $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$ [C. U. '43]

(ii) $a^2+b^2+c^2,\ ab+bc+cd,\ b^2+c^2+d^2$ G. P গঠন করে।

(iii) $\frac{1}{a^3+b^3},\ \frac{1}{b^3+c^3},\ \frac{1}{c^3+a^3}$, G. P গঠন করে।

20. যদি a, b, c G. P গঠন করে, দেখাও যে

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$$

21. $7+77+777+\cdots n$ তম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

22. $\cdot4+\cdot44+\cdot444+\cdots n$ তম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

23. $1+3+7+15+\cdots n$ পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [D. B. '38]

24. $1.2+2.3+4.4+8.5+\cdots n$ তম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

25. n পদের সমষ্টি নির্ণয় কর : $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\cdots$

26. n পদ বিশেষ কোন গুণোত্তর শ্রেণীর প্রথম ও শেষ পদ যথাক্রমে a ও b ; যদি P, n পদের গুণফল হয়, তবে প্রমাণ কর $P^2=(ab)^n$

27. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদের মধ্যপদটি 6 এবং প্রথম ও তৃতীয় পদের সমষ্টি 15 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর। [C. U. '32]

28. সমান্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি পদের সমষ্টি 15 ; যদি ২য় টির সহিত 1 এবং ৩য় টির সহিত 5 যোগ করা হয়, তবে উহারা গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

29. গুণোত্তর শ্রেণীর n সংখ্যক পদের সমষ্টি S, গুণফল P এবং ঐ পদগুলির অন্যোন্যকের সমষ্টি R হইলে, প্রমাণ কর $P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$

30. গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা হইতে অপর একটি গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে বিয়োগ করিলে, বিয়োগফলগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিল। প্রমাণ কর ঐ শ্রেণী তিনটির সাধারণ অনুপাত সমান।

31. a, b, c হইতে কত বিয়োগ করিলে, বিয়োগফলগুলি গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে।

32. গুণোত্তর শ্রেণীতে আছে এরূপ তিনটি সংখ্যার গুণফল 729 ; প্রথমটির সহিত 10 এবং দ্বিতীয়টির সহিত 11 যোগ করিলে যোগফল দুইটি এবং তৃতীয় সংখ্যাটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

33. যদি দুইটি সংখ্যার গুণোত্তরীয় মধ্যক G এবং দুইটি সমান্তরীয় মধ্যক p ও q হয়, প্রমাণ কর $G^2=(2p-q)(2q-p)$.

34. কোন গুণোত্তর শ্রেণীর ক্রমিক তিনটি পদের সমষ্টি 7 এবং তাহাদের বর্গের সমষ্টি 21, তাহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি নির্ণয় কর। [S. F. '59]

35. কোন সমান্তর এবং গুণোত্তর উভয় শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r তম পদ যথাক্রমে a, b এবং c হইলে, প্রমাণ কর $a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b}=1$

36. প্রমাণ কর একই সাধারণ অনুপাত বিশিষ্ট দুইটি গুণোত্তর শ্রেণীর n পদের সমষ্টির অনুপাত উহাদের n-তম পদের অনুপাতের সমান।

37. যদি $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$, তবে প্রমাণ কর a, b, c, d, G. P গঠন করে।

38. প্রমাণ কর কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদগুলিও গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিবে যদি p, q, r সমান্তর শ্রেণী গঠন করে। [S. F. '52]

39. যদি a, b, c, A.P এবং x, y, z G.P গঠন করে তবে প্রমাণ কর

$$x^{b-c}.y^{c-a}.z^{a-b}=1$$ [C. U. '50, G. U. '49]

40. 86 কে এরূপ তিন অংশে বিভক্ত কর যাহারা গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে এবং প্রথম ও তৃতীয় অংশের গুণফল, দ্বিতীয় অংশের $6\frac{1}{4}$ গুণের সমান হইবে।

41. যদি s_n, কোন গুণোত্তর শ্রেণীর (প্রথম পদ$=a$, সাধারণ অনুপাত$=r$) n পদের সমষ্টি সূচীত করে, তবে প্রমাণ কর,

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=\frac{a}{r-1}\left\{\frac{r(r^n-1)}{r-1}-n\right\}$$

বিপরীত প্রগতি (Harmonic Progression)

সংজ্ঞা : যদি কোন শ্রেণীর রাশিগুলির অন্যোন্যকগুলি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে ঐ শ্রেণীটি **বিপরীত প্রগতি** গঠন করিয়াছে বলা হয়। যথা, $a, b, c, d, \cdots$ H.P গঠন করিলে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \ldots$ A.P গঠন করিবে।

বিকল্প সংজ্ঞা : তিনটি রাশি বিপরীত প্রগতি গঠন করিবে, যদি প্রথম ও তৃতীয় রাশির অনুপাত, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অন্তর এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অন্তরের অনুপাতের সমান হয়। যথা,

যদি a, b, c H.P গঠন করে তবে, $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি a, b, c বিপরীত প্রগতিতে থাকে, তবে $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

$\therefore\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ বা, $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

বা, $\frac{2}{b}=\frac{a+c}{ac}$ বা, $b=\frac{2ac}{a+c}$ ... (1)

(ইহা খুব সহজেই প্রমাণ করা যায় যে উপরোক্ত সংজ্ঞা দুইটি মূলত একই)

(1) হইতে a, c এর বিপরীত প্রগতির মধ্যকের মান $\frac{2ac}{a+c}$

তিনটি মধ্যকের সম্পর্ক

মনে করি a, b এই রাশি দুইটির সমান্তরীয়, গুণোত্তরীয় এবং বিপরীত প্রগতির মধ্যক যথাক্রমে A, G এবং H

$\therefore\ A=\frac{a+b}{2}$ ... (1) $G=\sqrt{ab}$ ... (2)

$H=\frac{2ab}{a+b}$ ... (3)

এখন $A.H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$

সুতরাং A এবং H এর গুণোত্তর মধ্যক G।

অর্থাৎ A, G, H গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে।

আবার $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ ইহা সর্বদাই ধনাত্মক এবং অসমান।

$\therefore\ A-G>0$ অর্থাৎ $A>G$, যখন a ও b ধনাত্মক ও অসমান।

আবার $AH=G^2$ এবং $A>G$ $\therefore\ H<G$

অর্থাৎ $G>H$ $\therefore\ A>G>H.$

উদা. 1. কোন H.P-র চতুর্থ পদ $\frac{2}{3}$ এবং সপ্তম পদ $\frac{2}{5}$; ইহার n-তম পদ নির্ণয় কর।

মনে করি বিপরীত প্রগতির অন্যোন্যক পদের (যাহা A.P গঠন করে) প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর b

$\therefore$ সমান্তর শ্রেণীর চতুর্থ পদ $a+3b=\frac{3}{2}$ ... (1)

সপ্তম পদ $a+6b=\frac{5}{2}$ ... (2)

(1) ও (2) সমাধান করিলে $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore$ সমান্তর শ্রেণীর n তম পদ $=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{3}=\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}=\frac{2n+1}{6}$

$\therefore$ বিপরীত প্রগতির n তম পদ $=\frac{6}{2n+1}$.

উদা. 2. যদি a, b, c H. P গঠন করে, তবে প্রমাণ কর,

$$\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{c+a},\ \frac{c}{a+b},\ \text{H. P. গঠন করে।}$$

যেহেতু a, b, c H. P. গঠন করে। $\therefore\ \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A. P. গঠন করে।

$\therefore\ \frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ A. P গঠন করে,

$\therefore\ \frac{a+b+c}{a}-1, \frac{a+b+c}{b}-1, \frac{a+b+c}{c}-1$ A. P. গঠন করে,

$\therefore\ \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$, A. P. গঠন করে।

$\therefore\ \frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$, H. P. গঠন করে।

উদা. 3. যদি $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ H. P. গঠন করে প্রমাণ কর।

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}\,a_n=(n-1)\,a_1a_n$$

এখানে, $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots\ldots \frac{1}{a_n}$ A. P. গঠন করে।

মনে করি ইহার সাধারণ অন্তর $=b$

$\therefore\ \frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=b$ বা, $a_1a_2=\frac{a_1-a_2}{b}$

অনুরূপে, $\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2}=b$ বা, $a_2a_3=\frac{a_2-a_3}{b}$, $a_3a_4=\frac{a_3-a_4}{b}$

$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=b$ বা, $a_{n-1}a_n=\frac{a_{n-1}-a_n}{b}$

$\therefore\ a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n=\frac{a_1-a_n}{b}\cdots\cdots(1)$

যেহেতু, $\frac{1}{a_n}$, A. P.-র n-তম পদ $\therefore\ \frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)b$

$\therefore\ (n-1)b=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=\frac{a_1-a_n}{a_1a_n}$ বা, $\frac{a_1-a_n}{b}=(n-1)a_1a_n\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) হইতে $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$

Exercise 5A

1. $\frac{6}{5}, 1, \frac{6}{7}, \cdots\cdots$ শ্রেণীর 12 তম পদ নির্ণয় কর।
2. কোন শ্রেণীর ৩য় পদ $\frac{1}{7}$ এবং ৭ম পদ $\frac{1}{15}$ হইলে উহার 15 তম পদ নির্ণয় কর।
3. নিম্ন শ্রেণীটির n তম পদ নির্ণয় কর, $4+4\frac{2}{7}+4\frac{8}{13}+5+\cdots\cdots$
4. যদি কোন H. P.-র p তম পদ q এবং q তম পদ p হয়, তবে উহার r তম পদ $\frac{pq}{r}$।
5. যদি $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ H. P. গঠন করে তবে প্রমাণ কর,

$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$$ H. P. গঠন করে।

6. যদি $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ H. P. গঠন করে, তবে প্রমাণ কর,

bc, ca, ab, H. P. গঠন করে।

7. যদি a, b, c, A. P. গঠন করে, তবে প্রমাণ কর,

$\frac{bc}{a(b+c)}, \frac{ca}{b(c+a)}, \frac{ab}{c(a+b)}$ H. P. গঠন করে।

8. প্রমাণ কর $b^2 >=< ac$ হইবে যদি a, b, c যথাক্রমে A. P., G. P., ও H. P. গঠন করে।

9. যদি কোন H. P.-র p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b, c হয়, তবে প্রমাণ কর :

$$bc(q-r)+ca(r-p)+ab(p-q)=0$$

10. যদি a_1, a_2, a_3, a_4 H. P. গঠন করে, তবে প্রমাণ কর,

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=3a_1a_4$ [Pat. '21]

11. যদি a, b, c, H. P. গঠন করে তবে প্রমাণ কর,

$a:(a-b)=(a+c):(a-c)$ [Pat. '23]

12. যদি $a^x=b^y=c^z$ এবং $ac=b^2$ হয় তবে,

প্রমাণ কর, x, y, z H. P. গঠন করে।

13. যদি x, y, z, A. P. এবং y, z, x, H. P. গঠন করে, তবে

প্রমাণ কর z, x, y, G. P. গঠন করে।

14. যদি a, b এর দুইটি A.M. a_1, a_2, দুইটি G. M. g_1, g_2 এবং দুইটি H.M. h_1, h_2 হয় তবে প্রমাণ কর,

$$a_1h_2=a_2h_1=g_1g_2=ab$$

15. যদি a_1b এর A. M., A এবং H. M., H হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{a-A}{a-H}\times\frac{b-A}{b-H}=\frac{A}{H}$$

চতুর্থ অধ্যায়

সূচক প্রকরণ

(Theory of Indices)

সংজ্ঞা : a^5, a^n প্রভৃতিতে a-র ঘাত যাহা দ্বারা সূচিত হইয়াছে, তাহাকে ঘাতের সূচক বলে।

সূচকের প্রাথমিক নিয়মাবলী (Fundamental laws of Indices) যদি m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n} (m > n)$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ (iv) $(ab)^n = a^n b^n$

তোমরা দশম শ্রেণীতে ইহাদের প্রমাণ শিখিয়াছ। তাই এখানে আর প্রমাণ দেওয়া হইল না।

ভগ্নাংশ, ঋণাত্মক এবং শূন্য সূচক (Fractional, Negative and Zero Indices) :

$a^m = a \times a \times a \times \ldots n$ সংখ্যক উৎপাদক অর্থাৎ যখন m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কিন্তু m এর মান ভগ্নাংশ, ঋণাত্মক বা শূন্য হইলে a^m এর মান কী হইবে আমরা জানি না। আমরা ধরিয়া লই $a^m \times a^n = a^{m+n}$ সর্বদাই সত্যি যদি m, n ধনাত্মক, শূন্য বা ঋণাত্মক হয়।

(i) $a^{\frac{p}{q}}$ এর অর্থ, যখন p, q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেহেতু $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

মনে করি $m = n = \frac{p}{q}$

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \quad \text{অনুরূপে } a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}} \text{ ইত্যাদি}$$

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} + a^{\frac{p}{q}} \times \cdots q \text{ উৎপাদক} = a^{\frac{qp}{q}} = a^p \quad \therefore \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$$

যেহেতু $a^{\frac{p}{q}}$ এর q-তম ঘাতের মান a^p, সুতরাং $a^{\frac{p}{q}}$, a-র p তম ঘাতের q-তম মূল।

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

যখন $p = 1$, $\quad a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$

(ii) a^o এর অর্থ,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ মনে করি $m = o$

$\therefore \quad a^o \times a^n = a^{o+n} = a^n,$

উভয় পক্ষকে a^n দ্বারা ভাগ করিলে $a^o = \frac{a^n}{a^n} = 1$

$\therefore$ a-র সকল মানে $a^o = 1 \quad (a \neq o)$

(iii) a^{-n} এর অর্থ (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

যেহেতু $a^m \times a^n \times a^{-n} = a^{m+n} \times a^{-n} = a^{m+n-n} = a^m$

উভয় পক্ষকে a^m দ্বারা ভাগ করিলে $a^n \times a^{-n} = 1$

$\therefore \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad \therefore$ a^{-n}, a^n এর অন্যোন্যক।

সুতরাং সূচকের প্রাথমিক নিয়মাবলী m, n-এর ধনাত্মক, ঋণাত্মক, ভগ্নাংশ এবং শূন্য সকল মানেই সত্য হইবে।

উদা. 1. প্রমাণ কর : $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$

$$\text{L.H.S.} = \left(x^{a-b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(x^{b-c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(x^{c-a}\right)^{c^2+ca+a^2},$$

$$= x^{a^3-b^3} \times x^{b^3-c^3} \times x^{c^3-a^3}$$

$$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3} = x^0 = 1$$

উদা. 2. যদি $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}}$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর $a+b+c=0$

মনে করি, $x^{\frac{1}{a}} = y^{\frac{1}{b}} = z^{\frac{1}{c}} = k$, $\therefore \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^a = k^a$, $\therefore x = k^a$

$\left(y^{\frac{1}{b}}\right)^b = k^b \quad \therefore \quad y = k^b \quad \left(z^{\frac{1}{c}}\right)^c = k^c \quad \therefore \quad z = k^c$

$xyz = 1 \quad \therefore \quad k^a.k^b.k^c = 1 \quad \therefore \quad k^{a+b+c} = k^0$

$\therefore \quad a+b+c=0$

উদা. 3. যদি $x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে

প্রমাণ কর, $x^3-3x^2-6x-4=0$

$x=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ বা, $x-1=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(x-1)^3=\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ বা, x^3-3x^2+3x-1

$$=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}.(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}})$$

বা, $x^3-3x^2+3x-1=9+3+3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(x-1)$

বা, $x^3-3x^2+3x-1=12+9x-9$ বা, $x^3-3x^2-6x-4=0$

সূচকীয় সমাধান :

উদা. 4. সমাধান কর : $4^x-3.2^{x+2}+32=0$

$4^x-3.2^{x+2}+32=0$ বা, $(2^2)^x-3.2^x.2^2+32=0$

বা, $(2^x)^2-3.2^x.4+32=0$ বা, $a^2-12a+32=0$, ($2^x=a$ ধরিয়া)

বা, $a^2-4a-8a+32=0$ বা, $a(a-4)-8(a-4)=0$

বা, $(a-4)(a-8)=0$ $\therefore$ $a=4, 8$

যখন, $a=4$ $\therefore$ $2^x=2^2$ $\therefore$ $x=2$

যখন, $a=8$ $\therefore$ $2^x=2^3$ $\therefore$ $x=3$

উদা. 5. সমাধান কর : $x^y=y^x$, $x^2=y^3$

$x^y=y^x$ বা, $x=y^{\frac{x}{y}}$ $x^2=y^3$ বা, $x=y^{\frac{3}{2}}$

$\therefore$ $y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{3}{2}}$ বা, $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$ বা, $y=\frac{2x}{3}$.

$\therefore$ $x=\left(\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ বা, $x^2=\frac{8x^3}{27}$ বা, $x=\frac{27}{8}$, $y=\frac{9}{4}$

উদা. 6. প্রমাণ কর :

$$(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$$

[C. U. '45]

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})}{x-y}$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})}{x-y}$$

$$=\frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)\cdots\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})}{x-y}$$

এইরূপে শেষ পর্যন্ত গুণ করিয়া পাওয়া যাইবে,

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}})(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}})}{x-y}$$

$$=\frac{(x^{2^{n-1}})^2-(y^{2^{n-1}})^2}{x-y}=\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}$$

Exercise—6

সরল কর (1 হইতে 5) :

1. $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}$

2. $\left(a^{n^2-1}\right)^{\frac{n}{n+1}}\times\frac{\sqrt{a^{2n}}}{a}$ 3. $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q}\div\left(\frac{x^{p+q}}{x^{p-q}}\right)^{\frac{p^2}{q}}$

4. $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{x^{a-b}+1+x^{c-b}}+\frac{1}{x^{a-c}+x^{b-c}+1}$

5. $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{y-x}}\times\left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}$ [S. F. 53]

6. যদি $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$, $c=xy^{r-1}$ তবে দেখাও যে,

$$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$$

7. যদি $a^x=b^y=c^z$ এবং $b^2=ac$ হয়, প্রমাণ কর $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

8. যদি $m=a^x$, $n=a^y$, $a^2=(m^y n^x)^z$ হয়, দেখাও যে $xyz=1$

9. যদি $a=(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}}$ হয়, দেখাও যে, $(a-a^{-1})^3+3(a-a^{-1})+2=0$

10. যদি $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয়, প্রমাণ কর $x^3-6x^2+6x-2=0$ [C. U. '50]

11. যদি $\left(x^{n^2}\right)^n=\left(x^{2^n}\right)^2$, তবে $\sqrt[n+1]{n^3}=2$ প্রমাণ কর।

12. যদি $a\sqrt[3]{x^2}+b\sqrt[3]{x}+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$a^3x^2+b^3x+c^3=3abcx$$

13. যদি $\sqrt{\{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}+\sqrt{\{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2\}}=2a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

14. যদি $x^y=y^x$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$, এবং যদি $x=2y$ হয়, তবে দেখাও যে, $y=2$ [C. U. '49]

নিম্নলিখিত সূচকীয় সমীকরণগুলি সমাধান কর :

15. $4^x+2^{x+2}=96$ (D. B. '47)

16. $2^{x+3}+2^{x+1}=320$

17. $a^{2x-3}=b^{2x-3}$

18. $2^{x+4}+2^{x+1}=144$

19. $ba^{x-2}=ab^{x-2}$

20. $5^{x-2}+5^{1-x}=1\frac{1}{5}$

21. $a^x+b^y=a+b$, $a^{x-1}+b^{y-1}=2$

22. $a^x=x^y$, $a^y=x^x$

23. $3^{x+y}=3^{2x-y}=\sqrt{27}$

24. $a^x=(x+y+z)^y$, $a^y=(x+y+z)^z$, $a^z=(x+y+z)^x$

পঞ্চম অধ্যায়

করণী

(Surds)

তোমরা দশমশ্রেণীর পাঠ্যক্রমেই করণী সম্বন্ধে প্রাথমিক জ্ঞান লাভ করিয়াছ। বর্তমানে এই সম্বন্ধে আরও বিস্তারিত ভাবে জানিবে।

অমেয় সংখ্যা ঃ যদি কোন রাশিকে কোন একটি নির্দিষ্ট এককের সরল গুণিতক বা অংশরূপে প্রকাশ করা না যায়, তবে সেই রাশিকে **অমেয় রাশি** (Incommensurable Number) বলে, অন্যথায় প্রমেয় রাশি (Commensurable Number) বলা হয়। মনে কর, 1 cm. বাহু বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র আছে। সুতরাং উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{2}$ cm. এক্ষেত্রে $\sqrt{2}$ এর মান যে কোন দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করা গেলেও, ইহাকে 1-এর গুণিতক রূপে প্রকাশ করা যায় না। তাই $\sqrt{2}$ কে অমেয় রাশি বলে।

করণী (Surd) ঃ যদি কোন রাশির কোন মূল সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করা না যায়, তবে সেই মূলকে **করণী** (Surd) বা **অমূলদ রাশি** (Irrational Quantity) বলে। যেমন $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{x^2}$ ইহারা করণী। সকল করণীই অমেয়।

মূলদ রাশি (Rational Number) ঃ যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে **মূলদ সংখ্যা** (Rational Number) বলে। যেমন $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ ইত্যাদি মূলদ, কারণ $\sqrt{16}=\frac{4}{1}$, $\sqrt[3]{27}=\frac{3}{1}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$। ইহাদের করণীর আকারে দেখা গেলেও ইহারা মূলতঃ মূলদ।

দ্রষ্টব্য ঃ যে রাশিকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না তাহাকে অমূলদ রাশি বলে। অমূলদ রাশি আর করণীর মধ্যে পার্থক্য নাই। স্মরণ রাখিবে, কোন বীজগণিতীয় রাশি $\sqrt{a}$ কে করণী বলা হইবে। যদিও $a=4$, বা, 9 হইলে ইহা করণী নহে।

শুদ্ধ ও মিশ্র করণী ঃ যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে না, তাহাকে শুদ্ধ করণী (Pure Surd) বলে। যেমন $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি।

আর যে করণীতে কোন মূলদ উৎপাদক থাকে, তাহাকে মিশ্র করণী (Mixed Surd) বলে। যথা $3\sqrt{5}$, $5\sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি।

সরল ও যৌগিক করণী ঃ একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে সরল করণী (Simple Surd) বলে। যেমন $\sqrt{5}$, $3\sqrt{6}$ ইত্যাদি। আর একাধিক করণী যদি

'+' বা '−' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকে, তবে সেই রাশিকে যৌগিক করণী (Compound Surd) বলে। যেমন $\sqrt{3}+3\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-\sqrt{7}$ ইত্যাদি।

দুইটি করণীর বা একটি করণী ও একটি মূলদ সংখ্যার বীজগণিতীয় সমষ্টিকে **দ্বিপদ করণী** (Binomial Surd) বলে। যদি $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $4-3\sqrt{2}$ ইত্যাদি। অনুরূপে $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ কে ত্রিপদ করণী (Trinomial Surd) বলে।

দুই বা ততোধিক করণীর ক্রম একই হইলে তাহাদিগকে সমমূলীয় করণী বলে এবং ক্রম বিভিন্ন হইল, তাহাদের অসমমূলীয় করণী বলে।

করণী-নিরসন (Rationalisation of Surds) :

যদি দুইটি করণী এরূপ হয় যে, উহাদের গুণফল মূলদ, তবে একটি করণীকে অপরটির **করণী নিরসক** বলে এবং প্রক্রিয়াকে **করণী নিরসন** বলে। যেমন $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=2$; সুতরাং $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ কে $(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ দ্বারা গুণ করিয়া মূলদ রাশিতে পরিণত করা হইয়াছে। সুতরাং $(\sqrt{5}-\sqrt{3})$, $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ এর একটি করণী নিরসক উৎপাদক।

দ্বিপদ করণীর নিরসক উৎপাদক (Rationalising Factor of Binomial Surd)

Case I. মনে করি দ্বিপদ করণী $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$ বা, $a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{q}}$

মনে করি $a^{\frac{1}{p}}=x$, $b^{\frac{1}{q}}=y$ এবং p, q এর ল. সা. গু. n। তাহা হইলে x^n এবং y^n উভয়ে মূলদ। সুতরাং x^n-y^n মূলদ।

এখন x^n-y^n, $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য (n এর মান ধনাত্মক যুগ্ম বা অযুগ্ম) এবং $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+y^{n-1})$

সুতরাং করণী নিরসক উৎপাদক $=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots\ldots+y^{n-1}$ এবং করণী নিরসক গুণফল $=x^n-y^n$.

Case II. মনে করি দ্বিপদ করণী $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$ বা, $a^{\frac{1}{p}}+b^{\frac{1}{q}}$

মনে করি, $a^{\frac{1}{q}}=x$, $b^{\frac{1}{p}}=y$ এবং p, q এর ল. সা. গু. n

(a) যদি n যুগ্ম হয় তবে x^n-y^n, $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য এবং $x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$

সুতরাং করণী নিরসক উৎপাদক $=x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots\ldots+xy^{n-2}-y^{n-1}$ এবং করণী নিরসক গুণফল $=x^n-y^n$

(b) যদি n অযুগ্ম হয়, তবে x^n+y^n, $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য এবং $x^n+y^n = (x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$

সুতরাং করণী নিরসক উৎপাদক $=x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}$ এবং করণী নিরসক গুণফল $=x^n+y^n$

উদা. 1. $\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}$ এর করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

এখন $\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}=5^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}$ এবং 2 ও 3 এর ল. সা. গু. $=6$

মনে করি $x=5^{\frac{1}{2}}$ এবং $y=3^{\frac{1}{3}}$।

$\therefore$ x^6 এবং y^6 এবং x^6-y^6 মূলদ এবং তাহাদের মান যথাক্রমে 125, 9 এবং 116।

এখন $x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)$

$\therefore$ $x+y$ অর্থাৎ $\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}$ এর করণী নিরসক উৎপাদক

$$=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5$$

$$=5^{\frac{5}{2}}-25.3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{2}}3^{\frac{2}{3}}-15+5^{\frac{1}{2}}3^{\frac{4}{3}}-3^{\frac{5}{3}}$$

$$=25\sqrt{5}-25\sqrt[3]{3}+5\sqrt{5}.\sqrt[3]{9}-15+3\sqrt[3]{3}.\sqrt{5}-3\sqrt[3]{9}$$

উদা. 2. $\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}$ এর হরের করণী নিরসন করিয়া প্রকাশ কর।

$\sqrt[3]{2}+1=2^{\frac{1}{3}}+1$ এখন 3 এবং 1 এর ল. সা. গু. $=3$

এখন $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$\therefore$ হরের করণী নিরসক উৎপাদক $=(2^{\frac{1}{3}})^2-2^{\frac{1}{3}}.1+1^2=2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালার লব ও হরকে $2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$=\frac{(2^{\frac{1}{3}}-1)(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1)}{(2^{\frac{1}{3}}+1)(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1)}=\frac{2-2.2^{\frac{2}{3}}+2.2^{\frac{1}{3}}-1}{2+1}=\frac{1}{3}(1-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})$$

অনুবন্ধী বা পূরক করণী (Conjugate or Complementary Surd)

দ্বিপদ বিশিষ্ট দুইটি করণীতে যদি পদ দুইটি একই হয় এবং উহাদের মধ্যবর্তী সংযোগ চিহ্নটি পরস্পর বিপরীত (অর্থাৎ একটিতে '+' ও অপরটিতে '−') হয়। তবে একটি করণীকে অপর করণীটির অনুবন্ধী করণী (Conjugate Surd) বা পূরক করণী (Complementary Surd) বলে। যথা, $\sqrt{7}+2\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{7}-2\sqrt{5}$ পরস্পর অনুবন্ধী, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, এবং $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ পরস্পর অনুবন্ধী।

দ্বিপদ করণীর ধর্ম (Properties of Binomial Surds)

(i) একটি দ্বিঘাত করণী কখনও অপর একটি মূলদরাশি এবং দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তর হইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে করি, $\sqrt{a}=b\pm\sqrt{c}$

বর্গ করিয়া, $a=b^2+c\pm 2b\sqrt{c}$ $\quad\therefore\quad \sqrt{c}=\pm\dfrac{a-b^2-c}{2b}$

অর্থাৎ একটি করণী একটি মূলদ রাশির সমান হইল, যাহা অসম্ভব। সুতরাং আমাদের কল্পনা ঠিক নহে। অতএব উপপাদ্যটি সঠিক।

(ii) যদি $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$, হয় যখন a, c মূলদ এবং $\sqrt{b}$ এবং $\sqrt{\ }$ অমূলদ, তবে $a=c$ এবং $b=d$ হইবে।

যদি a, c এর সমান না হয়, মনে করি, $a=c+m$

$\therefore\quad c+\sqrt{d}=a+\sqrt{b}=c+m+\sqrt{b}$

$\therefore\quad \sqrt{d}=m+\sqrt{b}$ বা, $d=m^2+b+2m\sqrt{b}$ (বর্গ করিয়া)

$\therefore\quad \sqrt{b}=\dfrac{d-m^2-b}{2m}$

$\therefore$ একটি করণী অপর একটি মূলদ রাশির সমান হইয়াছে, যাহা অসম্ভব।

$\therefore\quad a=c$ এবং $b=d$

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপে $a-\sqrt{b}=c-\sqrt{d}$ হইলে $a=c$ এবং $b=d$.

ইহা হইতে আমরা বলিতে পারি $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ সমীকরণটি দুইটি পৃথক সমীকরণ $a=c$, $b=d$ এর সমন্বয়ে গঠিত হইয়াছে।

যদি $a+\sqrt{b}=0$ হয়, তবে $a=0$, $b=0$ হইবে।

(iii) যদি $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$ হয়, তবে $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{c}-\sqrt{d}$ হইবে।

এখন $\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$

বর্গ করিয়া, $a+\sqrt{b}=c+d+2\sqrt{cd}$ $\quad\therefore\quad a=c+d,\ \sqrt{b}=2\sqrt{cd}$

$\therefore\quad a-\sqrt{b}=c+d-2\sqrt{cd}=(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2$

$\therefore\quad \sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{c}-\sqrt{d}$

অনুরূপে দেখান যায়, $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{c}-\sqrt{d}$ হইলে

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{c}+\sqrt{d}$

(iv) যদি $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}=c+\sqrt{d}$ হয়, তবে $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=c-\sqrt{d}$ হইবে। প্রমাণ পূর্বের ন্যায়।

দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল (Square root of a Quadratic Surd)

দুইটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টির বর্গ=একটি মূলদ রাশি+একটি করণী

যেমন $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=5+3+2\sqrt{5}.\sqrt{3}=8+2\sqrt{15}$

অনুরূপে, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=a+b+\sqrt{4ab}$

সুতরাং $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ এর বর্গের রূপ $x+\sqrt{y}$; অতএব একটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর $(x+\sqrt{y})$ বর্গমূল $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ আকার বিশিষ্ট।

(i) **পর্যবেক্ষণের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়** (Square root by Inspection)

দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য প্রথমে করণীকে $a+2\sqrt{b}$ আকারে পরিণত করিতে হয়। তারপর এমন দুইটি রাশি নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি $=a$ এবং গুণফল$=b$ হয়।

উদা. 1. বর্গমূল নির্ণয় কর : $8+2\sqrt{15}$

এখানে এমন দুইটি রাশি নির্ণয় করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি 8 এবং গুণফল 15 ; সংখ্যাদ্বয় অবশ্যই 5 ও 3 হইবে।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি$=8+2\sqrt{15}=5+3+2\sqrt{15}$

$=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2+2.\sqrt{5}.\sqrt{3}=(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm(\sqrt{5}+\sqrt{3})$

[যেহেতু প্রত্যেক রাশির দুইটি করিয়া বর্গমূল হয়, সেহেতু প্রাপ্ত বর্গমূলে '±' চিহ্ন বসাইবে।]

(ii) **বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী** (General Method of Finding Square Root.)

$a+\sqrt{b}$ এর বর্গমূল নির্ণয় :

মনে করি, $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

বর্গ করিয়া $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$ $\quad\therefore\ x+y=a\cdots\quad\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$ $\quad$ বা, $4xy=b\cdots\quad\cdots(2)$

$\therefore\ (x-y)^2=(x+y)^2-4xy=a^2-b \quad \therefore\ x-y=\sqrt{(a^2-b)}\ldots(3)$

(1) ও (3) যোগ এবং (1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই,

$x=\frac{1}{2}\{a+\sqrt{a^2-b}\}$, $\quad$ এবং $y=\frac{1}{2}\{a-\sqrt{a^2-b}\}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm[\sqrt{\{\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}\}}+\sqrt{\{\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{(a^2-b)}\}}]$

অনুসিদ্ধান্ত : $a-\sqrt{b}$ এর ক্ষেত্রে $\sqrt{(a-\sqrt{b})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ধরিয়া বর্গমূল নির্ণয় করা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : যদি a^2-b ধনাত্মক পূর্ণবর্গ, এবং a ধনাত্মক হয়, তবে x, y এর মান মূলদ হইবে। কিন্তু a^2-b এর মান ঋণাত্মক হইলে বা পূর্ণবর্গ না হইলে এই পদ্ধতিতে বর্গমূল নির্ণয় সহজ হয় না। সেক্ষেত্রে অন্য পদ্ধতি অনুসরণ করিতে হয়।

উদা. 2. বর্গমূল নির্ণয় কর $14-6\sqrt{5}$

মনে করি $\sqrt{(14-6\sqrt{5})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

বর্গ করিয়া, $14-6\sqrt{5}=x+y-2\sqrt{xy}$ $\quad\therefore\quad x+y=14\cdots\cdots(1)$

এবং $2\sqrt{xy}=6\sqrt{5}$ $\quad$ বা, $4xy=180\cdots\cdots(2)$

এখন $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(14)^2-180=16$

$\therefore\quad x-y=4\cdots\cdots(3)$

(1) এবং (3) যোগ করিয়া পাই, $2x=18$ $\quad$ বা, $x=9$

(1) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই, $2y=10$ $\quad$ বা, $y=5$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{9}-\sqrt{5})=\pm(3-\sqrt{5})$

কয়েকটি উদাহরণ

উদা. 1. যদি $x=\dfrac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হয়,

দেখাও যে, $bx^2-ax+b=0$

Comp. divd. প্রক্রিয়া করিয়া পাই,

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}+\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}-\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}$$

বা, $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{\sqrt{a+2b}}{\sqrt{a-2b}}$ $\quad$ বা, $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\dfrac{a+2b}{a-2b}$ [বর্গ করিয়া]

পুনরায় comp. divd. প্রক্রিয়া করিয়া পাই,

$\dfrac{2(x^2+1)}{4x}=\dfrac{2a}{4b}$ $\quad$ বা, $\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{a}{b}$

$\therefore\quad bx^2-ax+b=0$

উদা. 2. সরল কর : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

উভয় পদের লব ও হরকে $\sqrt{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2+\sqrt{3}+1}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2-\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(3-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+\sqrt{6})+(3+\sqrt{3})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{18}+6\sqrt{2}-\sqrt{6}-\sqrt{18}}{9-3}$$

$$=\frac{12\sqrt{2}-2\sqrt{18}}{6}=\frac{12\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{6}=\frac{6\sqrt{2}}{6}=\sqrt{2}$$

উদা. 3. বর্গমূল নির্ণয় কর : $\frac{1}{2}(3x-2)+\sqrt{2x^2-x-3}$

$\frac{1}{2}(3x-2)+\sqrt{2x^2-x-3}=\frac{1}{2}\{(3x-2)+2\sqrt{(2x-3)(x+1)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(2x-3)+(x+1)+2\sqrt{(2x-3)(x+1)}\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1})^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1})$

উদা 4. বর্গমূল নির্ণয় কর : $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

মনে করি, $\sqrt{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

বর্গ করিয়া, $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$$=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$$

ইহা সঠিক হইবে যদি

$x+y+z=11$, $2\sqrt{xy}=6\sqrt{2}$, $2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$, $2\sqrt{zx}=2\sqrt{6}$

$\therefore\ xy=18,\ yz=12,\ zx=6,\qquad \therefore\ xyz=36$

$\therefore\ x=3,\ y=6,\ z=2$; ইহারা $x+y+z=11$ কে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2})$

উদা. 5. ঘনমূল নির্ণয় কর : $10+6\sqrt{3}$

মনে করি, $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=x+\sqrt{y}\cdots\cdots(1)$

$\therefore \quad \sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=x-\sqrt{y}\cdots\cdots(2)$

(1) ও (2) গুণ করিয়া, $x^2-y=\sqrt[3]{(100-108)}=\sqrt[3]{(-8)}=-2\cdots\cdots(3)$

(1) এর ঘন করিয়া $x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}=10+6\sqrt{3}$

$\therefore \quad x^3+3xy=10\ldots\ldots(4)$

(3) হইতে y এর মান (4) নং-এ বসাই,

$x^3+3x(x^2+2)=10$ বা, $4x^3-4+6x-6=0$

বা, $4(x^3-1)+6(x-1)=0$

বা, $4(x-1)(x^2+x+1)+6(x-1)=0$

$\therefore \quad (x-1)(4x^2+4x+10)=0 \quad \therefore \quad x-1=0 \quad \therefore \quad x=1$

$4x^2+4x+10=0$ হইতে x এর কাল্পনিক মান পাওয়া যাইবে।

$x=1$ ধরিয়া (3) হইতে পাই, $y=3$, $\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=1+\sqrt{3}$

Exercise—7

1. করণী নিরসক উৎপাদক বাহির কর।

(i) $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ (ii) $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

2. হরগুলির করণী নিরসন কর :

(i) $\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{5}+1}$ (ii) $\dfrac{a\sqrt{a+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}$ (iii) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

3. সরল কর : $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$ [B. U]

4. সরল কর : $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3+\sqrt{5})}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$

5. যদি $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ হয়, তবে $2x^4-8x^3-5x^2+26x-28$ এর মান নির্ণয় কর।

6. যদি $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, দেখাও যে,

(i) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{15}{13}$ (ii) $x^4+x^2y^2+y^4=195$

7. যদি $x=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2-b^2}}$ হয়, দেখাও যে,

$$b^2x^2-2a^2x+b^2=0$$

8. নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $7+2\sqrt{10}$ (ii) $4+\sqrt{7}$ (iii) $16-5\sqrt{7}$

(iv) $\sqrt{48}-\sqrt{45}$ (v) $10+2\sqrt{15}+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}$

(vi) $\frac{1}{3}(3x-4)+\frac{2}{3}\sqrt{2x^2-3x-5}$ (vii) $a+b+\sqrt{a^2+2ab}$

(viii) $\sqrt{(y-z)(z-x)}+\sqrt{(z-x)(x-y)}+\sqrt{(x-y)(y-z)}$

(ix) $x+2\sqrt{5x-1-6x^2}$ (x) $1+x^2+\sqrt{1+x^2+x^4}$

9. নিম্নলিখিত রাশিমালাগুলির ঘনমূল নির্ণয় কর :

(i) $7+5\sqrt{2}$ (ii) $22-10\sqrt{7}$ (iii) $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$

10. মান নির্ণয় কর : $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdots}}}$ অসীম পর্যন্ত

11. যদি $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর $(x+y+z)^3=27xyz$

12. যদি $\sqrt{b-c}+\sqrt{c-a}+\sqrt{a-b}=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $a=b=c$

13. প্রমাণ কর : $\sqrt{a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{a^2-2x\sqrt{a^2-x^2}}=2x$

14. মান নির্ণয় কর : $a^6+a^4+a^2+1$ যখন $a=\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

15. যদি $x=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ হয়, তবে $2x^4-8x^3-5x^2+26x-28$-এর মান নির্ণয় কর।

16. যদি $x=z\sqrt{(1-y^2)}+y\sqrt{(1-z^2)}$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)=4x^2y^2z^2$$

ষষ্ঠ অধ্যায়

জটিল রাশি

(Complex Numbers)

কাল্পনিক রাশি (Imaginary Quantity) :

জটিল রাশি সম্বন্ধে বলার পূর্বে কাল্পনিক রাশির সম্বন্ধে কিছু জানা প্রয়োজন, যেহেতু ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশির বর্গ সর্বদাই ধনাত্মক, সুতরাং ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল $\sqrt{-a^2}$-এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে না, অর্থাৎ $\sqrt{-a^2}$-এর মান $+a$ বা, $-a$ কোনটিই হইতে পারে না। এরূপ রাশিকেই **কাল্পনিক রাশি** বলে, যাহা বাস্তব রাশি (real number) অপেক্ষা সম্পূর্ণই পৃথক। ইহার মান কাল্পনিক হইলেও ইহা আক্ষরিক অর্থে কাল্পনিক নয়, ইহার বাস্তব ভিত্তি রহিয়াছে। যথা, $\sqrt{a}$ এমন একটি রাশি যাহাতে $(\sqrt{a})^2=a$, সেরূপ $\sqrt{-a}$ এমন একটি রাশি যাহার $(\sqrt{-a})^2$ $=\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$; অনুরূপভাবে $\sqrt{-1}$ এরূপ একটি রাশি যাহার $(\sqrt{(-1)})^2$ $=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1.$

[বীজগণিতের প্রাথমিক নিয়মাবলী কাল্পনিক রাশির ক্ষেত্রেও সিদ্ধ হইয়া থাকে]

প্রতীক চিহ্ন i এবং ইহার অর্থ (Meaning of the Symbol i) :

যেহেতু $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, সুতরাং আমরা বলিতে পারি $\sqrt{-1}$ এমন একটি গাণিতিক প্রক্রিয়া, যাহা পর পর দুইবার প্রয়োগ করিলে চিহ্নের পরিবর্তন ঘটে। সুতরাং $\sqrt{-1}$ প্রক্রিয়াটি কোন সরলরেখার নির্দিষ্ট দিকে যদি পর পর দুইবার প্রয়োগ করা হয় (অর্থাৎ -1 দ্বারা গুণ করা হয়), তবে সরল রেখাটি প্রাথমিক অবস্থানের ঠিক বিপরীত দিকে ঘুরিয়া যায়, অর্থাৎ উহা দুই সমকোণে আবর্তিত হয়। সুতরাং $\sqrt{-1}$-কে এরূপ একটি প্রক্রিয়া হিসাবে কল্পনা করা যায়, যাহা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এক সমকোণে আবর্তিত করে, সুতরাং $\sqrt{-1}$-এর একটি নির্দিষ্ট অর্থ রহিয়াছে এবং ইহাকে i প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। i প্রক্রিয়াটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে এক সমকোণে আবর্তন সূচীত করে এবং $-i$ প্রক্রিয়া ঘড়ির কাঁটার দিকে এক-সমকোণে আবর্তন সূচিত করে। $\therefore\ \sqrt{-1}=i\quad\therefore\ i^2=-1.$

যেহেতু $(ai)\times(ai)=aaii=a^2i^2=a^2(-1)=-a^2$

$$\therefore\ \sqrt{-a^2}=ai=a\times\sqrt{-1}.$$

সুতরাং একটি কাল্পনিক রাশি, সর্বদাই একটি বাস্তব রাশি এবং $\sqrt{-1}$-এর গুণফল।

(i) $4i+3i=7i$ (ii) $8i-5i=3i$ (iii) $4i\times 3i=12i^2=-12$

(iv) $5i\div 2i=\frac{5}{2}$

i-এর ঘাত (Powers of i)

$i^2=-1$; $i^3=i^2.i=-i$; $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$,

সুতরাং যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়,

$i^{4n}=(i^4)^n=1$, $i^{4n+1}=i^{4n}.i=i$, $i^{4n+2}=i^{4n}.i^2=-1$

$i^{4n+3}=i^{4n}.i^3=-i$

সুতরাং i-এর ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার ঘাতের মান ± 1 এবং $\pm i$

আবার $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{-i^2}{i}=-i$, $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$,

$i^{-3}=i^{-2}.i^{-1}=-1(-i)=i$ $i^{-4}=(i^{-2})^2=(-1)^2=1$;

সুতরাং i-এর ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতের মান ± 1, এবং $\pm i$

জটিল রাশি (Complex Quantity):

যদি এক জোড়া বাস্তব রাশি a ও b কে $a+ib$ এই প্রতীক হিসাবে লেখা হয় তবে তাহাকে **জটিল রাশি** (Complex quantity) বলে। সুতরাং একটি জটিল রাশির একটি বাস্তব অংশ a এবং অপরটি কাল্পনিক অংশ ib থাকে। ইহা সম্পূর্ণরূপে বাস্তব হইবে যদি $b=0$ হয়, এবং সম্পূর্ণ রূপে কাল্পনিক হইবে যদি $a=0$ হয়।

অনুবন্ধী জটিল রাশি (Conjugate Complex Quantity):

যদি দুইটি জটিল রাশির মধ্যে কেবলমাত্র কাল্পনিক অংশ বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয়, তবে একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী জটিল রাশি** বলে। সুতরাং $a+ib$ এবং $a-ib$ পরস্পরের অনুবন্ধী।

জটিল রাশির ধর্ম (Properties of Complex Quantity):

(i) যদি $a+ib=0$, তবে $a=0$, $b=0$

যেহেতু $a+ib=0$ $\therefore a=-ib$ বা, $a^2=i^2b^2=-b^2$ বা, $a^2+b^2=0$

যেহেতু a^2, b^2 উভয়ে ধনাত্মক, সুতরাং তাহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না, যদি, a, b প্রত্যেকে পৃথকভাবে শূন্য হয়। $\therefore a=b=0$

(ii) যদি $a+ib=c+id$ হয় তবে, $a=c$, $b=d$.

$a+ib=c+id$ $\therefore a-c=-i(b-d)$

বর্গ করিয়া $(a-c)^2=-(b-d)^2$ বা, $(a-c)^2+(b-d)^2=0$

যেহেতু $(a-c)^2$, $(b-d)^2$ উভয়ে ধনাত্মক, তাহাদের সমষ্টি কখনও শূন্য হইবে না, যদি না উহারা প্রত্যেকে পৃথকভাবে শূন্য হয়।

$\therefore\ a-c=0$ এবং $b-d=0$ অর্থাৎ $a=c, b=d$

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল রাশির সমষ্টি ও গুণফল উভয়ে বাস্তব।

$a+ib$, $a-ib$ পরস্পরের অনুবন্ধী জটিল রাশি।

ইহাদের সমষ্টি $=(a+ib)+(a-ib)=2a=$ বাস্তব রাশি

ইহাদের গুণফল $=(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2=$ বাস্তব রাশি

(iv) দুইটি জটিল রাশির সমষ্টি ও অন্তর জটিল রাশি হইবে।

মনে করি $a+ib$, $c+id$ দুইটি জটিল রাশি।

$(a+ib)+(c+id)=(a\pm c)\pm i(b\pm d)=A+iB$ (ধরি)

(v) দুই বা ততোধিক জটিল রাশির গুণফল জটিল রাশি হইবে।

মনে করি $a+ib$, $c+id$ দুইটি জটিল রাশি

$\therefore\ (a+ib)(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$
$=A+iB$ (ধরি)

যদি $e+if$ অপর একটি জটিল রাশি হয়, তবে

$(a+ib)(c+id)(e+if)=(A+iB)(e+if)=(Ae-Bf)+i(Af+Be)$
$=C+iD$ (ধরি)

অনুরূপে আরও জটিল রাশি লইয়াও ইহা প্রমাণ করা যাইবে।

(vi) দুইটি জটিল রাশির ভাগফল একটি জটিল রাশি হইবে।

মনে করি, $a+ib$, $c+id$ দুইটি জটিল রাশি

$$\therefore\ \frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2d^2}$$

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i.\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

ইহা অবশ্যই $A+iB$ আকৃতির।

(vii) একটি জটিল রাশির ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতও একটি জটিল রাশি হইবে।

$(a+ib)^2=a^2+i^2b^2+i2ab=(a^2-b^2)+i.2ab$; ইহা $A+iB$ আকৃতির

$(a+ib)^3=a^3+3a^2ib+3ai^2b^2+i^3b^3=(a^3-3ab^2)+i(3a^2b-b^3)$

ইহাও $A+iB$ আকৃতির।

অনুরূপভাবে দেখা যাইবে $a+ib$ এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাত একটি জটিল রাশি হইবে।

(viii) একটি জটিল রাশির যে কোন মূলই একটি জটিল রাশি হইবে।

মনে করি $a+ib$ এর n-তম মূল$=x$

$\therefore \sqrt[n]{a+ib}=x \qquad \therefore a+ib=x^n$

সুতরাং যদি x বাস্তব হয়, x^n বাস্তব হইবে ; কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ সেক্ষেত্রে $b=0$ হইবে। অতএব x একটি জটিল রাশি।

জটিল রাশির বর্গমূল (Square Root of a Complex Quantity)

যেহেতু জটিল রাশির যে কোন মূলই জটিল রাশি, মনে করি

$\sqrt{a+ib}=x+iy$, যখন x, y বাস্তব

বর্গ করিয়া, $a+ib=x^2+i^2y^2+2ixy=x^2-y^2+2ixy$

$\therefore x^2-y^2=a \cdots\cdots(1) \qquad 2xy=b\cdots\cdots(2)$

এখন $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2$

$\therefore x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots(3)$

(3)+(1) করিয়া $2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a \qquad \therefore x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)$

(3)−(1) করিয়া $2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a \qquad \therefore y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)$

$\therefore x=\pm\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}},\ y=\pm\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}$

(2) হইতে ইহা সহজে বুঝা যায় যে xy এর চিহ্ন b-এর অনুরূপ হইবে। সুতরাং যদি b ধনাত্মক হয়, x ও y একই চিহ্নযুক্ত হইবে অর্থাৎ উভয়ে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে। আবার যদি b ঋণাত্মক হয়, x ও y বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হইবে।

সুতরাং b ধনাত্মক হইলে নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}+i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$$

b ঋণাত্মক হইলে নির্ণেয় বর্গমূল

$$=\pm[\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)\}^{\frac{1}{2}}-i\{\tfrac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)\}^{\frac{1}{2}}]$$

সুতরাং জটিল রাশির দুইটি বর্গমূল থাকিবে।

উদা. 1. বর্গমূল নির্ণয় কর : $9-40i$

মনে করি, $\sqrt{9-40i}=x+iy$

$\therefore 9-40i=x^2-y^2+2ixy$ (বর্গ করিয়া)

$\therefore x^2-y^2=9\cdots\cdots(1) \qquad 2xy=-40\cdots\cdots(2)$

$\therefore (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$

$=81+1600=1681=(41)^2$

$\therefore x^2+y^2=41\cdots\cdots(3)$

(1) ও (3) হইতে $x^2=25$ এবং $y^2=16$; $\therefore\ x=\pm 5, y=\pm 4$

যেহেতু xy ঋণাত্মক, সুতরাং x, y বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

উদা. 2. i এবং $-i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

(i) $i=\frac{1}{2}(1+2i-1)=\frac{1}{2}(1+2i+i^2)=\frac{1}{2}(1+i)^2$

$$\therefore\quad \sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

(ii) $-i=\frac{1}{2}(1-2i-1)=\frac{1}{2}(1-2i+i^2)=\frac{1}{2}(1-i)^2$

$$\therefore\quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

জটিল রাশির মডিউলাস (Modulus of a Complex Quantity)

কোন জটিল রাশির বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশের বর্গের সমষ্টির ধনাত্মক বর্গমূলকে ঐ জটিল রাশির **মডিউলাস** (Modulus) বলে।

$a+ib$ এর মডিউলাস $+\sqrt{a^2+b^2}$, $3+4i$ এর মডিউলাস$=\sqrt{3^2+4^2}=5$

মডিউলাসের ধর্ম (Properties of the Modulus)

(i) একটি জটিল রাশি এবং অনুবন্ধী জটিল রাশির মডিউলাস একই হয়।

$a+ib$ এর মডিউলাস$=\sqrt{a^2+b^2}$; অনুবন্ধী জটিল রাশি $a-ib$ এর মডিউলাস $=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$। যেহেতু $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$, সুতরাং পরস্পর অনুবন্ধী দুইটি জটিল রাশির গুণফল, উহাদের যে কোন একটির মডিউলাসের সমান।

(ii) দুইটি জটিল রাশির গুণফলের মডিউলাস, উহাদের মডিউলাসদ্বয়ের গুণফলের সমান।

মনে করি, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি।

$\therefore$ উহাদের গুণফল$=(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$

$\therefore$ উহাদের গুণফলের মডিউলাস

$=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$=(a+ib)$ এর মডিউলাস $\times (c+id)$ এর মডিউলাস

(iii) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউলাস, রাশিদ্বয়ের মডিউলাসের ভাগফলের সমান।

মনে করি, $a+ib$ এবং $c+id$ দুইটি জটিল রাশি।

উহাদের ভাগফল $=\dfrac{a+ib}{c+id}=\dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}=\dfrac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$\therefore$ ভাগফলের মডিউলাস

$$=\sqrt{\left\{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}\right\}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$=\dfrac{(a+ib) \text{ এর মডিউলাস}}{(c+id) \text{ এর মডিউলাস}}$

1 এর ঘনমূল (Cube Roots of Unity)

মনে করি $x=\sqrt[3]{1}$ $\quad\therefore\ x^3=1$ $\quad$ বা, $x^3-1=0$

$\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$ $\quad\therefore$ হয় $x-1=0$ $\quad$ বা, $x=1$

অথবা, $x^2+x+1=0$ $\quad$ বা, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$

$\therefore$ 1-এর তিনটি ঘনমূলের মান 1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

ইহাদের মধ্যে প্রথমটি বাস্তব, অপর তুইটি কাল্পনিক।

1 এর ঘনমূলের ধর্ম (Properties of Cube Roots of Unity)

(i) 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলের প্রত্যেকটি অপরটির বর্গ।

$\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3-2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

$\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}^2=\frac{1}{4}(1-3+2\sqrt{-3})=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$

(ii) 1 এর কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের গুণফল 1, অর্থাৎ যে কোন একটি কাল্পনিক ঘনমূল অপরটির অন্যোন্যক।

$\{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}\}\{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})\}=\frac{1}{4}\{(-1)^2-(\sqrt{-3})^2\}=\frac{1}{4}(1+3)=1$

(iii) 1 এর তিনটি ঘনমূলের সমষ্টি শূন্য।

$1+\frac{1}{2}\{-1+\sqrt{-3}\}+\frac{1}{2}\{-1-\sqrt{-3}\}=1-1=0$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু 1 এর প্রত্যেকটি কাল্পনিক ঘনমূল অপরটির বর্গ। সুতরাং একটি কাল্পনিক ঘনমূলকে ω (ওমেগা) ধরিলে অপরটির মান ω^2 হইবে। সেইজন্য 1 এর তিনটি ঘনমূলকে 1, ω, ω^2 দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore$ (ii) হইতে $\omega.\omega^2=1$ $\quad$ অর্থাৎ $\omega^3=1$

(iii) হইতে $1+\omega+\omega^2=0$

ω-র ঘাত (Powers of ω)

ω-র যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতের মান 1, ω অথবা ω^2 হইবে।

$\therefore \quad \omega^4=\omega^3.\omega=\omega\,; \quad \omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2, \quad \omega^6=(\omega^3)^2=1\,;$ ইত্যাদি

সাধারণভাবে, যদি n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়,

এবং যদি $n=3p$ (p যে কোন পূর্ণসংখ্যা), $\omega^n=\omega^{3p}=(\omega^3)^p=1$

যদি $n=3p+1, \qquad \omega^n=\omega^{3p+1}=\omega^{3p}.\omega=\omega$

যদি $n=3p+2, \qquad \omega^n=\omega^{3p+2}=\omega^{3p}.\omega^2=\omega^2$

সুতরাং $\omega^n=1$, ω অথবা ω^2 যখন $\frac{n}{3}$ এর মান যথাক্রমে 0, 1, 2 হইবে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় ω-র যে কোন ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাতের মান 1, ω অথবা ω^2 হইবে।

উদা. 3. -1 এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

মনে করি, $x=\sqrt[3]{-1}$ বা, $x^3=-1 \quad \therefore \quad x^3+1=0$

$\therefore \quad (x+1)(x^2-x+1)=0 \quad \therefore$ হয়, $x+1=0$ বা, $x=-1$

অথবা, $x^2-x+1=0$ বা, $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $-1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$

উদা. 4. যদি $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$, তবে দেখাও যে, $4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$

$\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ বা, $(a+ib)^{\frac{1}{3}}=x+iy$

উভয় দিকের ঘন করিয়া,

$a+ib=x^3+3x^2.iy+3xi^2y^2+i^3y^3$

বা, $a+ib=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

$\therefore \quad a=x^3-3xy^2$ বা, $\frac{a}{x}=x^2-3y^2 \quad \cdots \quad$ (i)

$b=3x^2y-y^3$ বা, $\frac{b}{y}=3x^2-y^2 \quad \cdots \quad$ (Ii)

(i) ও (ii) যোগ করিয়া

$4x^2-4y^2=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ বা, $4(x^2-y^2)=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$

উদা. 5. প্রমাণ কর $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$

বামপক্ষ $=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3.\omega)(1-\omega^3.\omega^3.\omega^2)$

$=(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$ $[\because \ \omega^3=1]$

$=(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2=\{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2$

$=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2=\{1-(\omega+\omega^2)+1\}^2$

$=\{2-(-1)\}^2=(3)^2=9$ $[\because \ 1+\omega+\omega^2=0$

$\therefore \ \omega+\omega^2=-1]$

উদা. 6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ [C. U. '30]

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=a^2+b^2\omega^3+c^2\omega^3+ab(\omega+\omega^2)+bc(\omega^4+\omega^2)+ca(\omega+\omega^2)$

$=a(a+\omega^2b+\omega c)+\omega b(a+\omega^2b+\omega c)+\omega^2c(a+\omega^2b+\omega c)$

$=(a+\omega^2b+\omega c)(a+\omega b+\omega^2c)$

Exercise—8

1. নিম্নলিখিতগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর :

(i) $8+6i$ (ii) $-33+56i$ (iii) $5-12i$

(iv) $-2i$ (v) $a^2-1-2ia$ (vi) $-2+2\sqrt{-3}$

(vii) $\dfrac{2-36i}{2+3i}$ (viii) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{i}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2$

2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $a+b$ (ii) a^2+b^2 (iii) a^2-ab+b^2

(iv) $a^3+b^3+c^3-3abc$

3. দেখাও যে,

(i) $\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1+i)^2-(1-i)^2}=0$ (ii) $\dfrac{1+2i+3i^2}{1-2i+3i^2}=-i$

(iii) $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}$ (iv) $(3+4i)^{-\frac{1}{2}}+(3-4i)^{-\frac{1}{2}}=$

(v) $(2+i)^{-2}+(2-i)^{-2}=\frac{6}{25}$

(vi) $\{\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\}^{15}+\{\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})\}^{15}=2$

4. নিম্নলিখিতগুলির মূলদ হরবিশিষ্ট কর :

(i) $\frac{3+\sqrt{5}i}{2-\sqrt{3}i}$ (ii) $\frac{1}{4-\sqrt{-3}}$ (iii) $\frac{2-5i}{4+3i}-\frac{2+5i}{4-3i}$

(iv) $\frac{x+iy}{x-iy}-\frac{x-iy}{x+iy}$

5. নিম্নলিখিতগুলিকে A+iB আকারে প্রকাশ কর :

(i) $\frac{a+ib}{c+id}$ (ii) $\frac{3+4i}{4-3i}$ (iii) $\frac{(2-i)^2}{2-3i}$ [U. U. '48]

(iv) $\frac{1+i}{1-i}$ (v) $\frac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ (vi) $(2+i)(3+2i)(4+3i)$

6. নিম্নলিখিতগুলির মডিউলাস বাহির কর :

i) $-4+3i$ (ii) $12+5i$ (iii) $\frac{3+4i}{12-5i}$

(iv) $\frac{(3+i)(1+2i)}{(2-i)(2+3i)}$ (v) $(4-3i)(5+12i)$

7. 1-এর চতুর্থ মূলগুলি বাহির কর।

8. যদি $x=3+2i$ হয়, দেখাও যে,

$$x^4-4x^3+4x^2+8x+39=0$$

9. যদি $a=4+3i$, $b=4-3i$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$a^2+ab+b^2=39$$

10. দেখাও যে x-এর একটি বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ কে সিদ্ধ করিবে, যদি $a^2+b^2=1$ হয়। [C. U. '33]

11. যদি $\frac{a+ib}{c+id}=x+iy$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{a-ib}{c-id}=x-iy$

12. যদি $\sqrt[3]{a+ib}=x+iy$ হয়, তবে $\sqrt[3]{a-ib}=x-iy$ হইবে প্রমাণ কর।

13. যদি $\alpha=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ এবং $\beta=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ হয়, তবে দেখাও যে, $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=0$

14. প্রমাণ কর :

(i) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$

(ii) $(1-\omega+\omega^2)^4+(1+\omega-\omega^2)^4=-16$

(iii) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)=9$ [P. U. '46]

(iv) $(\omega a+\omega^2 b)(\omega^2 a+\omega b)=a^2-ab+b^2$ [C. U. '29]

(v) $(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0$

(vi) $\dfrac{a+\omega b+\omega^2 c}{b+\omega c+\omega^2 a}=\omega.$

15. যদি $x=a+b$, $y=a+b\omega$, $z=a+b\omega^2$, দেখাও যে,
$$x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$$ [P. U. '43]

16. দেখাও যে, $(x+y\omega+z\omega^2)^2+(x\omega+y\omega^2+z)^2 + (x\omega^2+y+z\omega)^2=0$ হয়

17. যদি $\omega=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হয়, তবে
$(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)(1-\omega^2+\omega^{16})$-এর মান নির্ণয় কর।

18. প্রমাণ কর, $(a+b\omega+c\omega^2)^3+(a+b\omega^2+c\omega)^3$
$$=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$$
এবং $=27abc$ যদি $a+b+c=0$ হয়।

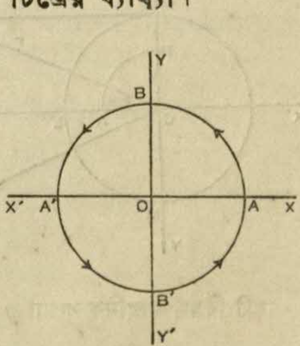
19. $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)$ কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

20. প্রমাণ কর $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n=2$, যদি n, 3-এর কোন গুণিতক হয় এবং $=-1$, যদি n, অপর যে কোন পূর্ণসংখ্যা হয়। [P. U.]

21. যদি $x+iy=\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$ হয়, যখন $i=\sqrt{-1}$, তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '62]

কাল্পনিক রাশি $i=\sqrt{-1}$ এর জ্যামিতিক চিত্রের ব্যাখ্যা।

মনে করি, XOX′ এবং YOY′ পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুকে মূলবিন্দু XOX′ কে x-অক্ষ এবং YOY′ কে y-অক্ষ বলে।



Oকে কেন্দ্র করিয়া 1 একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করি যাহা x-অক্ষকে A ও A′ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে B ও B′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন যদি বাস্তব সংখ্যাগুলিকে x অক্ষের (বাস্তব অক্ষ) উপর বিভিন্ন বিন্দু দ্বারা

প্রকাশ করা হয়, তবে A বিন্দু $+1$ কে এবং A′ বিন্দু -1 কে সূচীত করিবে (কারণ A বিন্দু ধনাত্মক দিকে A′ বিন্দু ঋণাত্মক দিকে আছে)।

এখন যেহেতু $1\times(-1)=-1$ এবং $\angle AOA'=2$ সমকোণ সুতরাং -1 এমন একটি প্রক্রিয়া যাহা OA দৈর্ঘ্যকে 2 সমকোণে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (ধনাত্মক) আবর্তিত করিয়াছে কিন্তু মানের কোন পরিবর্তন ঘটে নাই।

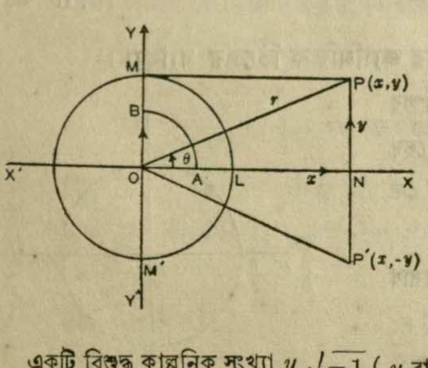
আবার $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=1$; সুতরাং $\sqrt{-1}$ এমন একটি প্রক্রিয়া যাহা OA দৈর্ঘ্যকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (ধনাত্মক দিকে) এক সমকোণে আবর্তন করিয়াছে, এবং A বিন্দুকে B অবস্থানে আনিয়াছে। সুতরাং B বিন্দু $+\sqrt{-1}$ সংখ্যাকে প্রকাশ করে।

আবার যেহেতু $(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}$, সুতরাং OA-র উপর $-\sqrt{-1}$ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করিয়া A বিন্দুকে OY′ এর উপর B′ বিন্দুতে তিন সমকোণে আবর্তন করিয়া আনা যায় এবং B′ বিন্দু $-\sqrt{-1}$ সংখ্যাকে প্রকাশ করে।

সুতরাং আমরা বলিতে পারি YOY′ এর উপর বিন্দুগুলি কাল্পনিক সংখ্যা সূচীত করিবে এবং সেইজন্য y-অক্ষকে কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়।

জটিল রাশির জ্যামিতিক উপস্থাপন (Geometrical Representation of Complex Quantity).

যে কোন বাস্তব রাশিকে জ্যামিতিক আকারে প্রকাশ করিতে একটি স্থির বিন্দু O (মূলবিন্দু) সহ একটি বাস্তব অক্ষ XOX′ লওয়া হয়। O বিন্দু 0 (শূন্য) সংখ্যাকে সূচিত করে OX ধনাত্মক এবং OX′ ঋণাত্মক সংখ্যা সূচিত করে।



যদি A এবং N, X′OX এর উপর এরূপ দুইটি সংখ্যা হয়, যাহাতে OA=1, (ON/OA) $=x$ হয়, তাহা হইলে N বিন্দু বাস্তব সংখ্যা x কে সূচিত করিবে। যদি x ঋণাত্মক হয়, তবে N বিন্দু OX′ এর উপর অবস্থান করিবে।

একটি বিশুদ্ধ কাল্পনিক সংখ্যা $y\sqrt{-1}$ (y বাস্তব) কে প্রকাশ করিবার জন্য O বিন্দু দিয়া XOX′ এর সহিত লম্ব YOY′ সরলরেখা টানি (YOY′ কে y-অক্ষ বা কাল্পনিক অক্ষ বলা হয়)। ইহার উপর B ও M এরূপ দুইটি বিন্দু লওয়া হইল, যাহাতে OB=

OA=1 এবং (OM/OB)=y. তাহা হইলে M বিন্দু বিশুদ্ধ কাল্পনিক রাশি $y\sqrt{-1}$ কে সূচিত করিবে। অনুরূপে OY′ এর উপর M বিন্দু (OM′=OM), $-y\sqrt{-1}$ কে সূচিত করিবে।

$x+iy$ আকৃতির কোন জটিল রাশিকে জ্যামিতিক প্রকাশের জন্য একটি সমতলের প্রয়োজন যাহাতে XOX′ এবং YOY′ পরস্পর লম্ব দুইটি অক্ষ। (এখানে x, y বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$)। সুতরাং একটি জটিল রাশি $z=x+iy$ দেওয়া আছে, যদি ঐ সমতলে এরূপ একটি বিন্দু P দেওয়া থাকে যাহার cartesian স্থানাঙ্ক (x, y) এবং Polar স্থানাঙ্ক (r, θ)। তাহা হইলে P বিন্দু z সংখ্যাকে সঠিক ভাবে সূচিত করিবে এবং উহাকে z বিন্দু বলা হইবে, উহা যাহাকে জ্যামিতিক প্রকাশ করিবে।

আর্গাণ্ড চিত্র এবং z-তল (Argand Diagram and z-plane).

বাস্তব ও কাল্পনিক অক্ষ সহ যে তলে জটিল রাশি z-কে জ্যামিতিক চিত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়, সেই চিত্রকে **আর্গাণ্ড চিত্র** বলে এবং ঐ তলকে z-তল বলে।

অনুবন্ধী জটিল রাশি (Conjugate Complex Number)

$x-iy$ কে $x+iy$ এর অনুবন্ধী জটিল রাশি বলে। উপরের চিত্রে PN কে P′ পর্যন্ত এরূপ ভাবে বর্ধিত করা হইল যে NP′=NP ; তাহা হইলে P′ বিন্দু যে জটিল রাশি z' কে প্রকাশ করিবে তাহাই $x+iy$ এর অনুবন্ধী, অর্থাৎ $z'=x-iy$। সুতরাং কোন জটিল রাশির অনুবন্ধী বাস্তব অক্ষের সাপেক্ষে উহার প্রতিবিম্ব (image) হইবে।

z=x+iy এর মডিউলাস এবং এমপ্লিচুড

উপরের চিত্রে যদি r=OP এবং $\theta=\angle$XOP (ধনাত্মক দিকে মাপা) হয়, তবে $r=+\sqrt{x^2+y^2}$, z এর মডিউলাস বলে এবং উহাকে mod z বা $|z|$ আকারে লেখা হয় এবং θ কোণকে z এর এম্প্লিচুড (Amplitude) বা আর্গুমেন্ট (Argument) বলে এবং উহাকে amp. z আকারে লেখা হয়।

দ্রষ্টব্য : উপরের চিত্র হইতে $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, সুতরাং $z\equiv x+iy$ $=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

জটিল রাশির সমষ্টি, অন্তর, গুণ এবং ভাগকেও বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সপ্তম অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব

(Theory of Quadratic Equation)

তোমরা দশম শ্রেণীর পাঠক্রমেই দ্বিঘাত সমীকরণ এবং সমীকরণ ও অভেদের মধ্যে পার্থক্য সম্বন্ধে জানিয়াছ। বর্তমানে দ্বিঘাত সমীকরণের বিভিন্ন তত্ত্ব সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ ও উহার বীজ (Quadratic Equation and its Roots)

$ax^2+bx+c=0$ কে সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ বলে, যখন a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$; ইহাকে সমাধান করিয়া x এর যে দুইটি মান পাওয়া যায়, তাহারা হইল $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$। x-এর মানকে সমীকরণের **বীজ** (root) বলে। x-এর মান প্রদত্ত সমীকরণে বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় অর্থাৎ সমীকরণের উভয় পক্ষের মান সমান হয়।

উপপাদ্য : কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি বীজ থাকিবে (A quadratic equation has two and only two Roots.)

মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের α একটি বীজ ; x এর পরিবর্তে সমীকরণে α বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore \ a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad \therefore \ c=-(a\alpha^2+b\alpha)$$

$$\therefore \ ax^2+bx+c=ax^2+bx-a\alpha^2-b\alpha=a(x^2-\alpha^2)+b(x-\alpha)$$

$$=(x-\alpha)\{a(x+\alpha)+b\} \cdots\cdots \text{(i)}$$

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ α-র সাপেক্ষে, সমীকরণের $x-\alpha$ একটি উৎপাদক হইবে।

(i) ইহা হইতে সহজে বুঝা যায় যে ax^2+bx+c এর দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি $x-\alpha$ আকৃতির উৎপাদক থাকিবে (বাস্তব অথবা কাল্পনিক, পৃথক অথবা সমাপতিত)। সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি উৎপাদক থাকিবে।

উপপাদ্য : কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশী ভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না (A quadratic equation cannot have more than two different roots).

মনে করি, যদি সম্ভব হয়, $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ সমীকরণের α, β, γ তিনটি ভিন্ন বীজ রহিয়াছে অর্থাৎ $\alpha\neq\beta\neq\gamma$। সুতরাং α, β, γ সমীকরণকে সিদ্ধ করিবে।

$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots(1),$

$a\beta^2+b\beta+c=0 \cdots\cdots(2)$

$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \cdots\cdots(3)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই, $a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$

বা, $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$ যেহেতু $\alpha\neq\beta$, $\therefore \alpha-\beta\neq 0$

$\therefore \quad a(\alpha+\beta)+b=0 \cdots\cdots(4)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই, $a(\beta^2-\gamma^2)+b(\beta-\gamma)=0$

$\therefore \quad (\beta-\gamma)\{a(\beta+\gamma)+b\}=0$, যেহেতু $\beta\neq\gamma$, $\beta-\gamma\neq 0$

$\therefore \quad a(\beta+\gamma)+b=0 \cdots\cdots(5)$

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া পাই, $a(\alpha-\gamma)=0 \cdots\cdots(6)$

কিন্তু ইহা হইতে পারে না ; কারণ $a\neq 0$, $\alpha-\gamma\neq 0$; সুতরাং পূর্বে যাহা কল্পনা করা হইয়াছে তাহা ঠিক নহে। অতএব দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটির বেশী ভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

দ্রষ্টব্য : যদি আমরা কল্পনা করি $ax^2+bx+c=0$, x-এর তিনটি ভিন্ন মান α, β, γ দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে (6) হইতে $a=0$ কারণ $\alpha\neq\gamma$; সুতরাং (5) হইতে $b=0$ এবং (3) হইতে $c=0$. সুতরাং সমীকরণটি $0.x^2+0.x+0=0$ হইবে অর্থাৎ x-এর যে কোন মানে 0 হইবে। অতএব উহা অভেদে পরিণত হইবে।

অনুবন্ধী বীজ (Conjugate Roots)

(i) মূলদ সহগ বিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের $\alpha+\sqrt{\beta}$ একটি অমূলদ বীজ হইলে, $\alpha-\sqrt{\beta}$ উহার অনুবন্ধী বীজ হইবে।

মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের $\alpha+\sqrt{\beta}$ একটি বীজ।

$\therefore \quad a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c=0$

বা, $(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)+\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)=0$

$\therefore \quad a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c=0 \cdots(1)$ এবং $2a\alpha+b=0 \cdots(2)$

এখন $ax^2+bx+c=0$ এর বামপক্ষে x-এর পরিবর্তে $\alpha-\sqrt{\beta}$ বসাইয়া পাই,

$$a(\alpha-\sqrt{\beta})^2+b(\alpha-\sqrt{\beta})+c=(a\alpha^2+a\beta+b\alpha+c)-\sqrt{\beta}(2a\alpha+b)$$

$$=0-\sqrt{\beta}.0=0 \qquad [\text{(1) ও (2) হইতে}]$$

$\therefore \quad \alpha-\sqrt{\beta}$, $ax^2+bx+c=0$ এর অপর বীজ।

(ii) বাস্তব সহগ বিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের $\alpha+i\beta$ একটি কাল্পনিক বীজ হইলে, $\alpha-i\beta$ উহার অনুবন্ধী বীজ হইবে।

মনে করি $\alpha+i\beta$, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি কাল্পনিক বীজ।

$\therefore\ a(\alpha+i\beta)^2+b(\alpha+i\beta)+c=0$

বা, $(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)+i(2a\alpha\beta+b\beta)=0$

$\therefore\ a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c=0\cdots(1),\quad 2a\alpha\beta+b\beta=0\cdots(2)$

এখন $ax^2+bx+c=0$ এর বামপক্ষে x-এর পরিবর্তে $\alpha-i\beta$ বসাইয়া পাই,

$a(\alpha-i\beta)^2+b(\alpha-i\beta)+c=(a\alpha^2-a\beta^2+b\alpha+c)-i(2a\alpha\beta+b\beta)$
$=0-i.0=0$ [(1) ও (2) হইতে]

$\therefore\ \alpha-i\beta$, $ax^2+bx+c=0$ এর অপর বীজ।

সমীকরণের বীজ ও সহগ-এর মধ্যে সম্পর্ক (Relation between the Roots and Co-efficients)

মনে করি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β ;

আবার ধরি, $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি, $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$$

বীজদ্বয়ের গুণফল $\alpha\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{(-b)^2-\sqrt{(b^2-4ac)^2}}{4a^2}$$

$$\therefore\ \alpha\beta=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=\dfrac{c}{a}=\dfrac{x\text{ বর্জিত পদ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$।

বীজ হইতে সমীকরণ নির্ণয় (Formation of Equation from its roots) :

$ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α, β $\therefore$ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

সমীকরণের উভয়পক্ষকে a ($\neq 0$) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad \text{বা,} \quad x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

বা, $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\therefore$ x^2-(বীজদ্বয়ের সমষ্টি) $x+$বীজদ্বয়ের গুণফল$=0$

$\therefore$ এই সূত্রের সাহায্যে সমীকরণের বীজদ্বয় হইতে সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. যদি $\alpha, \beta, ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ হয় তবে $\alpha^3+\beta^3$ এর মান নির্ণয় কর।

যেহেতু α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ,

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

এখন $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3.\frac{c}{a}.\left(-\frac{b}{a}\right)$

$$=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

উদা. 2. যদি α, β, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজ হয় তবে,
$\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 41]

এখানে $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

$$\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)=\alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\frac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$$

$$=\frac{\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta}+\frac{\beta^2(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha}=(\alpha^2-\beta^2)\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{-p(p^2-4q)(p^2-q)}{q}=\frac{p}{q}(p^2-4q)(q-p^2)$$

উদা. 3. α, β, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজ হইলে যে সমীকরণের বীজ $(\alpha-\beta)^2$ এবং $(\alpha+\beta)^2$ তাহা বাহির কর। [C. U. '38]

এখানে $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$

$$=2\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=2(p^2-2q)$$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}(\alpha+\beta)^2$

$$=(p^2-4q)p^2=(p^4-4p^2q)$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2-($ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $)x+($ বীজদ্বয়ের গুণফল $)=0$

$$\therefore\ x^2-2(p^2-2q)x+p^4-4p^2q=0$$

উদা. 4. যে সমীকরণের একটি বীজ $7-\sqrt{-5}$, তাহা বাহির কর।

সমীকরণের অপর বীজ $7+\sqrt{-5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=7-\sqrt{-5}+7+\sqrt{-5}=14$

বীজদ্বয়ের গুণফল $=(7-\sqrt{-5})(7+\sqrt{-5})=49+5=54$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-14x+54=0$

উদা. 5. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির বর্গ হইলে প্রমাণ কর, $p(p^2-3q)+q(1+q)=0$

মনে করি একটি বীজ α, সুতরাং অপর বীজ α^2

$$\therefore\ \alpha+\alpha^2=-p, \quad \alpha.\alpha^2=q \quad \text{বা,}\ \alpha^3=q$$

এখন $(\alpha+\alpha^2)^3=\alpha^3+(\alpha^2)^3+3.\alpha.\alpha^2(\alpha+\alpha^2)$

$$=\alpha^3+(\alpha^3)^2+3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)$$

বা, $(-p)^3=q+q^2+3q(-p)$ বা, $p^3-3pq+q+q^2=0$

বা, $p(p^2-3q)+q(1+q)=0$

উদা. 6. $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $3:4$ হইলে, প্রমাণ কর $12b^2=49ac$

যেহেতু বীজদ্বয়ের অনুপাত $3:4$, মনে করি বীজদ্বয় 3α ও 4α

$$\therefore\ 3\alpha+4\alpha=\frac{b}{a} \quad \text{বা,}\ 7\alpha=\frac{b}{a} \quad \text{এবং}\ 3\alpha.4\alpha=\frac{c}{a} \quad \text{বা,}\ 12\alpha^2=\frac{c}{a}$$

$$\text{এখন}\ 7\alpha=\frac{b}{a} \quad \therefore\ \alpha=\frac{b}{7a} \quad \therefore\ 12\left(\frac{b}{7a}\right)^2=\frac{c}{a} \quad \text{বা,}\ \frac{12b^2}{49a^2}=\frac{c}{a}$$

বা, $12b^2=49ac$

উদা. 7. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত r হইলে, দেখাও যে, $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$ [C. U. '34]

মনে করি একটি বীজ α, সুতরাং অপর বীজ $r\alpha$

$$\therefore \quad \alpha+r\alpha=-\frac{b}{a} \quad \text{বা,} \quad \alpha(1+r)=-\frac{b}{a} \quad \therefore \quad \alpha=\frac{-b}{a(1+r)} \cdots(1)$$

$$\text{এবং } \alpha.r\alpha=\frac{c}{a} \quad \text{বা,} \quad \alpha^2 r=\frac{c}{a} \quad \text{বা,} \quad \alpha^2=\frac{c}{ar}$$

$$(1) \text{ ও } (2) \text{ হইতে } \left\{-\frac{b}{a(1+r)}\right\}^2=\frac{c}{ar} \quad \text{বা,} \quad \frac{b^2}{a^2(r+1)^2}=\frac{c}{ar}$$

$$\therefore \quad \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$$

উদা. 8. $ax^2+cx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $p:q$ হইলে প্রমাণ কর. $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{c}{a}}=0$

মনে করি বীজদ্বয় α, β; $\therefore \ \alpha+\beta=-\frac{c}{a}, \ \alpha\beta=\frac{c}{a} \ \therefore \ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}$

$$\text{বাম পক্ষ}=\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{-\frac{c}{a}+\frac{c}{a}}{\sqrt{\alpha\beta}}=0$$

উদা. 9. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত, $x^2+rx+s=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হইলে প্রমাণ কর $p^2s=r^2q$

মনে করি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β, $\therefore \alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$

এবং $x^2+rx+s=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় γ, δ, $\therefore \ \gamma+\delta=-r, \gamma\delta=s$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \quad \therefore \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ [Comp. divd. করিয়া]

$$\therefore \quad \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}}=\frac{\gamma+\delta}{\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}} \quad \text{বা,} \quad \frac{-p}{\sqrt{p^2-4q}}=\frac{-r}{\sqrt{r^2-4s}}$$

বর্গ করিয়া $\frac{p^2}{p^2-4q}=\frac{r^2}{r^2-4s}$ বা, $p^2r^2-4p^2s=p^2r^2-4r^2q$

বা, $p^2s=r^2q$

উদা. 10. যদি $x^2+2px+q=0$ এবং $x^2+2qx+p=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের মধ্যে কেবলমাত্র একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, তবে প্রমাণ কর $p+q+1=0$ [C. U. '44]

মনে করি, $x^2+2px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β ;

$\therefore\ \alpha+\beta=-2p\cdots(1)\quad \alpha\beta=q\cdots(2)$

এবং $x^2+2qx+p=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha+k, \beta+k$ ($k=$ ধ্রুবক)

$\therefore\ \alpha+k+\beta+k=-2q$ বা, $\alpha+\beta+2k=-2q\cdots(3)$

$\therefore\ (\alpha+k)(\beta+k)=p\cdots(4)$

(1) ও (3) হইতে $-2p+2k=-2q$ বা, $k=p-q\cdots(5)$

(4) হইতে $\alpha\beta+k(\alpha+\beta)+k^2=p$

(1), (2) ও (5) হইতে $q+(p-q)(-2p)+(p-q)^2=p$

বা, $q-2p^2+2pq+p^2-2pq+q^2-p=0$ বা, $q^2-p^2+q-p=0$

বা, $(q+p)(q-p)+1(q-p)=0$ বা, $(q-p)(p+q+1)=0$

$\therefore\ p+q+1=0$

উদা. 11. যদি $ax^2+2bx+c=0$, সমীকরণের বীজ α, β এবং $Ax^2+2Bx+C=0$, সমীকরণের বীজ $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2$

$ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজ α, β,

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{2b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots(1)$

$Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের বীজ $\alpha+\delta, \beta+\delta$,

$\therefore\ \alpha+\delta+\beta+\delta=-\frac{2B}{A}$ বা, $\alpha+\beta+2\delta=-\frac{2B}{A}$,

$(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\frac{C}{A}\cdots(2)$

এখন $\alpha-\beta=(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\quad \therefore\ (\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\}^2$

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\{(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)\}^2-4(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

বা, $\left(-\frac{2b}{a}\right)^2-4\left(\frac{c}{a}\right)=\left(-\frac{2B}{A}\right)^2-4\left(\frac{C}{A}\right)$ [(1) ও (2) হইতে]

বা, $\frac{4b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}=\frac{4B^2}{A^2}-\frac{4C}{A}$ বা, $\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}$

$\therefore \frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2$

উদা. 12. যদি $a\neq b$ কিন্তু $a^2=5a-3$ ও $b^2=5b-3$ হয়, তবে এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার বীজ হইবে $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$ [C. U. '50]

যেহেতু $a\neq b$, কিন্তু $a^2=5a-3$ এবং $b^2=5b-3$, স্থতরাং ইহা হইতে বুঝা যায় যে, $x^2=5x-3$ বা, $x^2-5x+3=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় a ও b.

$\therefore a+b=5, \quad ab=3$

নির্ণেয় সমীকরণেঃ বীজদ্বয় $\frac{a}{b}$ ও $\frac{b}{a}$

ইহাদের সমষ্টি $=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{25-6}{3}=\frac{19}{3}$

ইহাদের গুণফল $=\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-\frac{19}{3}x+1=0$ বা, $3x^2-19x+3=0$

Exercise—9

1. প্রমাণ কর নিম্নলিখিতগুলি অভেদ, সমীকরণ নহে :

(i) $(x^2-a)(b-a)+(x^2-b)(a-b)=(a-b)^2$

(ii) $(x-a)^2+(x-b)^2=x(x-a)+x(x-b)+a(a-x)+b(b-x)$

2. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে নিম্নের রাশিগুলির মান a, b, c দ্বারা প্রকাশ কর :

(i) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ (ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha^4}{\beta^2}+\frac{\beta^4}{\alpha^2}$

(iv) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ (v) $\frac{1}{a\alpha-b}+\frac{1}{a\beta-b}$

3. $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে নিম্নের রাশিগুলির মান p, q দ্বারা প্রকাশ কর :

(i) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ (ii) $\alpha^3\beta^{-1}+\beta^3\alpha^{-1}$ (iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$

(iv) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$ [C. U. '41]

(v) $(\alpha+p)^{-4}+(\beta+p)^{-4}$

4. যে সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নরূপ, সেই সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $5, -7$ (ii) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ (iii) $(a+1)^2, (a-1)^2$

5. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হইলে, যে সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নরূপ তাহা নির্ণয় কর :

(i) α^2 এবং β^2 [C. U. '33] (ii) $\alpha\beta^{-1}$ এবং $\beta\alpha^{-1}$ [C. U. '36]

(iii) $\alpha+\beta^{-1}$ এবং $\beta+\alpha^{-1}$ [C. U. '39]

(iv) $\dfrac{1}{a\alpha+b}$ এবং $\dfrac{1}{a\beta+b}$

6. $x^2+7x+12=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় p এবং q ; যে সমীকরণের বীজদ্বয় $(p+q)^2$ এবং $(p-q)^2$ তাহা নির্ণয় কর। [C. U. '45]

7. এরূপ একটি সমীকরণ নির্ণয় কর যাহার α, β বীজদ্বয় নিম্নের সম্পর্কদ্বয়কে সিদ্ধ করিবে। $\alpha\beta=384$, $\alpha^2-\beta^2=320$

8. যে সমীকরণের একটি বীজ (i) $5-\sqrt{3}$ অথবা (ii) $-3+2\sqrt{-5}$; সেই সমীকরণদ্বয় বাহির কর।

9. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির চারগুণ হইলে প্রমাণ কর $4b^2=25ac$.

10. $q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের আকারে প্রকাশ কর।

11. যদি $lx^2+mx+m=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $p : q$ হয়, তবে প্রমাণ কর $\sqrt{\dfrac{p}{q}}+\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt{\dfrac{m}{l}}=0.$ [C. U. '48]

12. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হয়, তবে প্রমাণ কর $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ ও $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$ বীজবিশিষ্ট সমীকরণটি হইবে $bcx^2+(b^2+ac)x+ab=0.$

[H. S. '65]

13. যদি $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় p, q হয়, তবে $p+q$ এবং $\frac{1}{2}pq$ বীজবিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [C. U. '19]

14. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি উহাদের বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রমাণ কর $2ac=ab+b^2$

15. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $m:n$ হইলে প্রমাণ কর যে $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}=\sqrt{\frac{b^2}{ac}}$. [U. P. '58]

16. এমন একটি সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার বীজগুলি $px^2+qx+r=0$ সমীকরণের বীজগুলির অন্যোন্যক।

17. যদি α ও β, $x^2-(1+R^2)x+\frac{1}{2}(1+R^2+R^4)=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর $\alpha^2+\beta^2=R^2$. [C. U. '09]

18. প্রমাণ কর $x^2-2ax+b^2=0$ এর বীজদ্বয়ের সমান্তরীয় মধ্যক, $x^2-2bx+a^2=0$ এর বীজদ্বয়ের গুণোত্তরীয় মধ্যকের সমান এবং বিপরীতক্রমেও ইহা সত্য। [C. U. '52]

19. $x^2+px+q=0$ আকারের কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x বর্জিত পদটি 48 এর স্থানে 45 ভুল ছাপা হওয়ায় উহার বীজদ্বয় 5 ও 9 হইয়াছে। শুদ্ধ সমীকরণের বীজদ্বয় নির্ণয় কর।

20. $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্তর 1 হইলে প্রমাণ কর $p^2+4q^2=(1+2q)^2$. [A. U. '17]

21. $x^2-px+q=0$ এর বীজদ্বয়ের অন্তর ও $x^2-qx+p=0$ এর বীজদ্বয়ের অন্তর একই হইলে এবং $p\neq q$ হইলে প্রমাণ কর $p+q+4=0$.

22. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ অপরটির বর্গ হয়, তবে প্রমাণ কর $b^3+ac^2+a^2c=3abc$. [U. P. '53]

23. যদি α, β এবং γ, δ যথাক্রমে $x^2+px-r=0$ এবং $x^2+px+r=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)=(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$.

24. যদি α, β ও γ, δ যথাক্রমে $x^2-2ax+b^2=0$ এবং $x^2-2cx+d^2=0$ সমীকরণের বীজ হয় এবং $\alpha\delta=\beta\gamma$ হয়, তবে প্রমাণ কর $a^2d^2=b^2c^2$.

25. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজগুলির পার্থক্য কোন ধ্রুবক হয়, তবে প্রমাণ কর, $\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{b'^2-4a'c'}{a'^2}$.

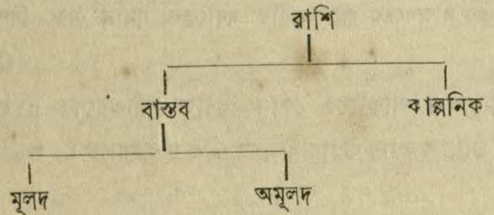
26. $ax^2+bx+c=0$ ও $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের একই অনুপাত হইলে প্রমাণ কর $b^2 : b_1^2 :: ac : a_1c_1$.

27. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের α, β বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণের $\alpha\beta^{-1}$ একটি বীজ হইবে। [C. U. '31]

28. যদি $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণের α একটি বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর $4\alpha^3-3\alpha$ ইহার অপর বীজ।

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি (Nature of the Roots of the Quadratic Equation)

$ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান না করিয়াই সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি সম্বন্ধে জানা যায়। এখানে a, b, c কে বাস্তব ধরা হয় এবং রাশির নিম্নরূপ শ্রেণী বিভাগ সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা আছে।



দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান করিয়া পাওয়া যায়

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

যেহেতু a, b, c বাস্তব, সুতরাং $\frac{-b}{2a}$ বাস্তব। a, b, c-র ভিন্ন মানে b^2-4ac-এর মান ভিন্ন হইবে। ইহা ধনাত্মক, ঋণাত্মক, পূর্ণবর্গ ইত্যাদি হইতে পারে। ইহার প্রকৃতির উপরই বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ভর করে বলিয়া b^2-4ac-কে দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক** বা Discriminant বলা হয়।

(i) যদি b^2-4ac ধনাত্মক অর্থাৎ $b^2-4ac>0$ হয়, তখন $\sqrt{b^2-4ac}$-এর মান বাস্তব। সুতরাং বীজদ্বয় **বাস্তব** ও **অসমান** হইবে। এক্ষেত্রে দুইপ্রকার ঘটনা ঘটিতে পারে।

(a) যদি b^2-4ac পূর্ণবর্গ রাশি হয়, অর্থাৎ $\sqrt{b^2-4ac}$-কে করণী মুক্ত করা যায়, তবে উহা মূলদ রাশি হইবে। সেক্ষেত্রে বীজদ্বয় **বাস্তব, অসমান** ও **মূলদ** হইবে।

(b) যদি b^2-4ac পূর্ণবর্গ রাশি না হয়, অর্থাৎ $\sqrt{b^2-4ac}$-কে করণীমুক্ত করা না যায়, তবে উহা অমূলদ রাশি হইবে। সেক্ষেত্রে বীজদ্বয় **বাস্তব, অসমান ও অমূলদ** হইবে।

(ii) যদি b^2-4ac ঋণাত্মক, অর্থাৎ $b^2-4ac<0$ হয়, তখন $\sqrt{b^2-4ac}$-এর মান কাল্পনিক। সেক্ষেত্রে বীজদ্বয় **কাল্পনিক ও অসমান** হইবে।

(iii) যদি $b^2-4ac=0$ হয়, তবে ax^2+bx+c এই রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে। সেক্ষেত্রে বীজদ্বয় **বাস্তব, সমান ও মূলদ** হইবে।

দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত

(Condition for a Common root of two Quadratic Equations)

মনে করি $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ α রহিয়াছে। $\therefore$ α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) বজ্রগুণন করিয়া পাই,

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}$$

$$\therefore\ \frac{\alpha^2}{\alpha}=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a} \quad \text{বা,} \quad \alpha=\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}$$

আবার, $\alpha=\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$

$$\therefore\ \frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

বা, $(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত এবং সাধারণ বীজের মান

$$\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a} \text{ অথবা } \frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$$

অপেক্ষক (Function)

মনে করি $3x^2-5x+6$ একটি রাশিমালা। এই রাশির মান অজ্ঞাত রাশি x-এর মানের উপর নির্ভরশীল। x-এর বিভিন্ন মানে ইহার মান বিভিন্ন হইবে। এইরূপ রাশিমালাকে x-এর অপেক্ষক (Function) বলে এবং x-কে চল রাশি (Variable) বলা হয়। অপেক্ষককে বিভিন্ন প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে। যেমন $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ ইত্যাদি।

মনে কর $f(x) \equiv 3x^2-5x+6$; যদি বলা হয় $f(0)$ বা $f(-2)$ এর মান কত ? তবে $f(x)$-এর x-এর স্থলে 0 বা (-2) বসাইয়া ঐ মান পাওয়া যাইবে।

$\therefore \quad f(0)=3.0-5.0+6=6,\ f(-2)=3(-2)^2-5(-2)+6=28$

উদা. 1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কখন (i) সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত (ii) পরস্পরের অন্যোন্যক হইবে ?

(i) যদি বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয় তবে বীজদ্বয়ের সমষ্টি শূন্য হইবে।

বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\frac{b}{a} \quad \therefore \quad \frac{-b}{a}=0$ বা, $b=0$

$\because \quad b=0$ হইলে বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

(ii) যেহেতু বীজদ্বয় পরস্পরের অন্যোন্যক, মনে করি বীজদ্বয় $\alpha,\ \frac{1}{\alpha}$; বীজদ্বয়ের গুণফল $=\frac{c}{a} \quad \therefore \quad \alpha \times \frac{1}{\alpha}=\frac{c}{a} \quad \therefore \quad \frac{c}{a}=1$ বা, $c=a$

$\therefore \quad c=a$ হইলে বীজদ্বয় পরস্পরের অন্যোন্যক হইবে।

উদা. 2. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কখন (i) উভয়ে ধনাত্মক (ii) ঋণাত্মক (iii) একটি ধনাত্মক একটি ঋণাত্মক হইবে ?

মনে করি বীজদ্বয় $\alpha, \beta \quad \therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$

(i) যেহেতু বীজদ্বয় উভয়ে ধনাত্মক $\therefore \quad \alpha+\beta=$ ধনাত্মক

$\therefore \quad -\frac{b}{a}=$ ধনাত্মক $\quad \therefore \quad \frac{b}{a}=$ ঋণাত্মক।

$\therefore \quad a$ ও b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

আবার, $\alpha\beta=$ ধনাত্মক $\therefore \quad \frac{c}{a}=$ ধনাত্মক $\quad \therefore \quad a, c$ একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

$\therefore \quad a, c$ একই চিহ্নযুক্ত এবং b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে বীজদ্বয় উভয়ে ধনাত্মক হইবে।

(ii) যেহেতু বীজদ্বয় উভয়ে ঋণাত্মক $\therefore \quad \alpha+\beta=$ ঋণাত্মক $\therefore \quad -\frac{b}{a}=$ ঋণাত্মক

$\therefore \quad \frac{b}{a}=$ ধনাত্মক। $\therefore \quad a$ ও b একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

আবার, $\alpha\beta=$ ধনাত্মক। $\therefore \quad \frac{c}{a}=$ ধনাত্মক। $\therefore \quad a, c$ একই চিহ্নযুক্ত।

$\therefore \quad a, b, c$ একই চিহ্নযুক্ত হইলে বীজদ্বয় উভয়ে ঋণাত্মক হইবে।

(iii) যেহেতু একটি বীজ ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক, সুতরাং $\alpha\beta$ = ঋণাত্মক

$\therefore$ $\frac{c}{a}$ = ঋণাত্মক। $\therefore$ a, c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি কিরূপ হইবে ?

(i) $3x^2-7x+3=0$ (ii) $4x^2+5x+3=0$

(iii) $3x^2-8x+4=0$ (iv) $9x^2+12x+4=0$

(i) এখানে নিরূপক $=(-7)^2-4.3.3=49-36=13$

নিরূপক ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ নহে। সুতরাং বীজদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

(ii) এখানে নিরূপক $=(5)^2-4.4.3=25-48=-23$

নিরূপক ঋণাত্মক। সুতরাং বীজদ্বয় কাল্পনিক ও অসমান।

(iii) এখানে নিরূপক $=(-8)^2-4.3.4=64-48=16=(4)^2$

নিরূপক ধনাত্মক, পূর্ণবর্গ। সুতরাং বীজদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ।

(iv) এখানে নিরূপক $=(12)^2-4.9.4=144-144=0$

নিরূপক শূন্য। সুতরাং বীজদ্বয় বাস্তব, সমান ও মূলদ।

উদা. 4. প্রমাণ কর a, b, c বাস্তব ও মূলদ হইলে

$(b+c)x^2-(a+b+c)x+a=0$ সমীকরণের বীজগুলি মূলদ হইবে।

[U. U. '47]

এখানে নিরূপক $=\{-(a+b+c)\}^2-4a(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}^2-4a(b+c)$

$=\{a-(b+c)\}^2=(a-b-c)^2=$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি।

$\therefore$ বীজদ্বয় মূলদ।

উদা. 5. m-এর মান কত হইলে $3x^2+4mx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে ?

মনে করি, উভয় সমীকরণের একটি সাধারণ বীজ α, সুতরাং α দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হইবে।

$$\therefore\ 3\alpha^2+4m\alpha+2=0$$
$$2\alpha^2+3\alpha-2=0$$

ইহা হইতে বজ্রগুণন করিয়া পাই,

$$\frac{\alpha^2}{-8m-6}=\frac{\alpha}{4+6}=\frac{1}{9-8m} \quad \therefore\ \alpha=\frac{-(8m+6)}{10},\ \alpha=\frac{10}{9-8m}$$

$\therefore$ $-(8m+6)(9-8m)=(10)^2$ বা, $(8m+6)(8m-9)=100$

বা, $64m^2-24m-154=0$ বা, $32m^2-12m-77=0$

বা, $32m^2-56m+44m-77=0$ বা, $8m(4m-7)+11(4m-7)=0$

বা, $(4m-7)(8m+11)=0$ $\therefore$ $m=\frac{7}{4}$ বা, $-\frac{11}{8}$.

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে যখন $m=\frac{7}{4}$ বা, $-\frac{11}{8}$ হইবে।

উদা. 6. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে হয় $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$ হইবে।

মনে করি, α উভয় সমীকরণের সাধারণ বীজ

$$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$b\alpha^2+c\alpha+a=0$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha^2}{ab-c^2}=\frac{\alpha}{bc-a^2}=\frac{1}{ca-b^2}$$

$\therefore$ $(bc-a^2)^2=(ab-c^2)(ca-b^2)$

বা, $b^2c^2-2a^2bc+a^4=a^2bc-ac^3-ab^3+b^2c^2$

বা, $a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc=0$ বা, $a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

$\because$ $a\neq 0$ $\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore$ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

বা, $(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)=0$

[2 দিয়া উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া]

বা, $(a+b+c)\{b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2+a^2-2ab+b^2\}=0$

বা, $(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0$

$\therefore$ হয়, $a+b+c=0$

অথবা, $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=0$

যেহেতু তিনটি অংশই ধনাত্মক, কিন্তু ধনাত্মক রাশির সমষ্টি কখনই শূন্য হইতে পারে না, যদি না প্রত্যেকে পৃথক ভাবে শূন্য হয়।

$\therefore$ $(b-c)^2=0$ বা, $b-c=0$ $\therefore$ $b=c$

$(c-a)^2=0$ বা, $c-a=0$ $\quad c=a$

$(a-b)^2=0$ বা, $a-b=0$ $\therefore$ $a=b$

$\therefore$ $a=b=c$

উদা. 7. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে $2x^2-4(1+q)x+(p^2+2q^2+2)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে।

যেহেতু $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব, সুতরাং নিরূপক $p^2-4q>0$

এখন অপর সমীকরণের নিরূপক $=\{-4(1+q)\}^2-4.2(p^2+2q^2+2)$

$$=16(1+2q+q^2)-8(p^2+2q^2+2)$$
$$=8(2+4q+2q^2-p^2-2q^2-2)$$
$$=8(4q-p^2)<0 \qquad [\because \ p^2-4q>0]$$

যেহেতু নিরূপক ঋণাত্মক, সুতরাং বীজদ্বয় কাল্পনিক।

উদা. 8. মনে কর $f(x)\equiv ax^2+bx+c$, যেখানে a, b, c বাস্তব রাশি।

(a) নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে $f(x)=0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি সম্বন্ধে কি বলিতে পার ?

(i) $b=0, ac \lesseqgtr 0$ (ii) $c=0, ab\neq 0$ (iii) $b=c=0, a\neq 0$; (iv) $a=0, bc\neq 0$

(b) যদি $a\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে $f(x)=0$ এর উভয় বীজই বাস্তব অথবা উভয়ই কাল্পনিক হইবে।

(c) যদি x বাস্তব হয়, তবে যখন $a=2$, $b=-4$ ও $c=10$, তখন $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [C. U. '52]

(a) $f(x)=0$, অর্থাৎ $ax^2+bx+c=0$
ইহার নিরূপক $=b^2-4ac$

(i) যেহেতু $b=0$, $ax^2+c=0$ $\therefore x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

যখন $ac<0$ a, c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। $\therefore -\dfrac{c}{a}=$ধনাত্মক

$\therefore$ বীজদ্বয় বাস্তব, সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন হইবে।

যখন $ac>0$, a, c একই চিহ্ন যুক্ত হইবে। $\therefore -\dfrac{c}{a}=$ঋণাত্মক

$\therefore$ বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে।

(ii) $c=0$ হইলে $ax^2+bx=0$ $\therefore x(ax+b)=0$

$\therefore x=0$, বা, $ax+b=0$ $\therefore x=-\dfrac{b}{a}$ $(\because ab\neq 0)$

$\therefore c=0, ab\neq 0$ হইলে একটি বীজ শূন্য ও অপর বীজ $-\dfrac{b}{a}$ হইবে। অর্থাৎ বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইবে।

(iii) $b=c=0, a\neq 0$ হইলে $ax^2=0$ বা, $x^2=0$

অর্থাৎ x-এর মানদ্বয় শূন্য ; সুতরাং উভয় বীজই শূন্য।

(iv) $a=0$ হইলে, $bx+c=0$ ∴ $x=-\frac{c}{b}$ (∵ $bc\neq0$)

সুতরাং এক্ষেত্রে একটি মাত্র বীজ $-\frac{c}{b}$ হইবে।

(b) মনে করি, বীজদ্বয় α, β ∴ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

মনে করি, যদি সম্ভব হয় α বাস্তব এবং β কাল্পনিক।

∴ একটি বাস্তব রাশি + একটি কাল্পনিক রাশি $=-\frac{b}{a}=$ একটি বাস্তব রাশি

[∵ a, b বাস্তব]

আবার, একটি বাস্তব রাশি × একটি কাল্পনিক রাশি $=\frac{c}{a}=$ একটি বাস্তব রাশি

[∵ a, c বাস্তব]

কিন্তু ইহা হইতে পারে না।

সুতরাং উভয় বীজ বাস্তব অথবা কাল্পনিক হইবে।

(c) $f(x)\equiv ax^2+bx+c$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+2.x.\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক। ইহার লঘিষ্ঠ মান 0।

∴ $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান $=\frac{4ac-b^2}{4a}$

$a=2$, $b=-4$, $c=10$ হইলে $f(x)$ এর লঘিষ্ঠ মান

$$=\frac{4.2.10-(-4)^2}{4.2}=\frac{80-16}{8}=\frac{64}{8}=8$$

Exercise 9A

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির বীজগুলির প্রকৃতি নিরূপণ কর :

(i) $2x^2-6x+3=0$ (ii) $x^2-7x+12=0$

(iii) $3x^2+5x+4=0$ (iv) $16x^2=25$

2. দেখাও যে $99x^2+100x=101$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব।

3. দেখাও যে $2x^2+3x+5=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় কাল্পনিক।

4. দেখাও যে $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

5. যদি $x^2-(3a-1)x+2a^2+2a-11=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হয়, তবে a-র মান কত হইবে?

6. $x^2+px+8=0$ সমীকরণের একটি বীজ 4 এবং x^2+px+q… সমীকরণের বীজদ্বয় সমান। q-র মান কত? [C. U.…

7. m-এর মান কত হইলে $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ সমী… বীজদ্বয় (i) সমান ও (ii) পরস্পর অন্যোন্যক হইবে? [C. U…

8. প্রমাণ কর $3x^2-8x+7=0$ সমীকরণের কোন বাস্তব বীজ থা… পারে না।

9. প্রমাণ কর যদি $a=\frac{5}{3}$ না হয়, তবে $x^2+2(3a+5)x+2(9a^2+2$… এর বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে। [P. U…

10. প্রমাণ কর a, b বাস্তব হইলে $(x+a)(x+b)=abx^2$-এর বীজদ্বয়… বাস্তব হইবে।

11. $ax^2+by^2=1$ এবং $ax+by=0$ সমীকরণদ্বয় হইতে x-এর যে দুই… পাওয়া যাইবে, তাহারা সমান হইবে যদি $a+b=1$ হয়।

12. $(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$ এর বীজদ্বয় সমান … প্রমাণ কর, হয় $b=0$ অথবা, $a^3+b^3+c^3=3abc$ হইবে।

13. কি শর্তে $x^2+px+q=0$ সমীকরণের (i) একটি বীজ শূন্য (ii) উভয় … শূন্য হইবে?

14. কি শর্তে $ax^2+bx+c=0$ সমী…পর বীজের (i) n… (ii) n-তম মূল হইবে?

15. প্রমাণ কর $(x-a)(x-b)+$… সমী… বীজদ্বয় বাস্তব কিন্তু সমান হইবে না, যদি না $a=b=$…

16. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ সমীকর… প্রমাণ কর, a, b, c সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

17. যদি $x^2+px+q=0$ ও $x^2+p'x+q'=0$ সমী… সাধারণ বীজ থাকে, তবে সেই বীজ $(pq'-p'q)/(q-q')$ অথবা… হইবে।

18. $x^2+bx+ca=0$ ও $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সা…

আছে। প্রমাণ কর উহাদের অপর বীজগুলি দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। [C. U. '58]

19. প্রমাণ কর $(q-r)x^2+(r-p)x+(p-q)=0$ এবং $(r-p)x^2+(p-q)x+(q-r)=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ আছে।

20. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর $x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণ তিনটির মধ্যে যে কোন দুইটির একটি সাধারণ বীজ আছে।

21. প্রমাণ কর $(a^4+b^4)x^2+4abcdx+(c^4+d^4)=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব হইলে উহারা বিভিন্ন হইতে পারে না। [Pat. '46]

22. যদি $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর $p=q$ অথবা $p+q+1=0$ হইবে। [H. S. '68]

23. $5x^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজগুলি α এবং β হইলে দেখাও যে, $5x^2+bx+c=5(x-\alpha)(x-\beta)$; এবং ইহা হইতে দেখাও যে, x-এর মান বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রদ্বয়ে রাশিমালা $5x^2+bx+c$-এর মান কখনও ঋণাত্মক হইবে না। (i) α এবং β বাস্তব ও সমান হইলে এবং (ii) α এবং β কাল্পনিক হইলে। [H. S. '72]

24. a, b, c বাস্তব হইলে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে কিরূপ হইবে তাহা নির্ণয় কর :

(i) $b^2>4ac$, $ab<0$, $ac>0$ (ii) $b^2>4ac$, $ab>0$, $ac>0$. [H. S. '69]

25. মনে কর $f(x)\equiv ax^2+bx+c=(x-\alpha)Q+R$, যেখানে $f(x)$ একটি দ্বিঘাত রাশি এবং $f(x)$ কে $x-\alpha$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল Q ও ভাগশেষ R হয়, যেখানে α একটি সংখ্যা। দেখাও যে,

(a) $Q=a(x+\alpha)+b$ এবং $R=f(\alpha)$

(b) α যদি $f(x)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ হয়, তবে Q ও R এর মান [(a) হইতে] হইতে দেখাও যে,

(i) $(x-\alpha)$ দ্বারা $f(x)$ সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ;

(ii) $f(x)=0$ এর দুইটি ভিন্ন বা সমান বীজ থাকিবে ; এবং

(iii) বীজদ্বয়ের সমষ্টি $-\dfrac{b}{a}$ হইবে।

দ্বিঘাত রাশির উৎপাদক (Factors of the Quadratic Expression)

মনে করি, দ্বিঘাত রাশি ax^2+bx+c

মনে করি, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \text{এবং} \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

এখন $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

[**দ্রষ্টব্য :** দ্বিঘাত সমীকরণ এবং দ্বিঘাত রাশিমালার মধ্যে পার্থক্য তোমরা অবশ্যই লক্ষ্য করিবে। দ্বিঘাত সমীকরণে x-এর দুইটি নির্দিষ্ট মান থাকিতে পারে। কিন্তু দ্বিঘাত রাশিমালায় x-এর যে কোন মান হইতে পারে।]

দুইটি দ্বিঘাত রাশিমালার একটি সাধারণ উৎপাদক থাকিবার শর্ত (Condition for a common factor of two Quadratic Expressions)

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি ax^2+bx+c এর একটি উৎপাদক $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইতে পাওয়া যায়। সুতরাং ax^2+bx+c এবং $a'x^2+b'x+c$ রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিবে যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে। এবং ইহার শর্ত $(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ca'-c'a)^2$ ইহা পূর্বেই নির্ণয় করা হইয়াছে।

x ও y দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট দ্বিঘাত রাশিমালার উৎপাদক (Factors of the General Quadratic Expression in x and y)

x, y বিশিষ্ট সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালার আকার নিম্নরূপ :

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$

এখানে a, b, c, f, g, h ধ্রুবক। ইহাকে নির্দিষ্ট শর্তে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

এখন $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণটিকে x-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে সাজাইয়া পাই,

$$ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

[লব ও হরের 2 কাটিয়া যায়]

$\therefore$ পূর্ব নিয়মে, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$

$$=a\left\{x+\frac{hy+g+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

$$\times\left\{x+\frac{hy+g-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালার লব্ধ উৎপাদকদ্বয় একঘাত উৎপাদক হইবে যদি $(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)$ একটি পূর্ণবর্গ হয় অর্থাৎ $(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয়। এবং ইহার পূর্ণবর্গ হইবার শর্ত হইল

$$\{2(gh-af)\}^2-4(h^2-ab)(g^2-ac)=0$$

বা, $(gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac)$

বা, $g^2h^2+a^2f^2-2afgh=g^2h^2-ach^2-abg^2+a^2bc$

বা, $a^2bc+2afgh-a^2f^2-abg^2-ach^2=0$

বা, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

রাশিমালার চিহ্ন (Sign of the Expression)

ax^2+bx+c রাশিমালার চিহ্ন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।

যদি α, β এই সমীকরণের বীজ হয়, তবে

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

(a) মনে করি, α ও β **বাস্তব ও সমান** অর্থাৎ $\alpha=\beta$

$\therefore$ $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x-\alpha)(x-\alpha)=a(x-\alpha)^2$

$=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি

সুতরাং a-র যে চিহ্ন ax^2+bx+c-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(b) মনে করি, α ও β **কাল্পনিক**।

মনে করি, $\alpha=p+iq$, $\beta=p-iq$

$\therefore$ $ax^2+bx+c=a\{x-(p+iq)\}\{x-(p-iq)\}$

$=a\{(x-p)-iq\}\{(x-p)+iq\}=a\{(x-p)^2-i^2q^2\}$

$=a\{(x-p)^2+q^2\}=a\times$ একটি ধনাত্মক রাশি

সুতরাং a-র যে চিহ্ন ax^2+bx+c-এরও সেই চিহ্ন হইবে।

(c) মনে করি, α ও β **বাস্তব ও অসমান**।

(i) x যদি α ও β-র মধ্যে থাকে, এবং যদি $\alpha < x < \beta$ হয়, তবে $x-\alpha$ ধনাত্মক এবং $x-\beta$ ঋণাত্মক। কিন্তু যদি $\beta < x < \alpha$ হয়, তবে $x-\alpha$ ঋণাত্মক এবং $x-\beta$ ধনাত্মক। যে কোন ক্ষেত্রে $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে। স্থতরাং $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে যদি a যথাক্রমে ঋণাত্মক অথবা ধনাত্মক হয়।

স্থতরাং ax^2+bx+c-এর চিহ্ন a-র বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

(ii) x যদি α ও β-র মধ্যে অবস্থান না করে।

যদি x, α ও β উভয় অপেক্ষা বড় হয়, অর্থাৎ $x > \alpha$ এবং $x > \beta$

তাহা হইলে $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয়ে ধনাত্মক।

যদি x, α ও β উভয় অপেক্ষা ছোট হয়, অর্থাৎ $x < \alpha$, $x < \beta$

তাহা হইলে $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয়ে ঋণাত্মক।

যে কোন ক্ষেত্রে $(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে। স্থতরাং $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে যদি a যথাক্রমে ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হয়।

স্থতরাং ax^2+bx+c-এর চিহ্ন, a-র মত হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ ইহা হইতে আমরা বুঝিতে পারি যে, x এর সমস্ত বাস্তব মানেই a-র যে চিহ্ন হইবে ax^2+bx+c রাশিটিরও সেই চিহ্ন হইবে। কেবলমাত্র যখন $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হইবে এবং x এর মান বীজদ্বয়ের মানের মধ্যবর্তী কোন মান হইবে তখনই রাশিটির চিহ্ন a-র যে চিহ্ন তাহার বিপরীত চিহ্ন হইবে।

দ্বিঘাত রাশির মান (Magnitude of the Quadratic Expression)

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+2.x.\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad \cdots \qquad (1)$$

(i) মনে করি, a ধনাত্মক।

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া x-এর যে কোন বাস্তব মানে উহা ধনাত্মক অথবা শূন্য হইবে।

$$\therefore \quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$$

$\therefore$ (1) হইতে পাই, ax^2+bx+c এর মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা কখনও কম হইতে পারে না। হয়, $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা বেশী অথবা সমান (যখন $x+\frac{b}{2a}=0$)

$\therefore$ ax^2+bx+c এর **লঘিষ্ঠ** (বা অবম) মান $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$

এক্ষেত্রে গরিষ্ঠ (চরম) মান নির্ণয় করা যায় না।

(ii) মনে করি, a ঋণাত্মক।

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ধনাত্মক বলিয়া $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ধনাত্মক হইবে ($\therefore$ a ঋণাত্মক)

অতএব (1) হইতে পাই ax^2+bx+c-এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না। হয় $\frac{4ac-b^2}{4a}$ অপেক্ষা কম অথবা সমান (যখন $x+\frac{b}{2a}=0$) হইবে।

$\therefore$ ax^2+bx+c-এর **গরিষ্ঠ** (চরম) মান হইবে $\frac{4ac-b^2}{4a}$ এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$।

উদা. 1. x বাস্তব হইলে $2x^2-3x+2$ এর চিহ্ন কিরূপ হইবে ?

$$2x^2-3x+2=2(x^2-\tfrac{3}{2}x+2)=2\{x^2-2.x.\tfrac{3}{4}+(\tfrac{3}{4})^2+1-\tfrac{9}{16}\}$$
$$=2\{(x-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{7}{16}\}=2(x-\tfrac{3}{4})^2+\tfrac{7}{8}$$

$\because$ x বাস্তব $(x-\frac{3}{4})^2$ ধনাত্মক। $\therefore$ $2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{7}{8}$ ধনাত্মক।

$\therefore$ x এর যে কোন বাস্তব মানে প্রদত্ত রাশিমালা ধনাত্মক হইবে।

উদা. 2. প্রমাণ কর x-এর যে কোন বাস্তব মানে $3x^2-6x+8$ কখনও 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না। [C. U. '35]

$$3x^2-6x+8=3(x^2-2x+1)+5=3(x-1)^2+5$$

x-এর যে কোন বাস্তব মানে $(x-1)^2$ ধনাত্মক। সুতরাং প্রদত্ত রাশির মান 5 অপেক্ষা কম হইতে পারে না।

উদা. 3. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর 5 ও 9-এর মধ্যবর্তী কোন মান থাকিতে পারে না। [C. U. '54]

মনে করি, $y=\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

বা, $y(x^2+2x-7)=x^2+34x-71$

বা, $(y-1)x^2+2(y-17)x+(71-7y)=0$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক ধনাত্মক অথবা শূন্য হইবে।

$\therefore \quad 4(y-17)^2-4(y-1)(71-7y)\geqslant 0$

বা, $y^2-34y+289-78y+7y^2+71\geqslant 0$

বা, $8y^2-112y+360\geqslant 0$ বা, $y^2-14y+45\geqslant 0$

বা, $(y-5)(y-9)\geqslant 0$

y-এর মান 5 অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হয়, সুতরাং গুণফল ধনাত্মক। আবার y-এর মান 9 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হয়, সুতরাং গুণফল ধনাত্মক অর্থাৎ নিরূপকটি ধনাত্মক হয়।

যখন y-এর মান 5 অথবা 9-এর সমান তখন নিরূপকের মান শূন্য হয়।

আবার যখন y এর মান 5 অপেক্ষা বড় কিন্তু 9 অপেক্ষা ছোট হয় তখন $(y-5)$ ধনাত্মক এবং $(y-9)$ ঋণাত্মক। সুতরাং উহাদের গুণফল ঋণাত্মক অর্থাৎ নিরূপক ঋণাত্মক।

সুতরাং x বাস্তব হইলে y এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকিবে না।

উদা. 4. যদি x বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ রাশিটির মান 7 এবং $\frac{1}{7}$-এর মধ্যে থাকিবে। [C. U. '40]

মনে করি, $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$

$\therefore \quad y(x^2+3x+4)=x^2-3x+4$

বা, $(y-1)x^2+3(y+1)x+4(y-1)=0$

ইহা x-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক ধনাত্মক অথবা শূন্য হইবে।

$\therefore \quad 9(y+1)^2-16(y-1)^2\geqslant 0$ বা, $-7y^2+50y-7\geqslant 0$

বা, $-(7y^2-50y+7)\geqslant 0$ বা, $-(7y-1)(y-7)\geqslant 0$

বা, $-7(y-\frac{1}{7})(y-7)\geqslant 0$ বা, $7(y-\frac{1}{7})(y-7)\leqslant 0$

এখন y-এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক হয়। সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক। আবার y-এর মান 7 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদকই ধনাত্মক হয়। সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক।

যখন y-এর মান $\frac{1}{7}$ অথবা 7, তখন নিরূপকের মান শূন্য। আবার যখন y-এর মান $\frac{1}{7}$ অপেক্ষা বড় কিন্তু 7 অপেক্ষা ছোট হয়, তখন $(y-\frac{1}{7})$ ধনাত্মক কিন্তু $(y-7)$ ঋণাত্মক। অতএব গুণফল ঋণাত্মক।

অতএব x বাস্তব হইলে y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার মান $\frac{1}{7}$ এবং 7-এর মধ্যে থাকিবে।

উদা. 5. দেখাও যে x বাস্তব হইলে $\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+4x+1}$ রাশিটির যে কোন বাস্তব মান থাকিতে পারে।

মনে করি, $y=\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+4x+1}$

$\therefore\quad y(3x^2+4x+1)=2x^2+5x+2$

বা, $(3y-2)x^2+(4y-5)x+(y-2)=0$

ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। যেহেতু x বাস্তব। সুতরাং ইহার নিরূপক $\geqslant 0$ হইবে।

$\therefore\quad (4y-5)^2-4(3y-2)(y-2)\geqslant 0$

বা, $16y^2-40y+25-12y^2+32y-16\geqslant 0$

বা, $4y^2-8y+9\geqslant 0$ বা, $y^2-2y+\frac{9}{4}\geqslant 0$

বা, $(y-1)^2+\frac{5}{4}\geqslant 0$

যেহেতু $(y-1)^2$ পূর্ণবর্গ রাশি, সুতরাং y এর যে কোন বাস্তব মানেই ইহা ধনাত্মক। অতএব y এর যে কোন বাস্তব মানেই $(y-1)^2+\frac{5}{4}$ রাশিটি সতত ধনাত্মক হইবে।

অতএব x বাস্তব হইলে, y-এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

উদা. 6. x এর বাস্তব মানে $\dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় কর। [H. S. '65]

মনে করি, $y=\dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$

বা, $y(x^2+2x+3)=x^2+14x+9$

বা, $(y-1)x^2+2(y-7)x+(3y-9)=0 \quad \cdots \quad (1)$

যেহেতু x বাস্তব, সুতরাং এই দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $\geqslant 0$ হইবে।

$\therefore\ (y-7)^2-(y-1)(3y-9)\geqslant 0$ বা, $-2y^2-2y+40\geqslant 0$

বা, $y^2+y-20\leqslant 0$ বা, $(y+5)(y-4)\leqslant 0$

y এর মান -5 অপেক্ষা ছোট হইলে উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হয়; সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হয়। আবার y-এর মান 4 অপেক্ষা বড় হইলে উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হয়। সুতরাং উহাদের গুণফল ধনাত্মক হয়।

যখন y এর মান -5 অথবা 4 হয় তখন নিরূপকের মান শূন্য হয়। সুতরাং দেখা যাইতেছে x বাস্তব হইলে y-এর মান -5 হইতে 4 পর্যন্ত যে কোন মান হইতে পারে। সুতরাং x-এর বাস্তব মানের জন্য y এর অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালার চরম মান 4 এবং অবম মান -5 হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** y এর চরম ও অবম মানের জন্য x এর অনুরূপ মান পাওয়া যায়।

যখন $y=4$, (1) হইতে পাই,

$3x^2-6x+3=0$ বা, $x^2-2x+1=0$

বা, $(x-1)^2=0$ বা, $x=1$

যখন $y=-5$, (1) হইতে পাই,

$-6x^2-24x-24=0$ বা, $x^2+4x+4=0$

বা, $(x+2)^2=0$ বা, $x=-2$

সুতরাং $x=1$ হইলে রাশিটির চরম মান 4 পাওয়া যায় এবং $x=-2$ হইলে রাশিটির অবম মান -5 পাওয়া যায়।]

Exercise—10

x বাস্তব হইলে নিম্নলিখিত রাশিগুলি কিরূপ চিহ্নবিশিষ্ট হইবে ? :

1. $2x^2-5x+6$ 2. $12x-3x^2-15$

3. দেখাও যে x বাস্তব হইলে $4x+7-3x^2$ এর মান কখনও $\frac{25}{3}$ অপেক্ষা বড় হইবে না।

4. x এর মান কত হইলে $2x^2+5x-3$ ঋণাত্মক হইবে ? ইহার সর্বনিম্ন মান কত ? [C. U. '50]

5. দেখাও যে x এর বাস্তব মানের জন্য $10x^2-17x+3$ সর্বদাই ধনাত্মক, যদি না x, $\frac{1}{5}$ এবং $\frac{3}{2}$ এর মধ্যবর্তী হয়।

6. দেখাও যে x এর বাস্তব মানের জন্য $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+5$ সর্বদাই ধনাত্মক।

7. x বাস্তব হইলে $3-20x-25x^2$ রাশিটির সর্বাধিক মান এবং x এর অনুরূপ মান কত হইবে ? [H. S. '70]

8. যদি x বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর $\frac{3x^2+38x-85}{x^2+2x-7}$ এর 7 ও 11 এর মধ্যবর্তী কোন মান হইতে পারে না। [G. U. '49]

9. x বাস্তব হইলে, প্রমাণ কর $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ এর মান 2 এবং 6 এর মধ্যে থাকিতে পারে না। [H. S. '67]

10. প্রমাণ কর x এর বাস্তব মানে $\frac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ এর মান 3 এবং $\frac{1}{3}$-এর মধ্যে থাকিবে। [C. U. '35]

11. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর $\frac{x}{x^2-5x+9}$ এর মান 1 এবং $-\frac{1}{11}$ এর মধ্যে থাকিবে। [H. S. (Comp.) '61]

12. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$ এর মান $\frac{4}{9}$ এবং 1-এর মধ্যে থাকিবে না।

13. x বাস্তব হইলে $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$ রাশিটির গরিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [H. S. '65]

14. x বাস্তব হইলে প্রমাণ কর $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে। [B. U. '62]

15. যদি x বাস্তব এবং $1<a<3$ হয় দেখাও যে $\frac{ax^2+x-2}{a+x-2x^2}$ এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

16. প্রমাণ কর x এর বাস্তব মানে $\frac{a^2}{1-x}-\frac{b^2}{1+x}$ রাশিটির যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে, যখন a ও b বাস্তব।

17. x বাস্তব হইলে $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ রাশিটির গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কর। [H. S. '61]

18. দেখাও যে x এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$ এর গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান যথাক্রমে $\frac{5}{4}$ এবং 1 এবং x এর অনুরূপ মানগুলি যথাক্রমে 1 এবং 2। [C. U. '44]

19. প্রমাণ কর রাশিমালা $x^2+2bx+c >=$ অথবা $<(x+b)^2$ হইবে, যদি $x^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় যথাক্রমে কাল্পনিক, সমান অথবা বাস্তব হয়।

20. দেখাও যে, যদি $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)$ একটি পূর্ণবর্গ রাশি হয়, তবে $a=b=c$

21. যদি $p>1$ হয়, তবে দেখাও যে x এর বাস্তব মানে $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ এর মান $\dfrac{p-1}{p+1}$ ও $\dfrac{p+1}{p-1}$ এর মধ্যে থাকিবে।

22. কোন্ শর্তে $ax^2+2hxy+by^2$ রাশিমালার $y-mx$ এবং $my+x$ আকারের দুইটি উৎপাদক থাকিবে ?

23. a-র মান কত হইলে $4x^2-12xy+4y^2+4x-2(3-a)y-4$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাইবে ?

24. কি শর্তে $ax^2+2hxy+6y^2$ এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ রাশিদ্বয়ের যথাক্রমে $y-mx$ ও $my+x$ আকারের উৎপাদক হইতে পারে ?

25. যদি $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ কে দুইটি একঘাত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$

26. x বাস্তব এবং p এর 1 ও 7 এর মধ্যবর্তী যে কোন মান হইলে, প্রমাণ কর যে $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ এর যে কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

27. প্রমাণ কর যে x এর বাস্তব মানে a-র যে চিহ্ন, ax^2+bx+c এর সেই চিহ্ন হইবে, কেবল যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান এবং x এর মান ঐ বীজদ্বয়ের মধ্যবর্তী হয় তবে সেক্ষেত্রে হইবে না। [C. U. '53]

28. যদি x বাস্তব হয়, তবে দেখাও যে $2x-x^2-3$ রাশিটির $-\infty$ হইতে -2 পর্যন্ত যে কোন মান হইতে পারে, কিন্তু -2 হইতে $+\infty$ পর্যন্ত কোন মান থাকিতে পারে না।

অষ্টম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

বিন্যাস : কতিপয় বস্তুর সবগুলিকে লইয়া বা কয়েকটি করিয়া লইয়া বিভিন্ন প্রকারে সাজাইলে প্রতি প্রকার সাজানোকে (arrangement) এক একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলে।

a ও b এই দুইটি অক্ষরকে ab এবং ba এই দুই প্রকারে সাজান যায়। a, b, c এই তিনটি অক্ষর হইতে প্রতিবার দুইটি করিয়া লইলে ab, ba, ac, ca, bc, cb এই 6 প্রকারে সাজান যায়। আবার সবগুলিকে এক সাথে লইলে abc, acb, bac, bca, cab, cba এই 6 প্রকারে সাজান যায়। সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই 6টি করিয়া বিন্যাস হইবে।

সমবায় : কতিপয় বস্তুর সবগুলিকে লইয়া বা কয়েকটি করিয়া লইয়া যে বিভিন্ন দল বা মণ্ডলী (group বা selection) গঠন করা যায় তাহাদের এক একটি দল বা মণ্ডলীকে এক একটি **সমবায়** (Combination) বলে। a ও b দ্বারা ab এবং ba দুইটি বিন্যাস হইলেও তাহারা একটি দল। সুতরাং সমবায় একটিই। a, b, c-র তিনটি বা দুইটি করিয়া বিন্যাস করিলে 6টি বিন্যাস হয় কিন্তু সমবায় একটিই হইবে। সমবায় সম্বন্ধে বিস্তারিত তথ্য পরে দেওয়া হইবে।

একটি প্রয়োজনীয় বিষয় (An Important note) :

যদি কোন এক প্রক্রিয়া m বিভিন্ন উপায়ে সম্পন্ন করা যায় তবে ঐ এক রকম প্রক্রিয়া করার পর অন্য একটি প্রক্রিয়া যদি n বিভিন্ন রকমে করা যায়, তবে ঐ দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যাইবে।

মনে কর, প্রথম প্রক্রিয়াটি m উপায়ের যে কোন একটি উপায়ে করা হইল। এখন এই এক রকমের প্রথম প্রক্রিয়ার সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $1 \times n$ রকমে সম্পন্ন হইতেছে। এইভাবে প্রথম প্রক্রিয়ার m রকমের এক একটি রকমের সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে n রকমে সম্পন্ন হইবে। অতএব, প্রথম প্রক্রিয়ার m রকমের সহিত দ্বিতীয় প্রক্রিয়ার n রকমের সহযোগে উভয় প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n$ উপায়ে সম্পন্ন হইবে।

এই বিষয়টিকে আরও ব্যাপকভাবে লওয়া যাইতে পারে। প্রথম ও দ্বিতীয় প্রক্রিয়া $m \times n$ উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। এখন যদি $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারের মধ্যে একপ্রকারে মিলিত প্রক্রিয়া করিলে তৃতীয় একটি প্রক্রিয়া p বিভিন্ন প্রকারে করা যায়, তাহা হইলে তিনটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে $m \times n \times p$ প্রকারে করা যাইবে। এইভাবে ইহাকে আরও ব্যাপক করা যায়।

বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস (Permutation of things all different) **:**

উপপাদ্য : n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়। $(r \leqslant n)$

[To find the number of permutations of n different things taken r at a time. $(r \leqslant n)$]

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা (একই বস্তু বার বার না লইয়া) r সংখ্যক স্থান যত রকমভাবে পূর্ণ করা যায় তাহাই নির্ণেয় বিন্যাস হইবে।

প্রথম স্থানটি n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে কোন একটি দ্বারা পূর্ণ করা যায়, সুতরাং প্রথম স্থানটি মোট n উপায়ে পূর্ণ করা যায়। প্রথম স্থানটি এই n উপায়ের যে কোন এক উপায়ে পূর্ণ হইবার পর দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে। কারণ অবশিষ্ট $(n-1)$ বস্তুর যে কোন একটি দ্বারা দ্বিতীয় স্থানটি পূর্ণ হইতে পারে। যেহেতু প্রথম স্থানটি যে কোন এক প্রকারে পূর্ণ হইলে দ্বিতীয় স্থানটি $(n-1)$ উপায়ে পূর্ণ হইবে, সুতরাং প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান মোট $n(n-1)$ উপায়ে পূর্ণ হইবে। আবার প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান $n(n-1)$ বিভিন্ন উপায়ের যে কোন এক রকমে পূর্ণ হইবার পর তৃতীয় স্থানটি অবশিষ্ট $(n-2)$ বস্তুর মধ্যে যে কোন একটি দ্বারা পূর্ণ করা যায় বলিয়া তৃতীয় স্থানটি মোট $(n-2)$ বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে। অতএব প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থান একত্রে মোট $n(n-1)(n-2)$ বিভিন্ন প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে।

এইভাবে অগ্রসর হইয়া লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে, যতগুলি স্থান পূর্ণ হইতেছে, উৎপাদক সংখ্যাও তত। সুতরাং r সংখ্যক স্থান পূর্ণ হইবার মোট উপায়

$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots r$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

[$\because$ r তম উৎপাদক $= n+(r-1)(-1) = n-r+1$]

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

ইহাকে ^nP_r দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad {}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \quad \cdots \quad (1)$$

প্রতীক (Notation)ঃ 1 হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফলকে '$\lfloor\,$' বা '!' (পড়া হয় Factorial) প্রতীক চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ $1.2.3\cdots\cdots n=\lfloor n$ বা $n!$

$$\therefore\ \lfloor 6=6.5.4.3.2.1$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. (1) নং সূত্রে $r=n$ বসাইলে সবগুলি বস্তুকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের মোট সংখ্যা পাওয়া যায়।

$$\therefore\ {}^nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n \text{ তম উৎপাদক}$$
$$=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$$
$$\therefore\ {}^nP_n=\lfloor n \qquad \cdots \qquad (2)$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\lfloor n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$

$\therefore\ \lfloor n=n\lfloor n-1$ অনুরূপে $\lfloor n=n(n-1)\lfloor n-2$ ইত্যাদি।

অনুসিদ্ধান্ত 3. ${}^nP_r$ কে Factorial প্রতীকের দ্বারা প্রকাশ।

$${}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1}$$
$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} \qquad \therefore\ {}^nP_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-r} \qquad \cdots \qquad (3)$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. $\lfloor 0$ এর অর্থ।

'Factorial' প্রতীকের সংজ্ঞানুসারে $\lfloor 0$ এর কোন অর্থ হয় না, তথাপি $\lfloor 0=1$ ধরা হয়, অর্থাৎ $\lfloor 0$ একটি প্রতীক যাহার মান 1।

(3) নংএ $r=n$ বসাইলে,

$${}^nP_n=\frac{\lfloor n}{\lfloor n-n}=\frac{\lfloor n}{\lfloor 0}$$

আবার (2) নং-এ হইতে ${}^nP_n=\lfloor n$

$$\therefore\ \lfloor n=\frac{\lfloor n}{\lfloor 0} \qquad \text{বা,}\ \lfloor 0=\frac{\lfloor n}{\lfloor n} \qquad \text{বা,}\ \lfloor 0=1$$

অনুসিদ্ধান্ত 5. $\frac{1}{\lfloor -r}$ এর অর্থ।

সংজ্ঞানুসারে $\frac{1}{\lfloor -r}$ এর কোন অর্থ না থাকিলেও উহার 0 মান বিশিষ্ট প্রতীক ধরা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 6. প্রমাণ কর $^nP_n = {^nP_{n-1}}$

$^nP_n = \lfloor n$ (2) হইতে

এখন $^nP_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$

এখন $r = n-1$ বসাইয়া পাই,

$$^nP_{n-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-(n-1)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-n+1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor 1} = \lfloor n$$

$$\therefore \quad ^nP_n = {^nP_{n-1}}$$

সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস।

[Permutations of things not all different]

উপপাদ্য ঃ সবগুলি বস্তু বিভিন্ন নহে এরূপ n সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the number of permutations of n things taken all together, when the things are not all different.]

মনে করি, n সংখ্যক অক্ষর প্রদত্ত n সংখ্যক বস্তু। ঐ অক্ষরের মধ্যে, p-সংখ্যক অক্ষর 'a', q-সংখ্যক অক্ষর 'b' এবং r-সংখ্যক অক্ষর 'c' রহিয়াছে এবং অবশিষ্ট সকল অক্ষর বিভিন্ন।

মনে করি, নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা x. তাহা হইলে x বিন্যাসের প্রতিটি বিন্যাসেই n সংখ্যক অক্ষর থাকিবে।

মনে করি, p-সংখ্যক a অক্ষরকে পরিবর্তিত করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর প্রদত্ত অক্ষরগুলি হইতে ও ভিন্ন এরূপ p-সংখ্যক অন্য অক্ষর লওয়া হইল।

এক্ষণে যদি অন্য অক্ষরগুলির অবস্থানের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়া কেবলমাত্র ঐ p-সংখ্যক নূতন বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে অবস্থানের পরিবর্তন করা হয়, তবে x সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাস হইতে $\lfloor p$ সংখ্যক ভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং x সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাস পাইলে মোট বিন্যাস হইবে $x\lfloor p$.

অনুরূপে, ঐ $x\lfloor p$ সংখ্যক নূতন বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে যে q-সংখ্যক b অক্ষর আছে, সেইগুলি পরিবর্তন করিয়া পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অক্ষরগুলি হইতে ও ভিন্ন q-সংখ্যক অন্য নূতন অক্ষর লওয়া হইলে ঐ q-সংখ্যক নূতন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস করিলে $x\lfloor p$ সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটি হইতে মোট $\lfloor q$ সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। অতএব তখন মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $x\lfloor p\lfloor q$.

পুনরায় যদি পূর্বের ন্যায় r সংখ্যক c এর পরিবর্তে পরস্পর বিভিন্ন এবং অপর অবশিষ্ট অক্ষরগুলি হইতে ও ভিন্ন r সংখ্যক নূতন অক্ষর লওয়া হয়, তবে মোট বিন্যাস হইবে $x\lfloor p \lfloor q \lfloor r$ ।

এখন p-সংখ্যক a, q-সংখ্যক b এবং r সংখ্যক c সবগুলি পরিবর্তিত হইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইয়া যাওয়ায় সব অক্ষরগুলিকে একযোগে লইয়া বিন্যাস করিলে বিন্যাসের সংখ্যা হইবে $\lfloor n$ ।

$$\therefore\ x\lfloor p \lfloor q \lfloor r = \lfloor n \qquad \therefore\ x = \frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}$$

[আরও অধিক সংখ্যক বস্তু লইয়াও ইহা দেখান যাইতে পারে]

একই বস্তু বার বার লইয়া বিন্যাস।

(Permutations invol‹ing repeatations)

উপপাদ্য : যদি প্রত্যেক বস্তুকে r বার পর্যন্ত পুনঃপুনঃ লওয়া যায়, তবে n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

[To find the number of permutations of n different things taken r at a time, when each thing may be repeated upto r times.]

মনে করি, প্রদত্ত n-সংখ্যক বস্তু n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর। ঐ n সংখ্যক অক্ষর হইতে একযোগে r অক্ষর লইয়া এবং প্রত্যেক অক্ষর একবার, দুইবার, তিনবার,...... r বার পর্যন্ত লইয়া ঐ শূন্যস্থান মোট যত প্রকারে পূর্ণ করা যাইবে তাহাই হইবে এক্ষেত্রে নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা।

প্রথম শূন্য স্থানটি n প্রকারে পূর্ণ করা যায়, কারণ n সংখ্যক বস্তুর যে কোন একটিকে ঐ স্থানে রাখা যাইতে পারে। যেহেতু একই অক্ষর পুনঃপুনঃ লওয়া যাইতে পারে, সুতরাং প্রথম স্থান n উপায়ে পূর্ণ হইবার পর দ্বিতীয় স্থানও n উপায়ে পূর্ণ করা যাইবে। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n$ বা, n^2 উপায়ে পূর্ণ করা যাইবে। অনুরূপে তৃতীয় স্থানটিও n উপায়ে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান মোট $n^2 \times n$ বা, n^3 উপায়ে পূর্ণ করা যাইবে।

এখন দেখা যাইতেছে যতগুলি শূন্য স্থান পূর্ণ হইতেছে, n এর ঘাতও তত হইতেছে ; এই ভাবে অগ্রসর হইয়া দেখা যাইবে r শূন্যস্থান n^r উপায়ে পূর্ণ হইবে।

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা} = n^r$$

বৃত্তাকারে বিন্যাস (Permutation in a ring or a Circle)।

কিছু সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে এক সারিতে সাজাইলে সেই বিন্যাসকে রৈখিক বিন্যাস (linear permutation) বলে। আর বস্তুগুলিকে বৃত্তাকারে সাজাইলে সেই বিন্যাসকে বৃত্তাকারে বিন্যাস (Circular permutation) বলে। রৈখিক বিন্যাসে দুইটি প্রান্তসীমা থাকে কিন্তু বৃত্তাকারে বিন্যাসে কোন প্রান্তসীমা থাকে না। রৈখিক বিন্যাস বস্তুগুলির স্বতন্ত্র স্থানের উপর নির্ভর করে, কিন্তু বৃত্তাকার বিন্যাস বস্তুগুলির আপেক্ষিক স্থানের উপর নির্ভর করে।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে লইয়া বৃত্তাকারে সাজাইলে বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\underline{|n-1}$, কারণ এক্ষেত্রে বিন্যাস বস্তুগুলির আপেক্ষিক স্থানের উপর নির্ভর করে বলিয়া উহাদের যে কোন একটিকে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$ সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যাস করিলেই এক্ষেত্রে নির্ণেয় বিন্যাস পাওয়া যায়। তবে এক্ষেত্রে যদি clockwise এবং anti-clockwise আবর্তনের কোন প্রভেদ ধরা না হয়, তবে মোট বিন্যাস সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\underline{|n-1}$.

উদা. 1. যদি ${}^{n-1}p_3 : {}^{n+1}p_3 = 5 : 12$ হয়, তবে n এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{{}^{n-1}p_3}{{}^{n+1}p_3}=\frac{5}{12} \qquad \therefore \quad \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)n(n-1)}=\frac{5}{12}$$

বা, $\dfrac{(n-2)(n-3)}{(n+1)n}=\dfrac{5}{12}$ বা, $\dfrac{n^2-5n+6}{n^2+n}=\dfrac{5}{12}$

বা, $12n^2-60n+72=5n^2+5n$ বা, $7n^2-65n+72=0$

বা, $7n^2-56n-9n+72=0$ বা, $7n(n-8)-9(n-8)=0$

বা, $(n-8)(7n-9)=0$ $\therefore$ $n=8$, যেহেতু n অখণ্ড হইবে না।

উদা. 2. প্রমাণ কর $\underline{|2r}=2^r\underline{|r}\{1.\ 3.\ 5\ldots\ldots(2r-1)\}$

$$\begin{aligned}\underline{|2r}&=1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots\ldots(2r-1)2r\\&=2.\ 4.\ 6\cdots\cdots2r\{1.\ 3.\ 5\cdots\cdots(2r-1)\}\\&=2^r(1.\ 2.\ 3\ldots\ldots r)\{1.\ 3.\ 5\ldots\ldots(2r-1)\}\\&=2^r\underline{|r}\{1.\ 3.\ 5\cdots\cdots(2r-1)\}\end{aligned}$$

উদা. 3. একটি ঘরে 8টি চেয়ার আছে ; তিন ব্যক্তি কত রকম ভাবে আসন গ্রহণ করিতে পারে ?

3 ব্যক্তি 8টি চেয়ারে যত প্রকারে বসিতে পারে তাহার সংখ্যা,

$$={}^8P_3=\frac{\underline{|8}}{\underline{|8-3}}=\frac{8.\ 7.\ 6\underline{|5}}{\underline{|5}}=336$$

$\therefore$ তাহারা 336 উপায়ে বসিতে পারে।

উদা. 4. '*Mississippi*' কথাটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট কতটি বিন্যাস গঠন করা যাইবে ?

'*Mississippi*' কথাটির মধ্যে মোট 11টি অক্ষর রহিয়াছে। এবং ইহাদের মধ্যে '*s*' 4টি, '*i*' 4টি এবং '*p*' 2টি করিয়া রহিয়াছে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $=\dfrac{\lfloor 11}{\lfloor 4 \lfloor 4 \lfloor 2}=34650$

$\therefore$ মোট 34650টি বিন্যাস গঠন করা যাইবে।

উদা. 5. '*laughter*' শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট কতটি বিন্যাস গঠন করা যাইবে, যাহাতে স্বরবর্ণগুলি পাশাপাশি থাকে ?

'*laughter*' শব্দটির মধ্যে মোট 8টি অক্ষর রহিয়াছে এবং ইহার মধ্যে (*a u e*) এই তিনটি অক্ষর স্বরবর্ণ। এই স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি অক্ষর ধরিলে মোট অক্ষর হইবে 6টি (*a u e*), *l*, *g*, *h*, *t*, *r*। এই 6টি অক্ষরকে মোট $\lfloor 6$ বা 720 প্রকারে সাজান যায়।

আবার ঐ স্বরবর্ণ তিনটিকে উহাদের নিজেদের মধ্যে $\lfloor 3$ বা, 6 প্রকারে সাজান যায়।

$\therefore$ মোট বিন্যাস সংখ্যা $=6\times720=4320$

উদা. 6. '*Common*' শব্দের *m* অক্ষর দুইটি একত্রে থাকিবে না এরূপ কতরকমে উহার অক্ষরগুলিকে সাজান যায় ?

এখানে দুইটি *m* ও দুইটি *o* আছে এবং মোট অক্ষর 6টি।

$\therefore$ মোট বিন্যাস $=\dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 2}=180$

যেহেতু নির্ণেয় বিন্যাসে *m* দুইটি একত্রে থাকিবে না, সুতরাং প্রথমে *m* দুইটিকে একটি অক্ষর ধরিয়া বিন্যাস করিলে বিন্যাস হইবে $\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 2}=60$; সুতরাং যে বিন্যাসগুলিতে *m* একত্রে থাকিবে না তাহার সংখ্যা $=180-60=120$.

উদা. 7. দুইটি নির্দিষ্ট পুস্তক পাশাপাশি থাকিবে না এরূপে *n* সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তককে কত প্রকারে একটি সারিতে সাজান যায় ? [C. U. '47]

কোন রূপ শর্ত আরোপ না করিলে *n* সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তককে মোট $\lfloor n$ উপায়ে সাজান যাইবে।

যে বিশেষ পুস্তক দুইটি পাশাপাশি থাকিবে না তাহাদের পাশাপাশি রাখিয়া একটি ধরিলে পুস্তকের সংখ্যা $(n-1)$ হইবে এবং তাহাদের মোট $\lfloor n-1$ উপায়ে সাজান যায়। আবার ঐ বিশেষ পুস্তক দুইটিকে উহাদের মধ্যে $\lfloor 2$ বা 2 উপায়ে সাজান যায়। সুতরাং ঐ বিশেষ পুস্তক দুইটি পাশাপাশি আছে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $2\ \lfloor n-1$.

$\therefore$ ঐ বিশেষ পুস্তক দুইটি পাশাপাশি নাই এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= \lfloor n - 2\lfloor n-1$
$= n\lfloor n-1 - 2\lfloor n-1 = (n-2)\lfloor n-1.$

উদা. 8. 0, 1, 2, 3, 4 অঙ্কগুলির সাহায্যে কয়টি পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট সার্থক অযুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

$\therefore$ নির্ণেয় অযুগ্ম সংখ্যাগুলির এককের ঘরে অবশ্যই 1 অথবা 3 থাকিবে।

1 কে এককের ঘরে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 4টি অঙ্কদ্বারা মোট $\lfloor 4 = 24$টি সংখ্যা গঠন করা যায়। কিন্তু ইহাদের মধ্যে যে যে সংখ্যায় o বাঁদিকে থাকিবে তাহারা সার্থক পাঁচ অঙ্ক বিশিষ্ট হইবে না। এরূপ সংখ্যা $\lfloor 3 = 6$টি। সুতরাং 1 এককের ঘরে আছে এরূপ 5 অঙ্ক বিশিষ্ট সার্থক অযুগ্ম সংখ্যা $= 24 - 6 = 18$টি, অনুরূপে 3 কে এককের ঘরে রাখিয়াও 18টি সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 18 + 18 = 36$টি।

উদা. 9. Monday শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট কয়টি বিন্যাস গঠন করা যায় ? ইহাদের মধ্যে কতগুলি M অক্ষর দ্বারা শুরু হইবে না ? কতগুলি M অক্ষর দ্বারা শুরু হইবে কিন্তু y অক্ষর দ্বারা শেষ হইবে না ?

Monday শব্দটির মধ্যে মোট 6টি বিভিন্ন অক্ষর আছে। ইহাদের দ্বারা মোট $\lfloor 6 = 720$টি বিন্যাস গঠন করা যায়।

M কে সুরুতে স্থির রাখিলে অবশিষ্ট 5টি অক্ষর দ্বারা মোট $\lfloor 5 = 120$টি বিন্যাস গঠন করা যায়।

$\therefore$ M শুরুতে থাকিবে না এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= 720 - 120 = 600$টি

M দ্বারা শুরু হইয়াছে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= 120$

M কে শুরুতে এবং y কে শেষে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 4টি অক্ষরকে মোট $\lfloor 4 = 24$ উপায়ে সাজান যায়।

সুতরাং M দ্বারা শুরু কিন্তু y দ্বারা শেষ হইবে না এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $120 - 24 = 96.$

উদা. 10. কত প্রকারে 10 জন বালক-বালিকা আপেক্ষিকভাবে একটি নাগর-দোলায় বসিতে পারে ? [C. U. '27]

1 জন বালক বা বালিকাকে স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 9 জনকে লইয়া বিন্যাস করিলে নির্ণেয় বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $= \lfloor 9$

উদা. 11. 5 জন ইংরাজ এবং 5 জন ভারতীয়কে একটি গোল-টেবিলের চারিদিকে কত রকমভাবে বসান যাইতে পারে যাহাতে কোন দুইজন ইংরাজ পাশাপাশি না বসে ?

একজন ভারতীয়ের অবস্থান ঠিক রাখিয়া অবশিষ্ট 4 জন ভারতীয়কে যত প্রকারে সম্ভব গোল-টেবিলের পাশে পাশে বসাইলে মোট $\underline{|4}$ বা 24টি বিন্যাস হইবে।

এই 24টি বিন্যাসের প্রত্যেক বিন্যাসের জন্য প্রতি দুইজন ভারতীয়ের মধ্যে একজন করিয়া ইংরাজকে বসান হইলে 5 জন ইংরাজকে ঐরূপ 5টি স্থানে বসান যাইবে এবং দুইজন ইংরাজ পাশাপাশি থাকিবে না।

5 জন ইংরাজকে ঐরূপ 5টি স্থানে $\underline{|5}$ বিভিন্ন প্রকারে সাজান যায়। অতএব, ভারতীয়দের প্রতিটি বিন্যাসের সহিত ইংরাজদের $\underline{|5}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। যেহেতু প্রথম ভারতীয়কে স্থির রাখিবার সময় সে 10টি শূন্য স্থানের যে কোন একটিতে থাকিতে পারে, সুতরাং তাহার অবস্থান 10 প্রকারে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= 10 \times \underline{|4} \times \underline{|5} = 28800$

উদা. 12. আবৃত্তির জন্য একটি, অভিনয়ের জন্য একটি এবং সঙ্গীতের জন্য একটি—এই 3টি পুরস্কার 10 জন বালকের মধ্যে কতরকমভাবে বিতরণ করা যায় ?

যেহেতু প্রথম পুরস্কার যে-কোন বালককে দেওয়া যায়, সুতরাং প্রথম পুরস্কার মোট 10 প্রকারে দেওয়া যায়। একটি পুরস্কার দেওয়ার পর সেইটি যত প্রকারে দেওয়া হইয়াছে, তাহার প্রত্যেক প্রকারের জন্য দ্বিতীয় পুরস্কারটি 10 প্রকারে দেওয়া যাইবে।

$\therefore$ প্রথম দুইটি পুরস্কার 10×10 বা 10^2 প্রকারে বিতরণ করা যাইবে। অনুরূপভাবে 3টি পুরস্কার মোট 10^3 বা 1000 উপায়ে বিতরণ করা যাইবে।

উদা. 13. 15 জন উচ্চ মাধ্যমিক এবং 12 জন মাধ্যমিক পরীক্ষার্থীকে একটি সারিতে কতরকমভাবে বসান যায়, যাহাতে কোন দুইজন মাধ্যমিক পরীক্ষার্থী পাশাপাশি না থাকে ?

15 জন উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষার্থীর মধ্যবর্তী 14টি এবং দুই পাশে 2টি মোট $(14+2)$ বা 16টি স্থানের যে কোন 12টি স্থানে মাধ্যমিক পরীক্ষার্থীরা বসিলে কোন দুইজন মাধ্যমিক পরীক্ষার্থী পাশাপাশি থাকিবে না। 12 জন মাধ্যমিক পরীক্ষার্থীকে 16টি স্থানে মোট ${}^{16}P_{12}$ উপায়ে বসিতে পারে। আবার 15 জন উচ্চ মাধ্যমিক পরীক্ষার্থী মোট $\underline{|15}$ উপায়ে বসিতে পারে। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{16}P_{12} \times \underline{|15}$.

উদা. 14. 10টি বস্তু হইতে একযোগে 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে তাহাদের কতকগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (i) কখনও থাকিবে না, (ii) সর্বদা থাকিবে ?

[C. U. '36]

10টি বস্তু হইতে 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে বিন্যাস সংখ্যা হইবে $^{10}P_4$ $=10.\ 9.\ 8.\ 7=5040$.

(i) ঐ 10টি বস্তুর মধ্যে যে নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকিবে না তাহাকে পূর্ব হইতে পৃথক করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(10-1)$ বা 9টি হইতে প্রতিবার 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস করিলে মোট বিন্যাস সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $={}^9P_4=9,\ 8,\ 7,\ 6=3024$

(ii) সুতরাং যে বিন্যাসগুলিতে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকিবে তাহাদের নির্ণেয় সংখ্যা $=5040-3024=2016$

উদা. 15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 এই 7টি বিভিন্ন অঙ্ক দ্বারা কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে, যাহাতে বিজোড় অঙ্কগুলি কেবলমাত্র বিজোড় স্থানে বসে ?

এখানে 1, 3, 5 এই তিনটি বিজোড় অঙ্ক এবং 2, 4, 6, 8 এই চারটি জোড় অঙ্ক আছে এবং এখানে 4টি বিজোড় স্থান এবং 3টি জোড় স্থান আছে।

3টি বিজোড় অঙ্ককে 4টি বিজোড় স্থানে মোট $^4P_3$ উপায়ে বসান যায়। অবশিষ্ট 4টি স্থানে 4টি জোড় অঙ্ককে মোট $\lfloor 4$ উপায়ে বসান যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস $={}^4P_3\times\lfloor 4=24\times 24=576$

উদা. 16. 0, 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলির সাহায্যে 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং যাহাতে কোন অঙ্ক একবারের বেশী থাকিবে না এরূপ কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় ?

এখানে সংখ্যাগুলি 5 দ্বারা বিভাজ্য বলিয়া উহাদের এককের ঘরের অঙ্ক 0 অথবা 5 হইবে। অর্থাৎ, সংখ্যাগুলি 1000 অপেক্ষা কম বলিয়া 1, 2 অথবা 3 অঙ্কবিশিষ্ট হইবে।

(i) এক অঙ্কবিশিষ্ট 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 1টি (অর্থাৎ 5)।

(ii) 0 কে এককের ঘরে রাখিলে দুই অঙ্ক বিশিষ্ট সংখ্যা হইবে $^5P_1$ অর্থাৎ 5টি।

আবার 5 কে এককের ঘরে রাখিলে 0 দশকের ঘরে থাকিবে না (কারণ সেক্ষেত্রে উহা দুই অঙ্কবিশিষ্ট হইবে না), সুতরাং 4টি অঙ্ক দ্বারা মোট $^4P_1$ বা 4টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে।

$\therefore$ দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা $=5+4=9$টি।

(iii) 0 কে একক অঙ্ক ধরিলে মোট তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার পরিমাণ=অবশিষ্ট 5টি অঙ্ক হইতে 2টি করিয়া লইয়া দশক এবং শতকের ঘর যত প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

∴ ঐরূপ সংখ্যা হইবে $= {}^5P_2 = 5.4 = 20$টি

আবার 5 কে এককের ঘরে ধরিলে তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা অনুরূপ 20টি হইবে। কিন্তু যে যে সংখ্যাগুলির শতকের অঙ্ক 0 তাহারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট হইবে না, সেগুলি বাদ দিতে হইবে। সুতরাং এককের ঘরে 5 এবং শতকের ঘরে 0 রাখিয়া বাকী স্থানকে অবশিষ্ট 4টি অঙ্ক দ্বারা মোট ${}^4P_1$ বা 4 উপায়ে পূরণ করা যায়।

∴ একক ঘরে 5 আছে এরূপ তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা $= 20 - 4 = 16$

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= 1 + 9 + 20 + 16 = 46$

Exercise—12

1. মান নির্ণয় কর : (i) ${}^8P_5$ (ii) ${}^{12}P_4 \div {}^{10}P_4$

2. যদি ${}^{n+1}P_4 : {}^{n-1}P_3 = 72 : 5$, n এর মান নির্ণয় কর।

3. যদি ${}^{m+n}P_2 = 56$ এবং ${}^{m-n}P_2 = 12$ হয়, তবে m, n এর মান কত ?

4. দেখাও যে, ${}^{n-1}P_r = (n-r).{}^{n-1}P_{r-1}$

5. দেখাও যে, ${}^nP_{r-1} = {}^{n-1}P_{r-1} + (r-1).{}^{n-1}P_{r-2}$

6. একটি অঞ্চলে মোট 6টি কলেজ আছে। এক ভদ্রলোক তাহার তিন পুত্রকে মোট কত প্রকারে কলেজে ভর্তি করাইতে পারেন যাহাতে একই কলেজে দুই পুত্র না ভর্তি হয়।

7. *Policy* শব্দটির অক্ষরগুলি সব কয়টি একযোগে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যাইবে ?

8. *Indian* শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট কতগুলি বিন্যাস গঠন করা যাইবে, তাহা নির্ণয় কর।

9. কোন রেলপথে যদি 16টি স্টেশন থাকে, তবে যে কোন স্টেশন হইতে অন্য যে কোন স্টেশনে যাইবার জন্য কতগুলি বিভিন্ন প্রকারের দ্বিতীয় শ্রেণীর টিকিট প্রয়োজন হইবে ?

10. মনে কর কলিকাতা হইতে শিবপুর 5টি লঞ্চ যাতায়াত করে, এক ব্যক্তি কলিকাতা হইতে শিবপুরে গিয়া ভিন্ন লঞ্চে মোট কত প্রকারে ফিরিয়া আসিতে পারিবে ?

11. *Examination* শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যায় এবং তাহাদের কতটি E দ্বারা শুরু হইবে ?

12. *Purpose* শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া কতগুলি বিন্যাস করা যাইবে? কতটি বিন্যাসের মধ্যে দুইটি p পাশাপাশি থাকিবে?

13. *Machine* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজান যায় যাহাতে স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র বিজোড় স্থানে থাকে।

14. প্রমাণ কর যে *Calcutta* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যা, *America* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যার দ্বিগুণ।

15. 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি হইতে প্রতিবার 4টি করিয়া লইয়া মোট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

16. 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি দ্বারা 4000 হইতে 5000-এর মধ্যে মোট কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

17. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলিকে (প্রত্যেকটি একবার করিয়া) লইয়া কতটি যুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যাইবে?

18. 3, 2, 7, 4, 0 অঙ্কগুলি লইয়া পাঁচটি সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অযুগ্ম সংখ্যা গঠন করা যায়?

19. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ও 9 অঙ্কগুলির সাহায্যে (প্রত্যেকটি একবার করিয়া) 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ও 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

20. 6টি পরীক্ষার উত্তর পত্রকে কত রকম ভাবে সাজান যাইতে পারে যাহাতে সর্বাধিক এবং সর্বনিম্ন নম্বর পাওয়া উত্তর পত্রদ্বয় সর্বদাই (i) পাশাপাশি থাকে (ii) কখনই পাশাপাশি থাকিবে না।

21. 10টি বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করা যাইবে যাহাতে একটি বিশেষ বস্তু (i) সর্বদাই থাকিবে (ii) কখনই থাকিবে না? [C. U. '36]

22. '*Failure*' শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া কতটি বিন্যাস গঠন করা যাইবে যাহাতে স্বরবর্ণগুলি সর্বদাই পাশাপাশি থাকে। [C. U. '40]

23. *Character* শব্দটির অক্ষগুলি দ্বারা মোট কতটি বিন্যাস গঠন করা যাইবে? কতটি বিন্যাসে দুইটি C পাশাপাশি থাকিবে না?

24. প্রমাণ কর *anticipation* শব্দটির অক্ষরগুলি দ্বারা বিন্যাস সংখ্যা *Commencement* শব্দটির অক্ষরগুলির বিন্যাস সংখ্যার তিনগুণ।

25. *Sunday* শব্দটির অক্ষরগুলিকে মোট কত প্রকারে সাজান যায়? ইহাদের মধ্যে কতগুলি s দ্বারা শুরু হইবে না? কতগুলি s দ্বারা শুরু হইবে কিন্তু y দ্বারা শেষ হইবে না?

26. 6 জন বালক ও 5 জন বালিকাকে একটি সারিতে কতরকম ভাবে বসান যাইবে যাহাতে 2 জন বালিকা কখনই পাশাপাশি না থাকে ?

27. 6 জন বালক কত প্রকারে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ?

28. বিভিন্ন বর্ণের 8টি মুক্তা দিয়া কত প্রকারে মালা গাঁথা যায় ?

29. 4 জন কলাবিভাগের এবং 4 জন বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্রকে একটি গোল টেবিলের চারিদিকে কত রকম ভাবে বসান যাইবে যাহাতে যে কোন বিভাগের দুইজন ছাত্রের মধ্যে অন্য বিভাগের একজন ছাত্র থাকে।

30. 5 জন শিক্ষক ও 5 জন ছাত্র একটি গোল টেবিলের ধারে কত প্রকারে বসিতে পারিবে যাহাতে দুইজন ছাত্র পাশাপাশি থাকিবে না ?

31. একটি পাঠাগারে কোন পুস্তকের 5 কপি, অন্য দুই পুস্তকের 4 কপি করিয়া অপর তিন পুস্তকের 6 কপি করিয়া এবং 8টি বিভিন্ন পুস্তক এক কপি করিয়া আছে। সব পুস্তকগুলিকে কত প্রকারে সাজান যাইবে ? [C. U. '34]

32. 3, 4, 5 দ্বারা 4 অঙ্কের অধিক নহে এরূপ কয়টি সংখ্যা গঠন করা যাইবে ?

33. 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণের সাহায্যে পাঁচ অক্ষরের কয়টি শব্দ গঠন করা যায় যাহাতে কোন দুইটি ব্যঞ্জনবর্ণ পাশাপাশি থাকিবে না ? [C. U. '29]

34. একটি সৎ স্বভাব, একটি নিয়মিত উপস্থিতি এবং একটি সাধারণ উৎকর্ষতা— এই তিনটি পুরস্কার 15 জন বালকের মধ্যে কত প্রকারে বিতরণ করা যায় ?

35. এক ব্যক্তি 5টি চিঠি 4টি ডাকবাক্সের মধ্যে মোট কত প্রকারে ফেলিতে পারে ?

36. '*Laughter*' শব্দটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট কতটি বিন্যাস গঠন করা যাইবে যাহাতে স্বরবর্ণগুলি সর্বদাই পাশাপাশি থাকে ?

37. 7টি বিভিন্ন বর্ণের (বেগুনী, নীল, আকাশী, সবুজ, হলুদ, কমলা, লাল) ত্রিফলাকার কাঁচফলককে কত বিভিন্ন রকমে সাজাইলে কোনটিতে নীল ও সবুজ রঙ্-এর ফলক একত্রে থাকিবে না ? [C. U. '55]

38. প্রতিটি 3 খণ্ডের দুই রকম পুস্তক ও প্রতিটি 2 খণ্ডের দুই রকম পুস্তক আছে। একই রকম পুস্তক পরস্পর বিচ্ছিন্ন না হয় এরূপ ভাবে ঐ 10খানি পুস্তককে কত প্রকারে এক তাকে সাজান যায় ? [P. U. '46]

39. n বিভিন্ন বস্তু হইতে যদি একযোগে p বস্তুর অধিক লওয়া না হয় এবং যদি প্রত্যেক বস্তুকে n বার পর্যন্ত লওয়া যায়, তবে প্রমাণ কর যে মোট $\frac{n(n^p-1)}{n-1}$ সংখ্যক বিন্যাস হইতে পারে।

40. প্রমাণ কর n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যাস করিলে যাহার মধ্যে দুইটি বস্তু সর্বদাই পাশাপাশি থাকিবে তাহার পরিমাণ,

$$2(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots(n-r+1)$$

সমবায় (Combination)

বিন্যাসের অংশে সমবায় সম্বন্ধে পূর্বেই কিছু আলোচনা করা হইয়াছে।

কতকগুলি বস্তু হইতে সবগুলি বা কয়েকটি করিয়া একযোগে লইয়া যত প্রকার দল (group) বা নির্বাচন (selection) করা যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি **সমবায়** (combination) বলে।

প্রত্যেকটি সমবায়ের বস্তুগুলিকে লইয়া পৃথক বিন্যাস গঠন করা গেলেও উহারা পৃথক সমবায় হইবে না। যেমন a, b, c তিনটি অক্ষরের যে কোন দুইটিকে লইয়া ab, bc, ca তিনটি সমবায় গঠন করা যায়। ba, cb, ac পৃথক বিন্যাস হইল কিন্তু পৃথক সমবায় হইবে না।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, তাহা সংক্ষেপে ^nC_r, $_nC_r$ বা $\binom{n}{r}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিভিন্ন বস্তুর সমবায় (Combination of things all different) :

উপপাদ্য : n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা নির্ণয় (r⩽n)।

[To find the number of Combinations of n different things taken r at a time. ($r \leqslant n$)]

মনে করি নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $=x$ $\quad\therefore\ x={}^nC_r$

এখানে প্রত্যেক সমবায়ে r সংখ্যক বস্তু আছে। যদি প্রতি সমবায়ের r বস্তুকে নিজেদের মধ্যে সাজান যায় তবে প্রতি ক্ষেত্রে $\underline{|r}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং x সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $x\underline{|r}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

আবার, এই x সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত বস্তুগুলিকে যত প্রকারে সম্ভব সাজাইলে n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া যতগুলি বিন্যাস হয়, তাহাই পাওয়া যায় অর্থাৎ ^nP_r বিন্যাস পাওয়া যায়।

$$\therefore\ x\underline{|r}={}^nP_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} \qquad \therefore\ x=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}.$$

বিকল্প প্রমাণ : (বিন্যাস সূত্রের সাহায্য না লইয়া) (Alternative proof without assuming the formula for permutation).

মনে করি n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু n সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$. এবং মোট সমবায় সংখ্যা ^nC_r ।

প্রতি সমবায় যাহার মধ্যে একটি বিশেষ অক্ষর a_1 থাকিবে, তাহা অবশিষ্ট $(n-1)$ অক্ষর, $a_2, a_3 \cdots\cdots a_n$ হইতে একযোগে $(r-1)$ অক্ষর লইয়া যতগুলি সমবায় হইবে তাহাদের প্রত্যেকটির সহিত a_1 অক্ষরটিকে সংযুক্ত করিয়া পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ যে সমবায়গুলিতে একটি বিশেষ অক্ষর রহিয়াছে সেগুলির সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$.

অতএব যদি n-অক্ষর হইতে একযোগে r অক্ষর লইয়া সমস্ত সমবায়গুলি লেখা যায়, তবে প্রত্যেক অক্ষর, সেইগুলিতে $^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া আছে।

$\therefore$ ঐ সমবায়গুলিতে মোট অক্ষর সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$

আবার মোট সমবায় সংখ্যা ^nC_r ধরা হইয়াছে এবং প্রত্যেক সমবায়ে r সংখ্যক অক্ষর আছে। অতএব সমস্ত সমবায়ে মোট অক্ষর সংখ্যা $= r \times {}^nC_r$.

$$\therefore \quad r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$$

অনুরূপে, $${}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}$$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1$$

$${}^{n-r+1}C_1 = \frac{n-r+1}{1}$$

বামপক্ষের রাশিগুলি এবং ডানপক্ষের রাশিগুলি গুণ করিয়া এবং ঐ দুই গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপনয়ন করিলে পাই,

$${}^nC_r = \frac{n}{r} \times \frac{n-1}{r-1} \times \frac{n-2}{r-2} \times \cdots\cdots \times \frac{n-r+1}{1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \cdots\cdots(1)$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $^nC_1 = n$

(i) নং এ $r=1$ বসাইয়া পাই, $^nC_1 = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}} = \dfrac{n\underline{|n-1}}{\underline{|n-1}} = n$

(ii) $^nC_n = 1$, (1) নং এ $r=n$ বসাইয়া পাই, $^nC_n = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n-n}} = \dfrac{1}{\underline{|0}} = 1$

(iii) $^nC_o = 1$, (1) নং এ $r=0$ বসাইয়া পাই $^nC_o = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|0}\,\underline{|n-0}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}} = 1$

পূরক সমবায় (Complementary Combinations) :

উপপাদ্য : n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা এবং n বিভিন্ন বস্তু হইতে $(n-r)$ বস্তু একসঙ্গে লইয়া সমবায়ের সংখ্যা সমান হইবে।

প্রমাণ : (সূত্র সাহায্যে)

$$^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}},$$ r এর পরিবর্তে $n-r$ বসাইয়া পাই,

$$^nC_{n-r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|n-(n-r)}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}} \qquad \therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

[সরল করার ক্ষেত্রে এই সূত্রটি বিশেষ সুবিধাজনক]

(সূত্র প্রয়োগ না করিলে)

n বিভিন্ন বস্তু হইতে r বস্তু তুলিয়া লইলে $(n-r)$ বস্তু পড়িয়া থাকে। অতএব ঐ n বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া নির্বাচন করিলে প্রত্যেক নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে $(n-r)$ বস্তু পৃথকভাবে নির্বাচিত হইয়া পড়িয়া থাকে। অতএব প্রথম প্রক্রিয়াটি যত প্রকারে করা যায়, দ্বিতীয় প্রক্রিয়াটি ঠিক তত প্রকারেই করা যায়।

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $^nC_x = {}^nC_y$ হয় তবে $x=y$ অথবা $x+y=n$ হইবে।

যেহেতু n বস্তু হইতে একযোগে x বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয়, একযোগে y বস্তু লইলেও ততগুলি সমবায় হয়, $\quad \therefore \ x=y$।

আবার $^nC_x = {}^nC_{n-x}$ যেহেতু $^nC_x = {}^nC_y \quad \therefore \ {}^nC_{n-x} = {}^nC_y$

$$\therefore \quad n-x=y \qquad \therefore \quad x+y=n$$

সূত্র : প্রমাণ কর, $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ [H. S. '66]

$(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r বস্তু লইয়া সমবায়ের সংখ্যা = উহাদের কোন একটি নির্দিষ্ট বস্তু যতগুলি সমবায়ে আছে + ঐ বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে নাই।

নির্দিষ্ট বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে আছে তাহার সংখ্যা = অবশিষ্ট n বস্তু হইতে $(r-1)$ বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $= {}^nC_{r-1}$

আবার ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে নাই তাহাদের সংখ্যা $= n$ বস্তু হইতে r বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় $= {}^nC_r$

$$\therefore\quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$$

বিকল্প প্রমাণ :

$$\text{বামপক্ষ} = {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r}\left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right\} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r} \cdot \frac{n+1}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor n-r+1} = {}^{n+1}C_r.$$

দুইটি প্রয়োজনীয় সূত্র :

1. n বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মধ্যে যাহাতে p সংখ্যক বস্তু সর্বদাই থাকিবে তাহার সংখ্যা ${}^{n-p}C_{r-p}$ ।

এখানে অবশ্যই $r>p$ হইবে। মনে করি প্রথম ঐ নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু পৃথক করিয়া রাখা হইল। অতএব অবশিষ্ট $(n-p)$ সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে $(r-p)$ সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায় গঠন করিলেই নির্ণেয় সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। যেহেতু p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু পূর্বেই পৃথক করিয়া রাখা হইয়াছে, সুতরাং প্রতি সমবায়ে ঐ p সংখ্যক বস্তু যুক্ত করিলেই নির্ণেয় সমবায় হইবে।

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা} = {}^{n-p}C_{r-p}$$

2. n বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মধ্যে যাহাতে p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকিবে না তাহার সংখ্যা ${}^{n-p}C_r$.

যেহেতু ঐ নির্দিষ্ট p সংখ্যক বস্তু কোন সমবায়েই থাকিবে না, সুতরাং ঐ p সংখ্যক বস্তুকে পূর্ব হইতে পৃথক করিয়া অবশিষ্ট $(n-p)$ সংখ্যক বস্তু হইতে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু লইয়া সমবায় গঠন করিলেই নির্ণেয় সমবায় পাওয়া যাইবে। কারণ ঐ p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু পূর্বেই পৃথক করিয়া রাখায় কোন সমবায়েই তাহারা থাকিবে না।

$$\therefore\quad \text{নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা} = {}^{n-p}C_r.$$

উপপাদ্য : n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে সম্ভাব্য যতগুলি ইচ্ছা বস্তু লইয়া সমবায়গুলির মোট সংখ্যা নির্ণয়।

(To find the number of Combinations of n different things taken all possible numbers at a time.)

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে নির্বাচন করার সময়, প্রত্যেকটি বস্তু লইয়া দুই প্রকার প্রক্রিয়া হইতে পারে। হয় বস্তুটি নির্বাচিত হইবে অথবা বস্তুটি পরিত্যক্ত হইবে। প্রদত্ত n বস্তুর প্রত্যেকটি লইয়াই এরূপ দুই প্রকার প্রক্রিয়া হইবে।

$\therefore$ n বস্তুর মোট প্রক্রিয়ার সংখ্যা $=2\times2\times2\times\cdots\cdots n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=2^n$.

কিন্তু এই 2^n সংখ্যক প্রক্রিয়ার মধ্যে এমন একটি প্রক্রিয়া আছে, যাহাতে সমুদয় বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে। কিন্তু কোন বস্তুই থাকিবে না এরূপ প্রক্রিয়া হইতে পারে না। সুতরাং ঐ প্রক্রিয়াটি বাদ দিলে নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $=2^n-1$.

দ্রষ্টব্য : n বিভিন্ন বস্তু হইতে ইচ্ছানুসারে একযোগে একটি, দুইটি, তিনটি,……, n সংখ্যক বস্তু পর্যন্ত লওয়া যাইতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $={}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots\cdots+{}^nC_n$

$$\therefore\ {}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\ldots\ldots+{}^nC_n=2^n-1$$

উপপাদ্য : p+q+r+……সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্যে একপ্রকার অভিন্ন বস্তু p-সংখ্যক, দ্বিতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু q-সংখ্যক, তৃতীয় প্রকার অভিন্ন বস্তু r-সংখ্যক, ইত্যাদি আছে। উহাদের যতগুলি ইচ্ছা একযোগে লইয়া মোট সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয়।

p অভিন্ন বস্তু হইতে $(p+1)$ প্রকার নির্বাচন করা যায় ; কারণ, ঐ p বস্তু হইতে আমরা একযোগে 1, 2, 3,……বা p বস্তু লইতে পারি, সুতরাং মোট p প্রকার নির্বাচন হয়। আবার একটি প্রক্রিয়ায় উহাদের কোনটিই না লইতে পারি। অতএব এই নির্বাচনটি ধরিয়া মোট $(p+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। অনুরূপভাবে q অভিন্ন বস্তু হইতে $(q+1)$ প্রকার, r অভিন্ন বস্তু হইতে $(r+1)$ প্রকার ইত্যাদি নির্বাচন হইবে।

এখন প্রথম $(p+1)$ প্রকার নির্বাচনের প্রত্যেকটিকে দ্বিতীয় $(q+1)$ প্রকার নির্বাচনের সহিত যুক্ত করিলে p ও q বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। অনুরূপে p, q ও r বস্তু হইতে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$ প্রকার নির্বাচন হইবে। এইভাবে মোট নির্বাচন হইবে $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots$, কিন্তু ইহাদের

মধ্যে এমন একটি নির্বাচন আছে যাহাতে সবগুলি বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে। ঐ নির্বাচনটি গ্রাহ্য হইবে না।

$\therefore$ মোট নির্বাচন সংখ্যা $=\{(p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots\}-1$

উপপাদ্য : $(m+n)$ বস্তুকে কত প্রকারে এইরূপ দুইভাগে বিভক্ত করা যায় যাহাতে একভাগে m বস্তু এবং অপর ভাগে n বস্তু থাকে $(m\neq n)$।

$(m+n)$ বস্তু হইতে এক ভাগে m বস্তু লইলে অপর ভাগে n সংখ্যক বস্তু থাকিবে।

$(m+n)$ বস্তু হইতে m বস্তুকে মোট $^{m+n}C_m$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়। এই ভাগটির প্রতি প্রকার নির্বাচনের সঙ্গে সঙ্গে অপর যে n বস্তু অবশিষ্ট থাকে সেই n বস্তু হইতে একযোগে n বস্তু লইয়া অপর ভাগটি নির্বাচন করা যাইবে। ঐ নির্বাচনের সংখ্যা $={}^nC_n=1$

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $={}^{m+n}C_m\times 1=\dfrac{\lfloor m+n}{\lfloor m\lfloor m+n-m}=\dfrac{\lfloor m+n}{\lfloor m\lfloor n}$

[অনুরূপ ভাবে প্রথমে একভাবে n বস্তু লইলে অপর ভাগে m বস্তু পড়িয়া থাকিবে।]

অনুসিদ্ধান্ত : (i) যদি $n=m$ হয়, তবে প্রত্যেক ভাগেই m বস্তু থাকায় ভাগগুলি সমান হইবে। সেক্ষেত্রে মোট নির্বাচন সংখ্যা $\dfrac{\lfloor m+m}{\lfloor m\lfloor m}$ হইবে না। কারণ, দুই ভাগেই m বস্তু থাকায় তাহারা অভিন্ন, এবং ভাগগুলি অদল-বদল করিলে ও কোন পার্থক্য দৃষ্ট হয় না অর্থাৎ নূতন কোন সমবায় পাওয়া যায় না। অতএব, এরূপক্ষেত্রে যত প্রকার নির্বাচন করা যায় তাহার সংখ্যা $=\dfrac{\lfloor m+m}{\lfloor m\lfloor m\lfloor 2}=\dfrac{\lfloor 2m}{2(\lfloor m)^2}$

(ii) যদি $(m+n+p)$ সংখ্যক বস্তু থাকে এবং সেইগুলিকে এরূপ তিনভাগে বিভক্ত করা যায় যাহাতে একভাগে m, একভাগে n এবং একভাগে p বস্তু থাকে তবে ঐ প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\dfrac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m\lfloor n\lfloor p}$.

$(m+n+p)$ সংখ্যক বস্তু হইতে m সংখ্যক বস্তুকে $^{m+n+p}C_m$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়। অবশিষ্ট $(n+p)$ বস্তু হইতে n বস্তুকে $^{n+p}C_n$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়। সর্বশেষে অবশিষ্ট p সংখ্যক বস্তু হইতে p সংখ্যক বস্তুকে ^pC_p বা 1 উপায়ে নির্বাচন করা যায়। যেহেতু প্রতি প্রকার m ভাগের সহিত প্রতি প্রকার n ভাগকে সংযুক্ত করা যায়, সুতরাং নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $={}^{m+n+p}C_m\times{}^{n+p}C_n$

$$=\frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m\lfloor n+p}\times\frac{\lfloor n+p}{\lfloor n\lfloor p}=\frac{\lfloor m+n+p}{\lfloor m\lfloor n\lfloor p}.$$

এখানে যদি $m=n=p$ হয়, তবে এই প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 3m}{(\lfloor m)^3 \lfloor 3}$। যদি $3m$ বস্তু তিনজনকে সমভাবে ভাগ করিয়া দিতে হয়, তবে সেই প্রক্রিয়ার সংখ্যা হইবে $\frac{\lfloor 3m}{(\lfloor m)^3}$.

দ্রষ্টব্য: যে কোন সংখ্যক ভাগের জন্য উপরের প্রক্রিয়াগুলি সঠিক হইবে।

${}^nC_r$ **এর বৃহত্তম মান** (Greatest value of ${}^nC_r$).

উপপাদ্য: r-এর মান কত হইলে n-বস্তু হইতে একযোগে r-বস্তু লইয়া সমবায় সংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক হইবে।

[To find for what value of r the number of combinations of n things taken r at a time is greatest.]

আমরা পূর্বেই পাইয়াছি, ${}^nC_r = \frac{n-r+1}{r} \times {}^nC_{r-1}$

$\therefore$ ${}^nC_r >$ = অথবা $<$ ${}^nC_{r-1}$ হইবে,

যদি $\frac{n-r+1}{r} >$ = অথবা < 1 হয়,

অর্থাৎ, যদি $n-r+1 >$ = অথবা $< r$ হয়,

যদি $n+1 >$ = অথবা $< 2r$ হয়,

যদি $r <$ = অথবা $> \frac{n+1}{2}$ হয়।

এখানে r এর মান ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইবে।

(i) যদি n যুগ্ম সংখ্যা হয়, তবে $\frac{n+1}{2}$ একটি ভগ্নাংশ হইবে, কারণ তখন $(n+1)$ অযুগ্ম সংখ্যা হইবে। সুতরাং এক্ষেত্রে r এর সর্বাধিক মান $\frac{n}{2}$ হইতে পারে। কারণ r-এর মান যদি $\frac{n}{2}$ অপেক্ষা কমপক্ষে 1 অধিক হয়, তবে $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ সংখ্যাটি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা বড় হইয়া যাইবে। সুতরাং ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ${}^nC_r$ বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{n}{2}$ হয় এবং ঐ বৃহত্তম মান ${}^nC_{\frac{n}{2}}$.

(ii) যদি n অযুগ্ম হয়, তবে, $\frac{n+1}{2}$ পূর্ণ সংখ্যা হইবে। অতএব এক্ষেত্রে $r=\frac{n+1}{2}$ হইলে ${}^nC_r = {}^nC_{r-1}$ হইবে, এবং r এর মান যদি $\frac{n+1}{2}$ অপেক্ষা কমপক্ষে 1 বেশী হয়, তবে ${}^nC_{r-1}$ অপেক্ষা ${}^nC_r$ ছোট হইয়া যাইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে ^nC_r বৃহত্তম হইবে যদি $r=\dfrac{n+1}{2}$ অথবা $\dfrac{n-1}{2}$ হয়, কারণ উভয় ক্ষেত্রে একই মান হইবে এবং ঐ বৃহত্তম মান $^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ অথবা $^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}$

উদা. 1. $^{10}C_8$ এর মান নির্ণয় কর।

$$^{10}C_8={}^{10}C_{10-8}={}^{10}C_2=\frac{10.9}{2.1}=45 \quad [\because {}^nC_r={}^nC_{n-r}]$$

উদা. 2. $^{n+2}C_{n-5}={}^{n+2}C_n$ হইলে n এর মান নির্ণয় কর।

$^{n+2}C_{n-5}={}^{n+2}C_n \quad \therefore \; n-5+n=n+2$ [$\because$ $^nC_x={}^nC_y$ হইলে, $x=y$]

$\therefore \; n=7.$

উদা. 3. যদি $m={}^nC_2$ হয়, দেখাও যে, $^mC_2=3.{}^{n+1}C_4$ [C. U. '12]

$$m={}^nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$^mC_2=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{\dfrac{n(n-1)}{2}\left\{\dfrac{n(n-1)}{2}-1\right\}}{2}=\frac{n(n-1)\{n(n-1)-2\}}{8}$$

$$=\frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{4.2.1.}=\frac{n(n-1)(n+1)(n-2)}{4.2.1}$$

$$=3.\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4.3.2.1}=3.{}^{n+1}C_4$$

উদা. 4. যদি $^nP_r=336$ এবং $^nC_r=56$ হয়, তবে n এবং r-এর মান নির্ণয় কর। [H. S. '70]

$$^nP_r=336 \quad \text{বা,} \quad \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}=336$$

আবার, $^nC_r=56$ বা, $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}=56$ বা, $\dfrac{336}{\underline{|r}}=56$

বা, $\underline{|r}=\dfrac{336}{56}=6=\underline{|3}$ $\quad\therefore \; r=3$

এখন $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}=336$ বা, $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-3}}=336$ বা, $\dfrac{n(n-1)(n-2)\underline{|n-3}}{\underline{|n-3}}=336$

বা, $n(n-1)(n-2)=336$ বা, $n(n-1)(n-2)=8.7.6$

বা, $n(n-1)(n-2)=8(8-1)(8-2)$ $\quad\therefore \; n=8$

উদা. 5. 10 জন খেলোয়াড় হইতে 4 জনকে কত প্রকারে নির্বাচন করা যাইবে ?

এখানে 10 জন খেলোয়াড় হইতে 4 জনকে একযোগে নির্বাচন করা যাইবে তাহাই নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা হইবে।

∴ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{10}C_4 = \dfrac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$

উদা. 6. 5টি স্বরবর্ণ ও 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ লইয়া কতটি শব্দ গঠন করা যাইবে যাহাতে 2টি স্বরবর্ণ ও 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ থাকিবে ? [C. U. '32]

5টি স্বরবর্ণ হইতে 2টি স্বরবর্ণকে লইয়া শব্দ গঠন করিলে সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^5C_2$। আবার 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে 3টি স্বরবর্ণ লইয়া শব্দ গঠন করিলে সমবায় সংখ্যা হইবে ${}^{17}C_3$।

∴ দুইটি প্রক্রিয়া মিলিতভাবে করিলে মোট সমবায় সংখ্যা $= {}^5C_2 \times {}^{17}C_3$

আবার প্রত্যেক সমবায়ে যে 5টি অক্ষর আছে, তাহারা নিজেদের বিভিন্ন প্রকারে সজ্জিত হইয়া মোট $\underline{|5} = 120$টি বিন্যাস গঠন করিবে।

∴ মোট শব্দ সংখ্যা $= {}^5C_2 \times {}^{17}C_3 \times 120$

$$= \frac{5.4}{2.1} \times \frac{17.16.15}{3.2.1} \times 20 = 816000$$

উদা. 7. 7 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলা হইতে 5 জনের একটি করিয়া কমিটি গঠন করিতে হইবে। যদি প্রতি কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলা থাকে তবে মোট কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যাইবে ? [C. U. '48]

যেহেতু কমিটিতে 4 জন মহিলার মধ্যে অন্ততঃপক্ষে 1 জন মহিলা থাকিবে, সুতরাং নিম্নলিখিতভাবে কমিটিগুলি গঠন করা যাইতে পারে।

(i) 4 জন মহিলা হইতে 1 জনকে এবং 7 জন পুরুষ হইতে বাকী 4 জনকে লইয়া মোট ${}^4C_1 \times {}^7C_4$ সমবায় গঠন করা যাইবে।

(ii) 4 জন মহিলা হইতে 2 জনকে এবং 7 জন পুরুষ হইতে বাকী 3 জনকে লইয়া মোট ${}^4C_2 \times {}^7C_3$ সমবায় গঠন করা যাইবে।

(iii) 4 জন মহিলা হইতে 3 জনকে এবং 7 জন পুরুষ হইতে বাকী 2 জনকে লইয়া মোট ${}^4C_3 \times {}^7C_2$ সমবায় গঠন করা যাইবে।

(iv) 4 জন মহিলা হইতে 4 জনকে এবং 7 জন পুরুষ হইতে বাকী 1 জনকে লইয়া মোট ${}^4C_4 \times {}^7C_1$ সমবায় গঠন করা যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা $= {}^4C_1 \times {}^7C_4 + {}^4C_2 \times {}^7C_3 + {}^4C_3 \times {}^7C_2 + {}^4C_4 \times {}^7C_1$

$= 4 \times 35 + 6 \times 35 + 4 \times 21 + 1 \times 7$

$= 140 + 210 + 84 + 7 = 441$

উদা. 8. 15টি বাহুবিশিষ্ট কোন বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া মোট কতটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে ? ঐ বহুভুজের কর্ণগুলির সংখ্যা কত ?

15টি বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের 15টি কৌণিক বিন্দু থাকিবে। ঐ 15টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন তিনটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিলেই একটি করিয়া ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। সুতরাং 15টি বিন্দু হইতে তিনটি বিন্দু যত প্রকারে নির্বাচন করা যায় ততগুলি ত্রিভুজ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজ সংখ্যা $= {}^{15}C_3 = \dfrac{15.14.13}{3.2.1} = 455$ টি

আবার ঐ বিন্দুগুলির যে কোন দুইটি বিন্দু যোগ করিলে একটি করিয়া সরলরেখা পাওয়া যায়। মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{15}C_2 = \dfrac{15.14}{2.1} = 105$ টি

কিন্তু এই 105টি সরলরেখার মধ্যে বহুভুজের 15টি বাহুও ধরা আছে, উহারা কর্ণ হইবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা $= 105 - 15 = 90$টি।

উদা. 9. একটি দলে 16 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট আছে। উহাদের মধ্য হইতে 11 জন বালককে কত রকমে নির্বাচন করা যায়, যাহাতে প্রতি নির্বাচনে (i) ঠিক 6 জন স্কাউট থাকে, (ii) অন্ততঃ 6 জন স্কাউট থাকে ? [H. S. '72]

এখানে 16 জন বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট এবং অবশিষ্ট 9 জন অপর বালক আছে।

(i) প্রথমক্ষেত্রে 6 জন স্কাউট লইতে হইবে সুতরাং 11 জনের অবশিষ্ট 5 জনকে অবশিষ্ট 9 জন বালক হইতে লইতে হইবে। 7 জন স্কাউট হইতে 6 জনকে ${}^7C_6$ উপায়ে এবং 9 জন অপর বালক হইতে 5 জনকে ${}^9C_5$ উপায়ে লইয়া সমবায় গঠন করিতে হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^7C_6 \times {}^9C_5 = {}^7C_1 \times {}^9C_4$

$= 7 \times \dfrac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = 882$

(ii) দ্বিতীয়ক্ষেত্রে অন্ততঃপক্ষে 6 জন স্কাউট থাকিবে। সুতরাং 6টি স্কাউট ও 5টি অন্য বালক থাকিতে পারে এবং সেক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা = 735 [(i) হইতে]

অথবা 7 জন স্কাউট এবং অবশিষ্ট 4 জন অপর বালক হইতে পারে। 7 জন স্কাউট হইতে 7 জনকে $^7C_7$ উপায়ে এবং 9 জন অপর বালক হইতে 4 জনকে $^9C_4$ উপায়ে নির্বাচন করা যায়.

$\therefore$ এক্ষেত্রে নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা $= {}^7C_7 \times {}^9C_4 = 1 \times 105 = 105$

$\therefore$ মোট নির্ণেয় সংখ্যা $= 735 + 105 = 840$

উদা. 10. এক ব্যক্তির 6 বন্ধু আছে। তিনি বন্ধুদের একজনকে বা একাধিক জনকে কত প্রকারে নির্বাচন করিতে পারেন? [C. U. '50]

6 জন বন্ধু হইতে 1, 2, 3, 4, 5 বা 6 জন করিয়া নিমন্ত্রণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

অন্য প্রণালী : 6 জন বন্ধুর মধ্যে ইচ্ছামত কয়েকজনকে বা সকলকে নিমন্ত্রণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$

উদা. 11. কোন প্রশ্নপত্রে 1 হইতে 12 পর্যন্ত পর পর 12টি প্রশ্ন দেওয়া হইয়াছে। তন্মধ্যে 'A' বিভাগে 7টি ও 'B' বিভাগে 5টি প্রশ্ন আছে। 'A' বিভাগ হইতে চতুর্থ প্রশ্ন ও অপর যে কোন 3টি প্রশ্ন এবং 'B' বিভাগ হইতে অষ্টম প্রশ্ন ও অপর যে কোন দুইটি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে। কোন পরীক্ষার্থী কত প্রকারে প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে নির্ণয় কর। [H. S. '69]

'A' বিভাগের 7টি প্রশ্ন হইতে চতুর্থ প্রশ্ন এবং অপর যে কোন 3টি উত্তর করিতে হইবে। এক্ষেত্রে চতুর্থ প্রশ্নটিকে আলাদা রাখিয়া অবশিষ্ট 6টি হইতে 3টি প্রশ্ন উত্তর করিলে 'A' বিভাগের উত্তর সম্পূর্ণ হইবে। এক্ষেত্রে নির্বাচন সংখ্যা $= {}^6C_3 = \dfrac{6.5.4}{3.2.1} = 20$

'B' বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে অষ্টম প্রশ্ন এবং অপর যে কোন 2টি প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে। এক্ষেত্রে অষ্টম প্রশ্নটিকে আলাদা রাখিয়া অবশিষ্ট 4টি হইতে 2টি উত্তর করিলে 'B' বিভাগের উত্তর সম্পূর্ণ হইবে। এক্ষেত্রে নির্বাচন সংখ্যা $= {}^4C_2 = \dfrac{4.3}{2.1} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= 20 \times 6 = 120$

উদা. 12. 15 জন ব্যক্তির একটি দল হইতে 9 জনের একটি দল কত রকম ভাবে গঠন করা যাইবে যাহাতে (i) 3 জন বিশেষ ব্যক্তি কখনই থাকিবে না (ii) 3 জন বিশেষ ব্যক্তি সর্বদাই থাকিবে? [H. S. '63]

(i) যে 3 জন ব্যক্তি কখনই থাকিবে না তাহাদের পূর্ব হইতে বাদ দিয়া অবশিষ্ট (15 − 3) বা 12 জন হইতে 9 জনের দল গঠন করিলেই নির্ণেয় নির্বাচনগুলি পাওয়া যাইবে।

∴ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{12}C_9 = {}^{12}C_3 = \dfrac{12.11.10}{3.2.1} = 220$

(ii) যে 3 জন ব্যক্তি প্রতি নির্বাচনেই থাকিবে, তাহাদের পূর্ব হইতে নির্বাচন করিয়া অবশিষ্ট 12 জন হইতে বাকী (9 − 3) 6 জন নির্বাচন করিলেই নির্ণেয় নির্বাচনগুলি পাওয়া যাইবে।

∴ নির্ণেয় নির্বাচন সংখ্যা $= {}^{12}C_6 = \dfrac{12.11.10.9.8.7}{6.5.4.3.2.1} = 924$

Exercise—13

1. মান নির্ণয় কর : (i) ${}^{101}C_{99}$ (ii) $\dfrac{28!}{3!25!}$

2. যদি ${}^nC_{20} = {}^nC_4$ হয়, তবে n এর মান নির্ণয় কর।

3. যদি ${}^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হয়, তবে r এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '30]

4. যদি ${}^nC_r = 15$ এবং ${}^nP_r = 360$ হয়, তবে n ও r এর মান নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর ${}^nC_r + {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2} = {}^{n+1}C_r$

6. দেখাও যে, $\dfrac{{}^{2n}C_{2r}}{{}^nC_r} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,.\,(2n-2r+1)}{1.3.5\cdots(2r-1)}$

7. মোট 10টি প্রশ্ন হইতে যে কোন 6টি প্রশ্ন তুমি কত প্রকারে নির্বাচন করিতে পারিবে?

8. 9 জন শিক্ষক এবং 5 জন ছাত্র হইতে 6 জন শিক্ষক এবং 2 জন ছাত্রের কতটি দল গঠন করা যাইবে?

9. 7 জন পুরুষ ও 4 জন মহিলা হইতে 5 জনের কতগুলি কমিটি গঠন করিতে পারিবে, যাহাতে প্রতি কমিটিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলা থাকে। [C. U. '57]

10. একটি কাউন্সিলে একজন সভাপতি, 2 জন সহ সভাপতি এবং 12 জন অন্যান্য সদস্য আছে। ইহা হইতে 6 জনের কতগুলি কমিটি গঠন করা যাইবে, যাহাতে সভাপতি এবং অন্ততঃপক্ষে একজন সহ সভাপতি অবশ্যই থাকে।

11. 17টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 5টি স্বরবর্ণ হইতে, 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ বিশিষ্ট কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইবে যাহাতে শব্দের অক্ষরগুলি বিভিন্ন হইবে ? [C. U. '32]

12. 11 জন খেলোয়াড় বিশিষ্ট একটি ক্রিকেট দল 6 জন এবং 8 জন খেলোয়াড় বিশিষ্ট 2টি ভিন্ন দল হইতে গঠন করিতে হইবে। 6 জনের দল হইতে যদি অন্ততঃপক্ষে 4 জনকে লওয়া হয়, তবে মোট কত প্রকারে ক্রিকেট দল গঠন করা যাইবে ?

[C. U. '38]

13. একটি ফুটবল দলকে স্থানীয় দলগুলির সহিত 10টি ম্যাচ খেলিতে হইবে। এই খেলাগুলির ফলাফলের (জয়, পরাজয় অথবা অমিমাংশিত) ভবিষ্যদ্বাণী করিতে হইবে। মোট কতপ্রকারে ভবিষ্যদ্বাণী করা যাইবে যাহাতে ঠিক 6টি ভবিষ্যদ্বাণী সঠিক হয় ?

14. একটি দশভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া মোট কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাইবে ? মোট কয়টি কর্ণ ই বা পাওয়া যাইবে ?

15. কোন সমতলের উপর 16টি বিন্দু আছে এবং উহাদের কোন 3টি সমরেখ নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি সরলরেখা গঠন করা যাইবে ? [P. U. '09]

16. কোন সমতলে n সংখ্যক বিন্দু আছে, উহাদের মধ্যে নির্দিষ্ট m সংখ্যক বিন্দু সমরেখ, অপর যে কোন 3টি বিন্দু সমরেখ নহে। ঐ বিন্দুগুলি যোগ করিয়া কতগুলি (i) বিভিন্ন সরলরেখা (ii) কতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যায়। [C. U. '28]

17. 8টি বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার 4টি করিয়া লইয়া মোট কতটি সমবায় গঠন করা যাইবে যাহাতে একটি বিশেষ বস্তু (i) সর্বদাই থাকিবে (ii) কখনই থাকিবে না। দেখাও যে উভয় ক্ষেত্রে সমবায় সংখ্যা সমান।

18. আটটি কাউন্টারের উপর গননার জন্য ধাতুখণ্ডের উপর 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 এই সংখ্যাগুলি লেখা আছে। অন্ততঃ একটি যুগ্ম ও একটি অযুগ্ম ধাতুখণ্ড থাকিবে এরূপভাবে 4টি ধাতুখণ্ডকে কত রকমভাবে নির্বাচন করা যায় ? [C. U. '41]

19. এক ব্যক্তি তাহার 8 জন বন্ধুর একজনকে বা একাধিক জনকে কতরকম ভাবে নিমন্ত্রণ করিতে পারেন ?

20. 7 জন পুরুষ ও 3 জন মহিলা দুইটি শূন্য আসনের জন্য নির্বাচনপ্রার্থী। একজন ভোটদাতা যতগুলি আসন শূন্য তাহার অনধিক যতজনকে ইচ্ছা ভোট দিতে পারেন। তিনি কত প্রকারে ভোট দিতে পারিবেন ? [P. U. '43]

21. 22 জন লোককে কত প্রকারে দুইটি ক্রিকেট দলে বিভক্ত করা যায় ?

[C. U. '50]

22. 52টি তাসকে 4 জন খেলোয়াড়ের মধ্যে কত প্রকারে বণ্টন করা যাইবে ?

23. আটটি প্রশ্ন এবং প্রত্যেকটির একটি করিয়া বিকল্প প্রশ্ন আছে। প্রমাণ কর এক বা একাধিক প্রশ্ন মোট 3^8-1 উপায়ে নির্বাচন করা যায়। [C. U. '28]

24. একটি প্রশ্নপত্রে দুইটি বিভাগের প্রত্যেকটিতে 5টি করিয়া প্রশ্নসহ প্রশ্নের উত্তর করিতে হইবে। কোন পরীক্ষার্থীই কোন বিভাগ হইতেই 4টির বেশী প্রশ্নের উত্তর করিতে পারিবে না। সে মোট কত প্রকারে প্রশ্নের উত্তর করিতে পারিবে ?

[C. U. '32]

25. এক ব্যক্তির 3টি টাকা, 4টি 50 পয়সা ও 5টি 25 পয়সার মুদ্রা আছে। সে কত প্রকারে উহা দান করিতে পারিবে ?

26. 8 জন মহিলা এবং 7 জন পুরুষ হইতে 3 জন মহিলা ও 4 জন পুরুষের মোট কতগুলি কমিটি গঠন করা যাইবে ? যদি Mr. Y কোন কমিটিতে থাকিলে Mr. X ঐ কমিটিতে থাকিতে অস্বীকার করেন, তবে মোট কতটি কমিটি গঠন হইবে ?

27. *Alliteration* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 4টি করিয়া লইয়া কত রকমে (i) নির্বাচন করা যায় এবং (ii) সাজান যায় ? [C. U.]

28. দেখাও যে '*daddy did a deadly deed*' বাক্যটির অক্ষরগুলিকে লইয়া মোট 1919টি নির্বাচন করা যায়।

29. A, B, C, D, E এই পাঁচ ব্যক্তি একটি সভায় বক্তৃতা করিতে যাইতেছে। কত রকম ভাবে তাহারা একজনের পর একজন বক্তৃতা করিতে পারিবে যদি (i) B, A-র পূর্বে বক্তৃতা না করে এবং (ii) A ঠিক B-র পূর্বে বক্তৃতা করে।

30. যদি $p+q+r$ সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p-সংখ্যক একরকম, q-সংখ্যক অন্যরকম এবং অবশিষ্ট সকল বিভিন্ন হয়। তবে দেখাও যে মোট সমবায় সংখ্যা $(p+1)(q+1)2^r-1$ হইবে।

31. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। যদি তিনি তাহার 3 জন ভৃত্যের মাধ্যমে তাহাদের নিমন্ত্রণ লিপি পাঠান, তবে কত প্রকারে তাহা করিতে পারিবেন ? [প্রত্যেক ভৃত্য সমান সংখ্যক চিঠি বিতরন করিবে] [Pat. '50]

32. *Examination* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে প্রতিবার 4টি করিয়া লইয়া মোট কতটি সমবায় গঠন করা যাইবে ? [C. U. '58]

33. দেখাও যে $^{2n}C_n$ সমবায়ের যতগুলিতে একটি বিশেষ বস্তু সর্বদাই থাকিবে, তাহা যতগুলি সমবায়ে ঐ বিশেষ বস্তুটি একেবারেই থাকিবে না তাহার সমান হইবে।

[C. U. '52]

34. কোন সমতলে n-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্দু আছে তাহাদের যে কোন 3টি সমরেখ নয় এবং যে কোন 4টি সমতলীয় নয়। n-এর মান কত হইলে ঐ বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া যতগুলি সরলরেখা পাওয়া যাইবে, ঠিক ততগুলি সমতল পাওয়া যাইবে? [C. U. '50]

35. 210-এর কতগুলি বিভিন্ন উৎপাদক পাওয়া যাইতে পারে?

36. $2n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সমবায় : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সমবায় $= 65 : 1$ হইলে n-এর মান নির্ণয় কর।

37. যদি m-সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখাকে n-সংখ্যক সমান্তরাল সরলরেখা ছেদ করে, তবে দেখাও যে মোট $\frac{1}{2}mn(m-1)(n-1)$-সংখ্যক সামান্তরিক গঠিত হইবে।

38. a, b, c, d, e এই পাঁচটি অক্ষরের সবগুলিকে লইয়া '+' এবং '−' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করিয়া কয়টি বীজগণিতীয় রাশি তৈরি করা যাইবে?

———

দশম অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য

(Binomial Theorem)

দ্বিপদ রাশি (Binomial Expression) : যে রাশিতে কেবলমাত্র দুইটি পদ (term) থাকে, তাহাকে **দ্বিপদ রাশি** বলে। যথা $a+3b$, $3x-4y$ ইত্যাদি।

দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) : যে বীজগণিতীয় সাধারণ সূত্রের সাহায্যে দ্বিপদ রাশির যে কোন ঘাতকে বিস্তৃত করা যায়, অর্থাৎ শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে **দ্বিপদ উপপাদ্য** বলে। এই সূত্রটি Newton উদ্ভাবন করেন।

দ্বিপদ উপপাদ্য যখন ঘাত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা (Binomial Theorem for a positive integral index) :

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n \cdots (1)$$

$$\ldots = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n \ldots (2)$$

প্রমাণ (প্রথম পদ্ধতি)

আমরা জানি $(a+x)^n = (a+x)(a+x)\cdots\cdots$ n-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত n-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেক উৎপাদক হইতে এক একটি অক্ষর লইয়া এবং সেই n-সংখ্যক অক্ষর গুণ করিয়া এই ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদ পাওয়া যাইবে। সুতরাং প্রত্যেকটি পদ n-মাত্রিক (n-dimension) হইবে অর্থাৎ প্রত্যেক পদে a ও x-এর ঘাতের সমষ্টি n হইবে। প্রথম পদে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে কেবল a লওয়া হইল, ফলে n-সংখ্যক a পাওয়া যাইবে যাহাদের গুণফল a^n। সুতরাং প্রথম পদ a^n. অনুরূপে শেষ পদে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে কেবল x লওয়া হইল এবং পূর্বের ন্যায় শেষ পদ হইবে x^n।

এখন দ্বিতীয় পদেও মোট n-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল হইবে। দ্বিতীয় পদে a একবার কমাইয়া $(n-1)$ সংখ্যক a লওয়া হইল, ফলে a-র ঘাত হইবে a^{n-1}। ইহার সহিত n-সংখ্যক x হইতে একটি x লইতে হইবে। এই নির্বাচন যত প্রকারে করা যাইবে, তাহাই দ্বিতীয় পদের সহগ হইবে। অতএব দ্বিতীয় পদের সহগ ${}^nC_1$ বা n। সুতরাং দ্বিতীয় পদ হইবে ${}^nC_1 a^{n-1}x$ বা, $na^{n-1}x$।

তৃতীয় পদে আরও একটি কমাইয়া $(n-2)$-সংখ্যক a লওয়া হইল, সুতরাং মোট অক্ষরের সংখ্যা n করিবার জন্য n-সংখ্যক x হইতে যত প্রকারে সম্ভব দুইটি করিয়া x লইতে হইবে। ইহা $^nC_2$ বা $\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}$ প্রকারে লওয়া যায়। অতএব তৃতীয় পদ হইল $^nC_2a^{n-2}x^2$ বা, $\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2$।

এইভাবে অগ্রসর হইতে হইতে যখন একটি সাধারণ পদে $(n-r)$-সংখ্যক a লওয়া হইবে, তখন তাহার সহিত r-সংখ্যক x লইয়া মোট n-সংখ্যক অক্ষর করিতে হইবে। n-সংখ্যক x হইতে r-সংখ্যককে মোট ^nC_r উপায়ে লওয়া যায়। অতএব যে কোন সাধারণ পদের আকার হইল $^nC_ra^{n-r}x^r$। সুতরাং সাধারণ পদে r-এর মান পর পর 0, 1, 2, 3,......n পর্যন্ত বসাইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পর পর পদগুলি পাওয়া যাইবে।

অতএব প্রমাণিত হইল যে,

$$(a+x)^n=a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\ldots+{}^nC_ra^{n-r}x^r+\ldots+x^n$$

[a^n এর সহগ $^nC_0=1$ এবং x^n এর সহগ $^nC_n=1$]

অথবা,
$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\ldots$$
$$\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি আরোহণ প্রণালীতে (By the method of induction)

আমরা সরাসরি গুণ করিয়া পাই,

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2=a^2+{}^2C_1ax+x^2$$
$$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3=a^3+{}^3C_1a^2x+{}^3C_1ax^2+x^3$$
$$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4=a^4+{}^4C_1a^3x$$
$$+{}^4C_2a^2x^2+{}^4C_3ax^3+x^4.$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে $n=2$, 3 এবং 4 হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

এখন মনে করি n-এর একটি নির্দিষ্ট মান m হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

$$\therefore\quad (a+x)^m=a^m+{}^mC_1a^{m-1}x+{}^mC_2a^{m-2}x^2+\ldots$$
$$+{}^mC_ra^{m-r}x^r+\cdots+x^m\ldots(1)$$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(a+x)^{m+1}=(a+x)(a^m+{}^mC_1a^{m-1}x+{}^mC_2a^{m-2}x^2+\cdots$$
$$+{}^mC_ra^{m-r}x^r+\ldots+x^m)$$
$$=a^{m+1}+({}^mC_1+1)\,a^mx+({}^mC_2+{}^mC_1)a^{m-1}x^2+\cdots$$
$$+({}^mC_r+{}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r+\ldots+x^{m+1}$$

এখন ${}^mC_1+1={}^mC_1+{}^mC_0={}^{m+1}C_1$ সাধারণভাবে

$${}^mC_r+{}^mC_{r-1}={}^{m+1}C_r$$

$$\therefore\quad (a+x)^{m+1}=a^{m+1}+{}^{m+1}C_1a^mx+{}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2+\ldots.$$
$$+{}^{m+1}C_ra^{m-2+1}x^r+\ldots+x^{m+1}$$

অতএব দেখা গেল যে, $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও উহা সিদ্ধ হয়।

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি $n=4$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং $n=4+1$ বা 5 হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে। আবার যেহেতু $n=5$ হইলে উহা সিদ্ধ হয়, সুতরাং $n=5+1$ বা, 6 হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে ইত্যাদি।

অতএব প্রমাণিত হইল যে, n-এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার মানে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

দ্রষ্টব্য : (i) দ্বিপদ উপপাদ্যের ডানপক্ষকে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি বলে।

(ii) ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2,\cdots\cdots$, ${}^nC_r,\cdots\cdots{}^nC_n$-কে বিস্তৃতির পদগুলির সহগ বলে। এই সহগগুলিকে Binomial Coefficient বলে।

(iii) বিস্তৃতি হইতে বুঝা যায় বিস্তৃতিটি সসীম (finite) এবং পদসংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ $(a+x)$-এর ঘাত অপেক্ষা 1 বেশী।

(iv) প্রত্যেক পদে a ও x-এর ঘাতদ্বয়ের সমষ্টি n এবং প্রত্যেক পদে n-এর ঘাত ঐ পদের C-এর lower suffix-এর সমান।

যদি n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\ldots\ldots+{}^nC_rx^r+\ldots\ldots+x^n\cdots(1)$$
$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\ldots+x^n$$

আমরা সরাসরি গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^2=1+2x+x^2=1+{}^3C_1x+x^2$$
$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3=1+{}^3C_1x+{}^2C_2x^2+x^3$$
$$(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4=1+{}^4C_1x+{}^4C_2x^2+{}^4C_3x+x^4$$

সুতরাং দেখা যাইতেছে $n=2, 3$ ও 4 হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। এখন মনে করি n-এর একটি নির্দিষ্ট মান $n=m$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

$$\therefore \quad (1+x)^m = 1+{}^mC_1x+{}^mC_2x^2+\cdots\cdots+{}^mC_rx^r+\cdots\cdots+x^m$$

উভয় পক্ষকে $(1+x)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+{}^mC_1x+{}^mC_2x^2+\cdots\cdots+{}^mC_rx^r+\cdots\cdots+x^m)$$
$$= 1+({}^mC_1+1)x+({}^mC_2+{}^mC_1)x^2+\cdots\cdots+$$
$$({}^mC_r+{}^mC_{r-1})x^r+\cdots+x^{m+1}$$

এখন ${}^mC_1+1={}^mC_1+{}^mC_0={}^{m+1}C_1$ এবং সাধারণ ভাবে ${}^mC_r+{}^mC_{r-1}$ $={}^{m+1}C_r$।

$$\therefore \quad (1+x)^{m+1} = 1+{}^{m+1}C_1x+{}^{m+1}C_2x^2+\cdots{}^{m+1}C_rx^r+\cdots+x^{m+1}$$

অতএব $n=m$ হইলে যদি উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়, তবে $n=m+1$ হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে।

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি $n=4$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং $n=4+1$ বা 5 হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে। আবার যেহেতু $n=5$ হইলে উহা সিদ্ধ হয়, সুতরাং $n=5+1$ বা, 6 হইলেও উহা সিদ্ধ হইবে ইত্যাদি।

অতএব n-এর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার মানে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয়।

[**দ্রষ্টব্য** : $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $a=1$ বসাইলেই $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি পাওয়া যায়। সুতরাং $(a+x)^n$-এর একটি বিশেষ রূপ $(1+x)^n$]

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়

$$(a+x)^n = \left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n(1+z)^n \left[\frac{x}{a}=z \text{ ধরিয়া}\right]$$
$$= a^n(1+{}^nC_1Z+{}^nC_2Z^2+\cdots+Z^n)$$
$$= a^n\left(1+{}^nC_1\frac{x}{a}+{}^nC_2\frac{x^2}{a^2}+\cdots+\frac{x^n}{a^n}\right)$$
$$= a^n+{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2+\ldots+x^n$$

অতএব $(1+x)^n$-এর আকারের বিস্তৃতি হইতে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি পাওয়া গেল।

দ্বিপদ উপপাদ্যের বিশেষ রূপ

যেহেতু $(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিদ্বয় a এবং x-এর যে কোন মানে সিদ্ধ, সুতরাং উভয় বিস্তৃতিতে x-এর পরিবর্তে $-x$ বসাইয়া পাই,

$$(a-x)^n = a^n+{}^nC_1a^{n-1}(-x)+{}^nC_2a^{n-2}(-x)^2+\cdots+(-x)^n$$
$$= a^n-{}^nC_1a^{n-1}x+{}^nC_2a^{n-2}x^2-\cdots+(-1)^nx^n$$

$$(1-x)^n = 1^n + {}^nC_1(-x) + {}^nC_2(-x)^2 + \cdots + (-x)^n$$
$$= 1 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \cdots + (-1)^n x^n$$

উভয়ক্ষেত্রে n যুগ্ম হইলে $(-x)^n$-এর চিহ্ন ধনাত্মক হইবে, অর্থাৎ সেক্ষেত্রে $(-x)^n = x^n$ হইবে। আর n অযুগ্ম হইলে $(-x)^n = -x^n$ হইবে। এক্ষেত্রে n যুগ্ম না অযুগ্ম জানা না থাকায় $(-x)^n$-এর স্থলে $(-1)^n x^n$ লেখা হইল। n যুগ্ম বা অযুগ্ম হইলে $(-1)^n$ যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

এই বিস্তৃতিদ্বয়ের পদগুলির সাংখ্যমান পূর্ব অনুরূপ বিস্তৃতির পদগুলির সাংখ্যমানের সমান এবং কেবল একটির পর একটি ধনাত্মক ও ঋণাত্মক। কিন্তু উভয় বিস্তৃতিতে প্রথম পদ ধনাত্মক এবং n যুগ্ম বা অযুগ্ম হইলে শেষ পদ যথাক্রমে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

বিস্তৃতির সাধারণ পদ (General term)

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদকে বিস্তৃতির **সাধারণ পদ** (general term) বলা হয়। কারণ r-এর একটি যোগ্য মান বসাইয়া বিস্তৃতির যে কোন পদ নির্ণয় করা যায়। ইহাকে t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি হইতে পাই,

প্রথম পদ $= (0+1)$-তম পদ $= {}^nC_0 a^n = a^n$

দ্বিতীয় পদ $= (1+1)$-তম পদ $= {}^nC_1 a^{n-1} x$

তৃতীয় পদ $= (2+1)$-তম পদ $= {}^nC_2 a^{n-2} x^2$

চতুর্থ পদ $= (3+1)$-তম পদ $= {}^nC_3 a^{n-3} x^3$

অনুরূপে $= (r+1)$-তম পদ $= {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$\therefore$ **$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ অর্থাৎ $(r+1)$-তম পদ**
$$= {}^nC_r a^{n-r} x^r$$

অনুরূপে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $= {}^nC_r x^r$

$(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $= (-1)^r {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ $= (-1)^r\, {}^nC_r x^r$

বিস্তৃতির মধ্য পদ (Middle Term)

আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি দ্বিপদ রাশির যে কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা ঐ ঘাতসংখ্যা হইতে 1 বেশী হইয়া থাকে। অর্থাৎ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ হইবে। অতএব n যুগ্ম হইলে পদসংখ্যা অযুগ্ম হইবে এবং n অযুগ্ম হইলে পদসংখ্যা যুগ্ম হইবে। n যুগ্ম হইলে মধ্যপদ একটি এবং n অযুগ্ম হইলে মধ্যপদ দুইটি হইবে।

(i) মনে করি n যুগ্ম এবং $n = 2m$ অর্থাৎ $m = \frac{n}{2}$.

যেহেতু বিস্তৃতির পদসংখ্যা $n+1$ অর্থাৎ $2m+1$ সুতরাং $(m+1)$-তম পদ বা $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ মধ্যপদ হইবে।

(ii) মনে করি, n অযুগ্ম এবং $n=2m+1$, অর্থাৎ $m=\frac{n-1}{2}$ এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)=(2m+2)$।

অতএব, এখানে মধ্যপদ দুইটি হইবে। এবং উহা $(m+1)$-তম পদ এবং $(m+2)$-তম পদ।

অর্থাৎ $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম পদ এবং $\left(\frac{n-1}{2}+1+1\right)$-তম পদ।

বা, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-তম পদ এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ।

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয়

(i) n যুগ্ম হইলে মনে করি $n=2m$, অর্থাৎ $m=\frac{n}{2}$.

যেহেতু বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ $2m+1$, একটি অযুগ্ম রাশি। সুতরাং একটি মাত্র মধ্যপদ থাকিবে, এবং উহা $(m+1)$-তম বা $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মধ্যপদ} = {}^nC_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n}{2} \lfloor n-\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}} = \frac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2}x^{\frac{n}{2}}$$

(ii) n অযুগ্ম হইলে, মনে করি, $n=2m+1$ অর্থাৎ $m=\frac{1}{2}(n-1)$ এখানে বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ $2m+2$, একটি যুগ্ম রাশি, সুতরাং দুইটি মধ্যপদ থাকিবে এবং উহা $(m+1)$-তম ও $(m+2)$-তম পদ হইবে অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম এবং $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদ হইবে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মধ্যপদদ্বয়} = {}^nC_{\frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1) \lfloor \frac{1}{2}(n+1)}x^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$\text{এবং } = {}^nC_{\frac{1}{2}(n+1)}x^{\frac{1}{2}(n+1)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \lfloor \frac{1}{2}(n-1)}x^{\frac{1}{2}(n+1)}$$

সুতরাং এক্ষেত্রে মধ্যপদদ্বয়ের সহগদ্বয়ের সাংখ্যমান সমান।

সমদূরবর্তী পদ (Equidistant terms)

কোন বিস্তৃতির প্রথম দিক ও শেষ দিক হইতে যে দুইটি পদ সমান দূরে অবস্থিত, সেই পদদ্বয়কে সমদূরবর্তী পদ বলে।

উপপাদ্য ঃ প্রমাণ কর কোন বিস্তৃতির সমদূরবর্তী পদগুলির সহগগুলি সমান হয়। (To prove that the coefficients of equidistant terms of an expansion are equal).

এখানে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিকে বিবেচনা করা যাইতে পারে। এই বিস্তৃতির প্রথম দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r। এখন শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ কত তাহা দেখিতে হইবে। শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদ, প্রথম দিক হইতে কত-তম পদ হইবে তাহা পূর্বে নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু মোট পদসংখ্যা $(n+1)$ সুতরাং শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের পূর্বে প্রথম দিক হইতে মোট $\{(n+1)-(r+1)\}$ অথাৎ $(n-r)$-সংখ্যক পদ আছে। সুতরাং শেষ দিক হইতে যাহা $(r+1)$-তম পদ, প্রথম দিক হইতে উহা $(n-r)$-তম পদের পরবর্তী পদ অর্থাৎ $(n-r+1)$-তম পদ হইবে।

$\therefore$ শেষ দিক হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ $=$ প্রথম দিক হইতে $(n-r+1)$-তম পদের সহগ $= {^nC_{n-r}} = {^nC_r}$ $\quad [\because \; {^nC_{n-r}} = {^nC_r}]$

r-এর যে কোন মান বসাইয়া দেখা যাইবে কোন বিস্তৃতির উভয় দিক হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সহগ সমান।

উদা. 1. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {^6C_1}x^5\left(-\frac{1}{x}\right) + {^6C_2}x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2 + {^6C_3}x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3$$
$$+ {^6C_4}x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4 + {^6C_5}x\left(-\frac{1}{x}\right)^5 + {^6C_6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6$$
$$= x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$$

উদা. 2. $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়া উহা হইতে x বর্জিত পদটি কত-তম পদ এবং উহার মান কত বাহির কর। [H. S. '61]

$$\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6 = \left(\frac{2x}{3}\right)^6 + {^6C_1}\left(\frac{2x}{3}\right)^5\left(-\frac{3}{2x}\right) + {^6C_2}\left(\frac{2x}{3}\right)^4\left(-\frac{3}{2x}\right)^2$$
$$+ {^6C_3}\left(\frac{2x}{3}\right)^3\left(-\frac{3}{2x}\right)^3 + {^6C_4}\left(\frac{2x}{3}\right)^2\left(-\frac{3}{2x}\right)^4$$
$$+ {^6C_5}\left(\frac{2x}{3}\right)\left(-\frac{3}{2x}\right)^5 + {^6C_6}\left(-\frac{3}{2x}\right)^6$$

$$=\frac{64}{729}x^6-6\cdot\frac{16x^4}{81}+15\cdot\frac{4x^2}{9}-20$$

$$+15\cdot\frac{9}{4x^2}-6\cdot\frac{81}{16x^4}+\frac{729}{64x^6}$$

$$=\frac{64}{729}x^6-\frac{32}{27}x^4+\frac{20}{3}x^2-20+\frac{135}{4x^2}-\frac{243}{8x^4}+\frac{729}{64x^6}$$

$\therefore$ x-বর্জিত পদটি চতুর্থপদ এবং উহার মান -20

উদা. 3. $(2x-3x^2)^{10}$-এর বিস্তৃতির x^{13}-এর সহগ নির্ণয় কর।

[H. S. '64]

মনে করি, বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{13} থাকে।

$(r+1)$-তম পদ $={}^{10}C_r(2x)^{10-r}(-3x^2)^r$

$={}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{10-r}(-3)^r.x^{2r}$

$=(-3)^r.{}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{10+r}$

$\therefore$ $x^{10+r}=x^{13}$ $\quad\therefore$ $10+r=13$ $\quad$ বা, $r=3$

$\therefore$ $(3+1)$ বা 4-তম পদে x^{13} থাকে এবং উহার সহগের মান

$=(-3)^r.{}^{10}C_r.2^{10-r}=(-3)^3.{}^{10}C_3.2^{10-3}$

$=-27.\frac{10.9.8}{3.2.1}.128=-414720$

উদা. 4. $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right)^{14}$-এর বিস্তৃতির x^{-10}-এর সহগ নির্ণয় কর।

মনে করি, বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{-10} থাকে।

$(r+1)$-তম পদ $={}^{14}C_r(x^4)^{14-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r={}^{14}C_r.x^{56-4r}(-1)^r.x^{-2r}$

$=(-1)^r.{}^{14}C_r.x^{56-6r}$

$\therefore$ $x^{56-6r}=x^{-10}$ $\quad\therefore$ $56-6r=-10$ $\quad$ বা, $r=11$

$\therefore$ $(11+1)$ বা 12-তম পদে x^{-10} থাকে এবং উহার সহগের মান

$=(-1)^r.{}^{14}C_r=(-1)^{11}.{}^{14}C_{11}=-{}^{14}C_3$

$=-\frac{14.13.12}{3.2.1}=-364$

উদা. 5. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$-এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদ এবং তাহার সহগ নির্ণয় কর। [C. U. '36]

মনে করি, বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ x বর্জিত।

এখন $(r+1)$-তম পদ $= {}^9C_r(2x)^{9-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r$

$$= {}^9C_r.2^{9-r}.x^{9-r}.\frac{1}{3^r}.x^{-2r} = {}^9C_r.2^{9-r}.\frac{1}{3^r}.x^{9-3r}$$

ইহা x-বর্জিত হইবে যদি x-এর ঘাত শূন্য হয়। অর্থাৎ যদি $9-3r=0$ হয়।

$\therefore \quad r=3$।

$\therefore \quad (3+1)$ বা 4-তম x-বর্জিত পদ এবং ইহার মান

$$= {}^9C_r.2^{9-r}.\frac{1}{3^r} = {}^9C_3.2^{9-3}.\frac{1}{3^3} = \frac{9.8.7}{3.2.1}.64.\frac{1}{27} = \frac{1792}{9} = 199\tfrac{1}{9}$$

উদা. 6. $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^8$-এর মধ্যপদের সহগ নির্ণয় কর।

এখানে $n=8$ যুগ্ম রাশি, সুতরাং মধ্যপদ একটি এবং উহা $(\frac{8}{2}+1)$ বা, $(4+1)$-তম পদ।

এখন $(4+1)$-তম পদ $= {}^8C_4(3x)^{8-4}\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}.81x^4.\frac{1}{16x^4}$

$$= \tfrac{2835}{8} = 354\tfrac{3}{8}$$

উদা. 7. দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ

$\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{\lfloor n}.2^n$ হইবে। [P. U. '42]

$2n$ যুগ্মরাশি। $\therefore$ মধ্যপদ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা, $(n+1)$-তম পদ।

$\therefore \quad (n+1)$-তম পদ $= {}^{2n}C_n x^{2n-n}.\frac{1}{x^n} = {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor 2n-n}$

$$= \frac{1.2.3.4.5\cdots(2n-1)2n}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2n-1)2.4.6\cdots 2n}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2n-1).2^n(1.2.3\cdots n)}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2n-1)2^n \lfloor n}{\lfloor n \lfloor n} = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{\lfloor n}.2^n$$

উদা. 8. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(\cdot 99)^4$-এর মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বাহির কর।

$$(\cdot 99)^4 = (1 - \cdot 01)^4$$
$$= 1 + {}^4C_1(-\cdot 01) + {}^4C_2(-\cdot 01)^2 + {}^4C_3(-\cdot 01)^3 + \cdots$$
$$= 1 - 4(\cdot 01) + \frac{4.3}{2.1}(\cdot 0001) - 4(\cdot 000001) + \cdots$$
$$= 1 - \cdot 04 + \cdot 0006 - \cdot 000004 +$$
$$= 1\cdot 0006 - \cdot 04 = \cdot 9606 \quad [\text{ 4 দশমিক পর্যন্ত }]$$
$$= \cdot 961 \quad [\text{ আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত }]$$

উদা. 9. প্রমাণ কর n-এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, 1225 দ্বারা $6^{2n} - 35n - 1$ রাশিটি বিভাজ্য হইবে।

$$6^{2n} - 35n - 1 = 36^n - 35n - 1 = (1+35)^n - 35n - 1$$
$$= \{1 + {}^nC_1.35 + {}^nC_2.(35)^2 + {}^nC_3.(35)^3 + \cdots + (35)^n\} - 35n - 1$$
$$= \{1 + 35n + {}^nC_2(35)^2 + {}^nC_3(35)^3 + \cdots + (35)^n\} - 35n - 1$$
$$= {}^nC_2(35)^2 + {}^nC_3(35)^3 + \cdots + (35)^n$$

ডানপক্ষের প্রত্যেকটি পদ $(35)^2$ বা, 1225-এর গুণিতক। সুতরাং উহারা প্রত্যেকেই 1225 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটি 1225 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 10. প্রমাণ কর $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগ $(1+x)^{2n-1}$-এর মধ্যপদের সহগদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

$2n$ যুগ্ম। সুতরাং মধ্যপদ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ বা, $(n+1)$-তম পদ

$\therefore$ $(1+x)^{2n}$-এর মধ্যপদের সহগ $= {}^{2n}C_n$

$(2n-1)$ অযুগ্ম।

সুতরাং মধ্যপদ $\left(\frac{2n-1-1}{2}+1\right)$-তম পদ এবং $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$-তম পদ

অর্থাৎ $\{(n-1)+1\}$-তম পদ এবং $(n+1)$-তম পদ।

$(1+x)^{2n-1}$-এর $\{(n-1)+1\}$-তম পদের সহগ $= {}^{2n-1}C_{n-1}$

$(1+x)^{2n-1}$-এর $(n+1)$-তম পদের সহগ $= {}^{2n-1}C_n$

$\therefore$ সহগদ্বয়ের সমষ্টি $= {}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n-1+1}C_n$

$$[\because \ {}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r]$$

$= {}^{2n}C_n = (1+x)^{2n}$-এর মধ্যপদের সহগ।

Exereise—14

নিম্নলিখিত দ্বিপদ রাশিগুলির বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

1. $(2a+3b)^5$ 2. $(1-x^2)^7$ 3. $\left(x^2-\frac{1}{3x}\right)^4$

4. $\left(x+\frac{a}{x}\right)^6$

5. বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়া সরল কর : $(\sqrt{2}+1)^5+(\sqrt{2}-1)^5$

6. মান নির্ণয় কর : $(a-\sqrt{1-a^2})^4+(a+\sqrt{1-a^2})^4$

7. $\left(3x-\frac{1}{4x}\right)^8$-এর বিস্তৃতির 5ম পদটি নির্ণয় কর।

8. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির n-তম পদ কত হইবে ?

নিম্নলিখিত বিস্তৃতির মধ্যপদ (বা পদদ্বয়) নির্ণয় কর :

9. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ 10. $\left(2x-\frac{1}{3x}\right)^7$

11. $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^8$ 12. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

13. $(x-2y)^8$ [H. S. '60] 14. $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^7$ [H. S. '64]

15. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়া উহার সাধারণ পদটি বাহির কর এবং দুইটি মধ্যপদ নির্ণয় কর। [C. U. '32]

16. দেখাও যে, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{\lfloor n}(-1)^n 2^n$ হইবে।

17. $(2x^2-x)^{10}$-এর বিস্তৃতির x^{16}-এর সহগ নির্ণয় কর। [C.U. '47]

18. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$-এর বিস্তৃতির x^{32}-এর সহগ নির্ণয় কর। [H. S. '63]

19. $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতির x^{-11}-এর সহগ নির্ণয় কর। [H. S. 71]

20. $(1+x+x^2)(1-x)^{15}$-এর বিস্তৃতির x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর। [M. U. '20]

নিম্নের বিস্তৃতিগুলির x-বর্জিত পদ নির্ণয় কর :

21. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ 22. $\left(9x^2-\frac{1}{3x}\right)^{12}$ [H. S. '66]

23. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$ [H. S. '65] 24. $(1-x)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^7$

25. $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$.

26. দেখাও যে $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগ $\frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$. [H. S. '63]

27. $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতির x-বর্জিত পদের মান নির্ণয় কর।

28. প্রমাণ কর $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগের দ্বিগুণ।

29. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(1\cdot03)^4$-এর মান 4 দশমিক স্থান নির্ণয় কর।
[H. S. '61]

30. $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$-এর বিস্তৃতির y-এর সহগ নির্ণয় কর।

31. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে $(\cdot999)^3$-এর মান আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত এবং $(99)^4$-এর মান নির্ণয় কর।

32. প্রমাণ কর n-এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে $4^{2n}-15n-1$ রাশিটি 225 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

33. প্রমাণ কর $(1+x)^{n+1}$-এর বিস্তৃতির $(p+1)$-তম পদের সহগ, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির p-তম এবং $(p+1)$-তম পদের সহগদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

34. $(1+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতির x^r এবং x^{r+1}-এর সহগ সমান হইলে r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '30]

35. প্রমাণ কর $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ $\frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{1}{2}(n-r).\lfloor\frac{1}{2}(n+r)}$

36. $(2+\frac{1}{2})^9$-এর বিস্তৃতিতে পর পর দুইটি পদ সমান। পদ দুইটি বাহির কর এবং উহাদের মান নির্ণয় কর। [H. S. '69]

37. নিম্নলিখিত বিস্তৃতির x^r-এর সহগ কত হইবে ?

$$(x+2)^n+(x+2)^{n-1}(x+1)+(x+2)^{n-2}(x+1)^2+\ldots\ldots+(x+1)^n$$

38. দেখাও যে, n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$n-\frac{n(n-1)}{\lfloor 1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n=0$$

39. যদি n যে কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, প্রমাণ কর :

$$(1-x)^n=(1+x)^n-2nx(1+x)^{n-1}+\frac{2n(2n-2)}{\lfloor 2}x^2(1+x)^{n-2}-\cdots\cdots$$

40. প্রমাণ কর :

$$\frac{(a+x)^n}{n!}=\frac{a^n}{n!}+\frac{a^{n-1}x}{(n-1)!\,1!}+\frac{a^{n-2}x^2}{(n-2)!\,2!}+\cdots\cdots+\frac{ax^{n-1}}{1!\,(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}$$

বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ (Greatest Coefficient of an expansion)

উপপাদ্য : $(a+x)^n$ বা $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয় কর।

[*To find the greatest Coefficient of* $(a+x)^n$ *or* $(1+x)^n$].

প্রদত্ত উভয় বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r আমরা পূর্বেই দেখিয়াছি (সমবায় অংশে)।

(i) যখন n যুগ্ম, ^nC_r বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{1}{2}n$ হয়।

(ii) যখন n অযুগ্ম, ^nC_r বৃহত্তম হইবে যদি $r=\frac{1}{2}(n-1)$ অথবা, $r=\frac{1}{2}(n+1)$ সুতরাং যখন n যুগ্ম $(\frac{1}{2}n+1)$-তম পদ অর্থাৎ মধ্যপদই বৃহত্তম সহগ বিশিষ্ট হইবে।

যখন n অযুগ্ম, $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম অথবা, $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদ অর্থাৎ মধ্য-পদদ্বয়ের সহগদ্বয় বৃহত্তম হইবে এবং সহগদ্বয় সমান হইবে।

বৃহত্তম পদ (Greatest term) :

মনে করি, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করতে হইবে। মনে করি, বিস্তৃতির r-তম পদকে t_r দ্বারা সূচিত করা হইবে।

$\therefore\ t_r={}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}\ldots(1)\qquad t_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r\ldots(2)$

$\therefore \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}\qquad\qquad \therefore\ t_{r+1}=t_r\times\left(\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}\right)$

সুতরাং, $t_{r+1}>=$অথবা$<t_r$ হইবে

যদি, $(n-r+1)x>=$অথবা$<ar$ হয়

অর্থাৎ, যদি $(n+1)x>=$অথবা$<(a+x)r$ হয়

অর্থাৎ যদি $r<=$অথবা$>\frac{n+1}{a+x}\cdot x$ হয়

(i) মনে করি, $\frac{n+1}{a+x}.x$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং উহা p-এর সমান। সুতরাং যতক্ষণ $r<p$, $t_{r+1}>t_r$ অর্থাৎ প্রত্যেক পদ তাহার পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা বৃহত্তর

হইবে এবং এইভাবে t_p পর্যন্ত পরপর পদগুলি বাড়িতে থাকিবে। যখন $r=p$ হইবে, তখন $t_{r+1}=t_r$ অর্থাৎ $t_{p+1}=t_p$ হইবে।

আবার যখন $r>p$ (অর্থাৎ $p+1$ বা তাহার অধিক হইলে), $t_{r+1}<t_r$ হইবে এবং পরবর্তী পদগুলি ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে।

$\therefore\ \ t_{p+1}=t_p$ এবং ইহারাই বৃহত্তম পদ হইবে।

(ii) মনে করি, $\dfrac{n+1}{a+x}\cdot x$ একটি পূর্ণসংখ্যা হইবে না, এবং উহা $=$একটি পূর্ণসংখ্যা $q+$ কোন ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ।

সুতরাং যতক্ষণ q পর্যন্ত r-এর মান থাকিবে, ততক্ষণ $r<\dfrac{n+1}{a+x}\cdot x$ এবং $t_{r+1}>t_r$ হইবে। এবং r-এর মান $q+1$ অথবা আরও বৃহত্তর হইলে, $t_{r+1}<t_r$.

$\therefore\ \ t_{q+1}>t_q<t_{q-1}\ldots\ldots$এবং $t_{q+1}>t_{q+2}>t_{q+3}\ldots\ldots$

অতএব এক্ষেত্রে t_{q-1} পদটি বৃহত্তম হইবে।

দ্রষ্টব্য : যদি $\dfrac{n+1}{a+x}\cdot x$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হয় অর্থাৎ $(n+1)x<a+x$ হয় অর্থাৎ $x<\dfrac{a}{n}$ হয়, তবে প্রথম পদটি বৃহত্তম হইবে এবং যদি $(n+1)x>x(a+x)$ হয়, অর্থাৎ $n>na$, তখন শেষ পদটি বৃহত্তম হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1 : $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ অনুরূপ প্রণালীতেই নির্ণয় করা যাইবে, কেবলমাত্র a-এর পরিবর্তে 1 বসাইতে হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2 : যেহেতু $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সাংখ্যমান $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সাংখ্যমানের সমান, সুতরাং $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্যমান নির্ণয় করিতে ঋণাত্মক চিহ্ন বর্জন করিতে হইবে এবং পূর্বের নিয়মে তাহা বাহির করিতে হইবে।

দ্বিপদ সহগের ধর্ম (Properties of Binomial Coefficients) :

সংক্ষেপে লিখিবার জন্য অনেক সময় ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2,\cdots, {}^nC_n$ এই দ্বিপদ সংখ্যাগুলিকে $C_0, C_1, C_2,\cdots C_n$ আকারে লেখা হইয়া থাকে।

$\therefore\ \ (1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_nx^n\cdots(1)$

$=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n\ldots(2)\qquad[\because\ {}^nC_0=1]$

(i) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সকল পদের সহগগুলির সমষ্টি 2^n হইবে। (2)নং-এর উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইয়া পাই,

$2^n=C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n=$ সহগগুলির সমষ্টি

(ii) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বিজোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টি জোড় স্থানীয় পদগুলির সমষ্টির সমান।

(2)নং-এর উভয় পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া পাই,

$$0=C_0-C_1+C_2-C_3+\cdots\cdots+(-1)^nC_n.$$

$$\therefore\ C_0+C_2+C_4+\cdots\cdots=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. (i) হইতে $C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n=2^n$

যেহেতু $C_0=1$ $\therefore\ C_1+C_2+\cdots+C_n=2^n-1$

ইহা হইতে বুঝা যায় যে n বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 1, 2, 3,...n-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়গুলির মোট সংখ্যা 2^n-1

অনুসিদ্ধান্ত 2. (ii) হইতে,

$C_0+C_2+C_4+\ldots=C_1+C_3+C_5+\ldots=\frac{1}{2}\times$ সবগুলি সহগের সমষ্টি

$$=\tfrac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}$$

$\therefore$ বিজোড়স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি = জোড়স্থানীয় পদগুলির সহগগুলির সমষ্টি $=2^{n-1}$

দ্রষ্টব্য: $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলির সহগগুলিরও এই দুইটি ধর্ম বর্তমান। $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $a=x=1$ বসাইয়া প্রথমটি এবং $a=1, x=-1$ বসাইয়া দ্বিতীয় ধর্মটি পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. $(5-4x)^{12}$-এর বিস্তৃতির কোন পদ সাংখ্যমানে বৃহত্তর, যখন $x=\frac{2}{3}$ হইবে তখন বৃহত্তম পদের মান নির্ণয় কর।

এখানে $\dfrac{t_{r+1}}{t_r}=\dfrac{12-r+1}{r}\cdot\dfrac{4x}{5}$ (সাংখ্যমানে)

$$=\frac{13-r}{r}\times\frac{8}{15} \qquad \left[\because\ x=\tfrac{2}{3}\right]$$

$\therefore\ t_{r+1}>t_r$ হইবে যদি $8(13-r)>15r$ হয়

অর্থাৎ যদি $104>23r$ হয়, অর্থাৎ যদি $r<\frac{104}{23}$ বা, $4\frac{12}{23}$ হয়।

$\therefore\ t_{r+1}>t_r$ অর্থাৎ $t_r>t_{r+1}$ হইবে যদি $r>4\frac{12}{23}$ হয়।

$\therefore\ t_5>t_4>t_3\ldots$ এবং $t_5>t_6>t_7\ldots$

$\therefore$ পঞ্চম পদটিই বৃহত্তম পদ।

$$\therefore\ t_5={}^{12}C_4.5^{12-4}(-4x)^4={}^{12}C_4.5^8(-4.\tfrac{2}{3})^4$$

$$={}^{12}C_4.5^8.\frac{8^4}{3^4}$$

উদা. 2. দেখাও যে $(1+x)^{2m}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদের সহগ বৃহত্তম হইবে যদি $\frac{m}{m+1}$ এবং $\frac{m+1}{m}$-এর মধ্যে x অবস্থান করে।

যেহেতু বৃহত্তম সহগ মধ্যপদের সহগ, এক্ষেত্রে মধ্যপদ $\left(\frac{2m}{2}+1\right)$ বা $(m+1)$-তম পদ। সুতরাং এখন এরূপ শর্ত নির্ণয় করিতে হইবে যাহাতে $(m+1)$-তম পদ বৃহত্তম পদ হয়।

যেহেতু t_{m+1} বৃহত্তম পদ $\quad\therefore\ t_{m+1}>t_m$ এবং $t_{m+1}>t_{m+2}$

$$t_{m+1}>t_m \quad \therefore\ {}^{2m}C_m.x^m>{}^{2m}C_{m-1}.x^{m-1} \quad (1)$$

$$t_{m+1}>t_{m+2} \quad \therefore\ {}^{2m}C_m.x^m>{}^{2m}C_{m+1}.x^{m+1} \quad (2)$$

(1) হইতে $\frac{2m-m+1}{m}\cdot x>1$ অর্থাৎ $\frac{m+1}{m}\cdot x>1$

অথবা, $x>\frac{m}{m+1}$

এবং (2) হইতে $\frac{2m-(m+1)+1}{m+1}\cdot x<1$

অর্থাৎ, $\frac{m}{m+1}\cdot x<1$ অথবা, $x>\frac{m+1}{m}$

$\therefore$ x-এর মান $\frac{m}{m+1}$ এবং $\frac{m+1}{m}$-এর মধ্যে থাকিবে।

উদা. 3. $(x+a)^n$-কে x এর ঘাতের অধঃক্রমে বিস্তৃত করিলে তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম পদগুলি যথাক্রমে 84, 280 ও 560 হয়, তবে x, a ও n-এর মান নির্ণয় কর।

[C. U. '55]

৩য় পদ $={}^nC_2.x^{n-2}.a^2$

$$\therefore\ \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2=84 \qquad \text{বা,}\quad n(n-1)x^{n-2}a^2=168\cdots(1)$$

৪র্থ পদ $={}^nC_3.x^{n-3}.a^3$

$$\therefore\ \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^{n-3}a^3=280$$

$$\text{বা,}\quad n(n-1)(n-2)x^{n-3}a^3=6\times 280 \quad \ldots\ (2)$$

৫ম পদ $= {}^nC_4 x^{n-4}a^4$

$$\therefore \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor 4} x^{n-4}a^4 = 560$$

বা, $n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}a^4 = 24 \times 560 \quad \ldots \quad (3)$

(2) কে (1) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\dfrac{(n-2)a}{x} = 10 \quad \ldots \quad (4)$

(3) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\dfrac{(n-3)a}{x} = 8 \quad \ldots \quad (5)$

এখন (4) কে 5 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\dfrac{n-2}{n-3} = \frac{5}{4}$

বা, $5n-15=4n-8$ বা, $n=7$

(4) নং এ $n=7$ বসাইয়া পাই, $\dfrac{5a}{x} = 10$ বা, $a=2x$

(1) নং এ $n=7$ এবং $a=2x$ বসাইয়া পাই,

$7.6.x^5.4x^2 = 168$ বা, $x^7=1$ বা, $x=1$

$\therefore \quad a = 2x = 2.1 = 2$

উদা. 4. $(1+x)^{10}$-এর বিস্তৃতির $(4r+5)$-তম ও $(2r+1)$-তম পদের সহগদ্বয় সমান হইলে r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

$(4r+5)$-তম পদের সহগ $= {}^{10}C_{4r+4}$, $(2r+1)$-তম পদের সহগ $= {}^{10}C_{2r}$

$\therefore \quad {}^{10}C_{4r+4} = {}^{10}C_{2r}$ $\qquad \therefore \quad 4r+4+2r=10$

[$\because$ ${}^nC_x = {}^nC_y$ হইলে $x+y=n$]

বা, $r=1$

উদা. 5. $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_nx^n$ হইলে প্রমাণ কর,

$$\frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$ [C. U. '45]

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{C_0}{1} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3\lfloor 2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{n}{\lfloor 2} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{\lfloor 2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{\lfloor 3}+\cdots+1\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\{1+{}^{n+1}C_1.1+{}^{n+1}C_2.1^2+{}^{n+1}C_3.1^3+\cdots+(1)^{n+1}-1\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\{(1+1)^{n+1}-1\}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}=\text{ডানপক্ষ}$$

উদা. 6. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$ হইলে প্রমাণ কর,
$C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2=\dfrac{\lfloor 2n}{\{\lfloor n\}^2}$ [C. U. '41]

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $(x+1)^n=C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n \quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^{2n}=(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n)$$
$$\times(C_0x^n+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n)$$

ইহা একটি অভেদ, সুতরাং উভয়পক্ষে x^n-এর সহগ সমান হইবে।

বামপক্ষে x^n-এর সহগ $={}^{2n}C_n=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}=\dfrac{\lfloor 2n}{\{\lfloor n^2\}}$

ডানপক্ষে পদগুলিকে পর পর গুণ করিলে x^n-এর সহগ হইবে

$$=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2$$

$$\therefore\ C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2=\frac{\lfloor 2n}{\{\lfloor n\}^2}$$

(বিকল্প পদ্ধতি) $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n \quad \cdots \quad (1)$

x-এর পরিবর্তে $\dfrac{1}{x}$ বসাইয়া পাই,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+C_1.\frac{1}{x}+C_2.\frac{1}{x^2}+\ldots+C_n\cdot\frac{1}{x^n} \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) গুণ করিয়া পাই,

$$(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=\text{(1) ও (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফল}$$

বা, $\dfrac{(1+x)^{2n}}{x^n}=$ (1) ও (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফল $\quad \cdots \quad (3)$

বামপক্ষের x-বর্জিত পদ $=(1+x)^{2n}$-এর x^n-এর সহগ $= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\{\lfloor n\}^2}$

ডানপক্ষের x-বর্জিত পদ $= C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2$

$$\therefore \quad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\{\lfloor n\}^2}$$

Exercise—14A

1. $(1-x)^{11}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয় কর।

2. $\left(1+\frac{a}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ কত হইবে যখন $a=1, x=2$?

3. $(2a-3b)^n$-এর বৃহত্তম পদ কোন্‌টি হইবে যখন $n=13, a=9, b=4$?

4. $(2x+3y)^n$-এর বৃহত্তম পদের মান কত হইবে যখন, $n=13, x=9, y=4$?

5. $(1-2x)^{13}$-এর বৃহত্তম পদের মান কত হইবে যখন $x=\frac{1}{30}$?

6. $(3-5x)^8$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সাংখ্য সহগ কত হইবে ?

7. $(2x-3y)^6$-এর বিস্তৃতির সহগগুলির সমষ্টি কত হইবে ?

8. দেখাও যে $(1+x)^{2n+1}$ বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ বৃহত্তম সহগবিশিষ্ট হইবে, যদি $\frac{n}{n+2}$ এবং $\frac{n+2}{n}$-এর মধ্যে x এর মান অবস্থিত হয়।

9. x-এর সীমা কত হইলে $(1+x)^{12}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ বৃহত্তম সহগ বিশিষ্ট হইবে ?

10. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ যথাক্রমে 240, 720 এবং 1080 হইলে a, x এবং n-এর মান নির্ণয় কর।

11. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির ২য়, ৩য় এবং ৪র্থ পদের সহগ সমান্তর শ্রেণী গঠন করিলে n-এর মান কত হইবে ?

12. $(1+x)^n$-এর পর পর তিনটি পদের সহগ 220, 495 এবং 792 হইলে n-এর মান কত হইবে ?

13. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির m-তম, $(m+1)$-তম এবং $(m+2)$-তম পদের সহগ A. P. গঠন করে, তবে প্রমাণ কর, $n^2-n(4m+1)+4m^2-2=0$

14. $(1+x)^{30}$-এর বিস্তৃতির $(5r+4)$-তম পদের সহগ $2r$-তম পদের সহগের সমান হইলে r-এর মান কত হইবে ?

15. যদি m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর $(1+x)^{m+n}$-এর বিস্তৃতির x^m এবং x^n-এর সহগ সমান। [H. S. '68]

16. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পর পর তিনটি পদের সহগ a, b, c হয় তবে প্রমাণ কর, $n=\dfrac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ এবং a যে পদের সহগ তাহার পদসংখ্যা $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$ হইবে।

17. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির 6-তম, 7-তম, 8-তম এবং 9-তম পদের যথাক্রমে a, b, c এবং d হয়, তবে প্রমাণ কর, $\dfrac{b^2-ac}{c^2-bd}=\dfrac{4a}{3c}$

18. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পর পর চারটি পদের সহগ a_1, a_2, a_3, a_4 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_3}{a_3+a_4}=\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}$ [P. U. '50]

19. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির অযুগ্ম পদগুলির সমষ্টি P এবং যুগ্ম পদগুলির সমষ্টি Q হইলে প্রমাণ কর,

(i) $P^2-Q^2=(a^2-x^2)^n$ (ii) $4PQ=(a+x)^{2n}-(a-x)^{2n}$

20. যদি কোন বিস্তৃতির পর পর দুইটি পদের সহগ সমান হয়, তবে দেখাও যে উহাদের পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী পদ দুইটির সহগদ্বয় সমান হইবে।

যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ হয়, তবে নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

21. $C_1+2.C_2+3.C_3+\cdots+n.C_n=n.2^{n-1}$ [C. U. '38]

22. $C_1-2C_2+3C_3-\cdots+(-1)^{n-1}.n.C_n=0$ [C. U. '42]

23. $C_0+2C_1+3C_2+\ldots+(n+1)C_n=(n+2)2^{n-1}$ [H. S. '66]

24. $C_0+3C_1+5C_2+\cdots+(2n+1)C_n=(n+1)2^n$

25. $C_0+\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2+\ldots+\dfrac{1}{n+1}C_n=\dfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ [C. U. '58]

26. $C_0-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n+1}C_n=\dfrac{1}{n+1}$ [P. U. '44]

27. $\dfrac{C_1}{C_0}+\dfrac{2C_2}{C_1}+\dfrac{3C_3}{C_2}+\cdots+\dfrac{nC_n}{C_{n-1}}=\dfrac{n(n+1)}{2}$

28. $C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\ldots+C_nC_0=\dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$

29. $C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+\cdots\cdots+C_{n-r}C_n=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r\,\lfloor n+r}$

30. $C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_n^2=0$

অথবা, $(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2}$, যদি n যথাক্রমে অযুগ্ম অথবা যুগ্ম হয়।

31. যদি $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a_0+a_2+a_4+\cdots\cdots+a_{2n}=\frac{1}{2}(3^n+1)$

32. যদি m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে,

$$2^m-\frac{m}{1!}.2^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2!}.2^{m-2}-\cdots\cdots+(-1)^m=1$$

ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ঘাত-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য :

[Binomial Theorem for fractional or negative index.]

আমরা দেখিয়াছি যে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$

$(n+1)$-তম পদ পর্যন্ত।

কারণ সাধারণ পদে r-এর মান n অপেক্ষা বৃহত্তর ধরিলে, $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$ এর লবের যে কোন একটি উৎপাদকের মান শূন্য হইবে। সুতরাং n অপেক্ষা বড় x-এর যে কোন ঘাতের সহগের মান শূন্য হইবে। সেইজন্য দ্বিপদ উপপাদ্য x^n পর্যন্ত বিস্তৃত হয় এবং শ্রেণীটি **সসীম** (finite) হয়।

কিন্তু উপরের শ্রেণীতে যদি n-এর মান ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হয়, এবং যেহেতু r সর্বদাই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং r-এর কোন মানের জন্যই সাধারণ পদের লবের কোন উৎপাদকের মান শূন্য হইবে না। সুতরাং এক্ষেত্রে, x-এর ঘাত যত বড়ই হউক না কেন, উহার সহগের মান কখনও শূন্য হইতে পারে না ফলে উপরোক্ত শ্রেণীটি কোন নির্দিষ্ট পদে গিয়া শেষ হইবে না এবং উহা একটি **অসীম** (infinite) শ্রেণীতে পরিণত হয়।

ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ঘাত-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রমাণ।

উপপাদ্য : প্রমাণ কর,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} x^3 + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} x^r + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত} \cdots\cdots (1)$$

যখন $|x| < 1$ [$|x| = x$-এর সাংখ্যমান]

মনে করি (1)নং-এর ডান পক্ষের শ্রেণীটি $f(n)$ দ্বারা সূচিত হয়।

$$\therefore \quad f(m) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\cdots (2)$$

$$f(n) = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\cdots (3)$$

এবং $f(m+n) = 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\cdots (4)$

এখন যদি m এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ঘাত বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাই,

$f(m) = (1+x)^m$, $f(n) = (1+x)^n$ এবং $f(m+n) = (1+x)^{m+n}$

কিন্তু $(1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$

$\therefore$ যদি m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়,

$$\left\{1 + mx + \frac{m(m-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\right\}\left\{1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\right\}$$

$$= 1 + (m+n)x + \frac{(m+n)(m+n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \cdots\cdots (5)$$

যদি সসীম পদ বিশিষ্ট দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালাকে গুণ করা হয়, গুণফলও তাহাই হইবে, রাশিমালায় ব্যবহৃত প্রতীক চিহ্নগুলির মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক, পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ যাহাই হউক না কেন (অবশ্য প্রতীক চিহ্নের কোন মানে রাশিমালার পদ অসীম হইবে না) যদি পদসংখ্যা অসীম হয়, তবে গুণফলের আকৃতি কয়েকটি নির্দিষ্ট শর্তে একই থাকিবে। (5)নং-এর বামপক্ষে m এবং n-এর ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক মান লইলে, উভয় ক্ষেত্রেই পদসংখ্যা অসীম হইবে, কিন্তু গুণফল একই থাকিবে, যেহেতু x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ছোট।

সুতরাং $|x|<1$ হইলে m এবং n-এর সকল মানে (5) নং সম্পর্কটি সঠিক হইবে। অর্থাৎ $f(m)\times f(n)=f(m+n)$, m এবং n-এর সকল মানের জন্য।

$$\therefore \quad f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p)=f(m+n+p)$$

অনুরূপ ভাবে, $f(m)\times f(n)\times f(p)\times\cdots$সসীম সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত$=$ $f(m+n+p+\ldots\ldots$সসীম সংখ্যক পদ পর্যন্ত $)\cdots\cdots(6)$

(i) মনে করি n যে কোন ধনাত্মক মূলদ ভগ্নাংশ$=\dfrac{h}{k}$, যখন h এবং k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore \quad (6) \text{ হইতে}, f\left(\frac{h}{k}\right)\times f\left(\frac{h}{k}\right)\times f\left(\frac{h}{k}\right)\times\cdots\cdots k\text{-তম উৎপাদক}$$

$$=f\left(\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+\cdots\cdots k\text{-তম পদ}\right)=f(h)$$

$$\therefore \quad \left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^r=f(h)$$

$$=1+hx+\frac{h(h-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$$

$$=(1+x)^h, \text{ যেহেতু } h \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।}$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right)=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$$

$\therefore$ n যে কোন ধনাত্মক মূলদ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে উপপাদ্যটি প্রতিষ্ঠিত হইল যদি $-1<x<1$ হয়।

(ii) আবার মনে করি n একটি ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা (পূর্ণ অথবা ভগ্নাংশ) এবং $n=-s$, যখন s ধনাত্মক।

$$\therefore \quad (5) \text{ হইতে } f(-s)\times f(s)=f(-s+s)=f(0)=1$$

$$\therefore \quad f(-s)=\frac{1}{f(s)}=\frac{1}{(1+x)^s}=(1+x)^{-s} \qquad [\because \; s \text{ ধনাত্মক}]$$

$$\therefore \quad (1+x)^{-s}=f(-s)=1-sx+\frac{(-s)(-s-1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$$

সুতরাং দ্বিপদ উপপাদ্য যে কোন ঋণাত্মক ঘাতের জন্য প্রতিষ্ঠিত হইবে যদি $-1<x<1$ হয়।

$\therefore$ দ্বিপদ উপপাদ্য ভগ্নাংশ এবং ঋণাত্মক ঘাতের জন্য সত্য হইবে, যদি $-1<x<1$ হয়।

দ্রষ্টব্য : $|x|=1$ হইলেও নির্দিষ্ট শর্তে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হইবে, কিন্তু $x>1$ হইলে ইহা কখনই সিদ্ধ হইবে না।

এক্ষেত্রে $(1+x)^n$-এর সহগগুলিকে ${}^nC_0, {}^nC_1, \cdots {}^nC_r$, প্রতীক দ্বারা লেখা হয় না, কারণ এই প্রতীকে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কিন্তু এক্ষেত্রে n ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হইবে।

ভেণ্ডারমণ্ডের উপপাদ্য (Vandermonde's Theorem) :

যদি r কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং m, n যে কোন মান বিশিষ্ট হয়, তবে

$$(m+n)_r = m_r + {}^rC_1 m_{r-1} n_1 + {}^rC_2 m_{r-2} n_2 + \ldots\ldots + n_r$$

$$= m_r + r m_{r-1} n_1 + \frac{r(r-1)}{1.2} m_{r-2} n_2 + \cdots + n_r \ldots\ldots (1)$$

যখন $m_r = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)$

যখন $r=1$, $(m+n)_1 = m+n = m_1 + n_1$

উভয় পক্ষকে $m+n-1$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(m+n)_1(m+n-1) = m(m+n-1) + n(m+n-1)$$

$$= m(m-1) + mn + mn + n(n-1)$$

$$= m_2 + 2m_1 n_1 + n_2$$

অর্থাৎ $(m+n)_2 = m_2 + {}^2C_1 m_1 n_1 + n_2$

$\therefore$ $r=2$ হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

মনে করি, r-এর একটি নির্দিষ্ট মান p হইলে উপপাদ্যটি সিদ্ধ হয়।

$$\therefore \quad (m+n)_p = m_p + {}^pC_1 m_{p-1} n_1 + {}^pC_2 m_{p-2} n_2 + \cdots\cdots + n_p \cdots (2)$$

উভয়পক্ষকে $(m+n-p)$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$(m+n)_p(m+n-p) = m_p(\overline{m-p}+n) + {}^pC_1 m_{p-1} n_1(\overline{m-p+1} + \overline{n-1})$$

$$+ {}^pC_2 m_{p-2} n_2(\overline{m-p+2} + \overline{n-2}) + \cdots + n_p(\overline{n-p}+m)$$

$$= (m_{p+1} + m_p n_1) + {}^pC_1(m_p n_1 + m_{p-1} n_2) + {}^pC_2(m_{p-1} n_2 + m_{p-2} n_3)$$

$$+ \ldots\ldots + n_{p+1}$$

$$= m_{p+1} + m_p n_1(1 + {}^pC_1) + m_{p-1} n_2({}^pC_1 + {}^pC_2) + \ldots$$

$$\cdots + m_{p-s} n_{s+1}({}^pC_s + {}^pC_{s+1}) + \cdots n_{p+1}$$

$$\therefore \quad (m+n)_{p+1} = m_{p+1} + {}^{p+1}C_1 m_p n_1 + {}^{p+1}C_2 m_{p-1} n_2 + \cdots$$

$$\ldots + n_{p+1} \quad [\because \ {}^pC_s + {}^pC_{s+1} = {}^{p+1}C_{s+1}]$$

সুতরাং উপপাদ্যটি r-এর যে কোন মানের জন্য সিদ্ধ হইলে উহা r-এর পরবর্তী মানের জন্য সিদ্ধ হইবে। কিন্তু $r=1, 2$ হইলে ইহা সিদ্ধ হয়। অতএব উহা $r=3$, 4, ইত্যাদির জন্য অর্থাৎ সকল মানের জন্য সিদ্ধ হইবে।

সাধারণ পদ (General term)

$(r+1)$-তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয় এবং উহাকে t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

যেহেতু $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3\ldots$

$$\therefore\quad t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির

$$t_{r+1}=(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

(ii) $(1+x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

(iii) $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}(-1)^rx^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$

$$[\because\ (-1)^r(-1)^r=(-1)^{2r}=1]$$

n-ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

যখন n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে $(a+x)^n$- কে $\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$ অথবা $\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$ আকার লেখা যায় যদি যথাক্রমে $x<a$ অথবা $>a$ হয়।

(i) মনে করি $x<a$, তবে $\frac{x}{a}<1$

$$\therefore \quad (a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+n.\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots$$

(ii) মনে করি $x>a$, তবে $\frac{a}{x}<1$

$$\therefore \quad (a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n=x^n\left\{1+n.\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\right.$$

$$\left.\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\cdots\right\}=x^n+n.x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2+\cdots\cdots$$

বৃহত্তম পদ (greatest term)

পূর্বে যে নিয়মে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা হইয়াছে, বর্তমানেও ঠিক সেই পদ্ধতিতেই বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যাইবে।

দ্বিপদ উপপাদ্যের নিম্নের রূপগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়

1. $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdots$

2. $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdots$

3. $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\cdots\cdots$

4. $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^r x^r+\cdots\cdots$

5. $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots$

6. $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots$

7. $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+\cdots\cdots+\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r+\cdots\cdots$

এই দ্বিপদ উপপাদ্যের সকলক্ষেত্রেই $|x|<1$ হইবে। যে কোন একটি দ্বিপদ উপপাদ্য লইয়া দেখান যায় যে অন্যান্য মানে দ্বিপদ উপপাদ্য সিদ্ধ হয় না। উদাহরণস্বরূপ,

$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ এখানে $x=2$ বসাইলে,

$(1-2)^{-2}=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\cdots\cdots$

বা, $(-1)^{-2}=1+2.2+3.2^2+4.2^3+\dots\dots$ কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ বামপক্ষ ডানপক্ষের সমান হইতে পারে না। অনুরূপে $x=-1$ বা $+1$ বসাইয়াও দেখা যাইতে পারে যে উভয়পক্ষ সমান হয়।

উদা. 1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ কে চারিটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর। $(x>1)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=\left\{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}=x^{-1}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\because\ x<1\ \therefore\ \tfrac{1}{2}<1\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{x^4}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^6}+\dots\dots\right\}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^7}+\dots\dots$$

উদা. 2. $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ নির্ণয় কর।

[C. U. '38]

$$(r+1)\text{-তম পদ}=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots\dots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}(-2x)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{1.3.5\dots\dots(2r-1)}{2^r\lfloor r}(-1)^r2^rx^r$$

$$\therefore\ (r+1)\text{-তম পদের সহগ}=(-1)^{2r}\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{\lfloor r}$$

$$=\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2r-1)\ .\ 2.4.6\cdots\cdots2r}{\lfloor r.2.4.6\cdots\cdots2r}$$

$$=\frac{1.2.3.4.6\cdots\cdots(2r-1)2r}{\lfloor r.2^r.1.2.3\cdots\cdots r}=\frac{\lfloor 2r}{2^r\lfloor r\,\lfloor r}.$$

উদা. 3. $(1+2x+3x^2+\dots\dots)^{\frac{3}{2}}$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় করিয়া x^5-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$(1+2x+3x^2+\dots\dots)^{\frac{3}{2}}=\{(1-x)^{-2}\}^{\frac{3}{2}}=(1-x)^{-3}$$

$$(r+1)\text{-তমপদ}=\frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdots\cdots(-3-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=\frac{(-1)^r 3.4.5.\cdots\cdots(r+2)}{\lfloor r}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{1.2.3.4.5\cdots\cdots r.(r+1)(r+2)}{2\lfloor r}x^r$$

$$=\frac{\lfloor r\,(r+1)(r+2)}{2\lfloor r}x^r=\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$$

এখন $r=5$ বসাইলে x^5-এর সহগ পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ x^5-এর সহগ $=\frac{1}{2}(5+1)(5+2)=21.$

উদা. 4. $\dfrac{1-a}{(1+a)^2}$-এর a^{50}-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\frac{1-a}{(1+a)^2}=(1-a)(1+a)^{-2}=(1+a)^{-2}-a(1+a)^{-2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় a^{50}-এর সহগ $=(1+a)^{-2}$-এর a^{50}-এর সহগ $-(1+a)^{-2}$-এর a^{49}-এর সহগ,

$$=(-1)^{50}\frac{2.3.4\cdots\cdots(2+50-1)}{\lfloor 50}-\frac{(-1)^{49}2.3.\cdots\cdots(2+49-1)}{\lfloor 49}$$

$$=\frac{2.3.4\cdots\cdots 50.51}{\lfloor 50}+\frac{2.3.\cdots\cdots 49.50}{\lfloor 49}$$

$$=\frac{51\lfloor 50}{\lfloor 50}+\frac{50\lfloor 49}{\lfloor 49}=51+50=101$$

উদা. 5. দেখাও যে $(1+3x)^{\frac{17}{2}}$ এই বিস্তৃতির 11-তম পদটি প্রথম ঋনাত্মক চিহ্নযুক্ত হইবে।

মনে করি $(r+1)$-তম পদ প্রথম ঋণাত্মক চিহ্ন বিশিষ্ট।

এখন $t_{r+1}=t_r\times\dfrac{n-r+1}{r}.3x=t_r\times\dfrac{\frac{17}{2}-r+1}{r}.3x$

$$=t_r\times\frac{9\frac{1}{2}-r}{r}.3x$$

যেহেতু t_r এবং x ধনাত্মক, স্থতরাং t_{r+1} প্রথম ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত পদ হইবে যদি $9\frac{1}{2}-r$ ঋণাত্মক হয়, অর্থাৎ $r>9\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $r=10$ হয় (কারণ r, সর্বদাই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

$\therefore$ 11-তম পদ প্রথম ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হইবে।

অন্য প্রণালী : $(1+x)^n$-এর $(r+1)$-তম পদ

$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r$; ইহা ধনাত্মক চিহ্ন বিশিষ্ট থাকিবে যতক্ষণ পর্যন্ত $n+1>r$ অর্থাৎ $r<n+1$ হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, ইহা ধনাত্মক হইবে যতক্ষণ পর্যন্ত $r<\frac{17}{2}+1$ বা, $r<9\frac{1}{2}$ হইবে। অতএব, প্রথম ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত পদ হইবে যদি $r>9\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $r=10$ হয়।

$\therefore$ 11-তম পদ প্রথম ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হইবে।

উদা. 6. $(1+x)^{\frac{13}{2}}$-এর বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর যখন $x=\frac{3}{5}$

$$t_{r+1}=t_r\times\frac{n-r+1}{r}.x$$

$\therefore$ এখানে $t_{r+1}=t_r\times\frac{\frac{13}{2}-r+1}{r}.x=t_r\times\frac{\frac{15}{2}-r}{r}.\frac{3}{5}=t_r\times\frac{45-6r}{10r}$

$\therefore$ $t_{r+1}>t_r$ হইবে যতক্ষণ $45-6r>10r$ বা, $45>16r$ থাকিবে।

অর্থাৎ যতক্ষণ $r<\frac{45}{16}$ বা $2\frac{13}{16}$ থাকিবে। সুতরাং r-এর বৃহত্তর মান 2 হইতে পারে। অতএব t_3 বা ৩য় পদটি বৃহত্তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম পদ $=\frac{\frac{13}{2}(\frac{13}{2}-1)}{\lfloor 2}x^2=\frac{13.11}{2.2.2}x^2=\frac{143}{8}x^2$

দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ (Application of Binomial Theorem) :

দ্বিপদ উপপাদ্যের বিবিধ প্রয়োগ আছে। ইহাদের মধ্যে বিবিধ বীজগণিতীয় বা পাটীগণিতীয় রাশির আসন্ন মান, অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় অন্যতম। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 7. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{1\cdot01}$-এর মান নির্ণয় কর। [H. S. '72]

$$\sqrt{1\cdot01}=(1+\cdot01)^{\frac{1}{2}}=(1+\tfrac{1}{100})^{\frac{1}{2}}$$

$$=1+\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{100}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}.(\tfrac{1}{100})^2+\cdots\cdots$$

$$=1+\cdot005-\cdot0001$$

প্রথম দুই পদ লইলে নির্ণেয় মান $=1\cdot005$

প্রথম তিন পদ লইলে $=1\cdot005-\cdot0001=1\cdot0049=1\cdot004$

অবশ্য আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত মান উভয় ক্ষেত্রেই $1\cdot005$ হইবে।

উদা. 8. দেখাও যে, $\sqrt{x}-1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1.3}{2^2\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\cdots$

$$\sqrt{x}-1=x^{\frac{1}{2}}-1=\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}-1=\left(1-1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}-1$$

$$=\left\{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}-1$$

$$=1+(\tfrac{1}{2})\left\{-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\cdots\cdots-1$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1\ 3}{2^2\lfloor 2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots\cdots$$

উদা. 9. যদি b^2 তুলনায় ac খুব ছোট হয়, দেখাও যে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}$ এবং $-\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}$ হইবে।

$$ax^2+bx+c=0 \quad \therefore \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

এখন $\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}=\frac{1}{2a}\sqrt{b^2\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)}=\frac{b}{2a}\left(1-\frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{b}{2a}\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{4ac}{b^2}\right)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\left(-\frac{4ac}{b^2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

ac, b^2-এর তুলনায় খুব ছোট বলিয়া, $\frac{4ac}{b^2}$-এর পরবর্তী ঘাত আরও ছোট হইবে। সুতরাং তাহাদের বর্জন করিলে,

$$=\frac{b}{2a}\left(1-\frac{2ac}{b^2}-\frac{2a^2c^2}{b^4}\right)=\frac{b}{2a}-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}.$$

$$\therefore \text{ বীজদ্বয় }=-\frac{b}{2a}\pm\left(\frac{b}{2a}-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}\right)$$

$$=-\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3}\right) \text{ এবং } -\frac{b}{2a}-\left(\frac{b}{2a}-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^2}\right)$$

$$=-\frac{c}{b}-\frac{ac^2}{b^3} \text{ এবং } -\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{ac^2}{b^3}.$$

Exercise—14(B)

প্রথম চারিটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃত নির্ণয় কর :

1. $(1+x)^{-5}$ 2. $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 3. $(1+2x)^{-3}$

4. $(1-2x)^{\frac{3}{4}}$ 5. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$ 6. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$ 8. $\dfrac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}$ [C. U.]

9. $\sqrt{(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\infty)}$ কে x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

10. $(1-x)^{-3}$-এর চতুর্থ ও সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

11. $(a-x)^{-\frac{1}{n}}$-এর r-তম পদ কত হইবে ?

12. $(1-2x)^{-4}$-এর x^r-এর সহগ নির্ণয় কর। [H. S. '67]

সাধারণ পদ নির্ণয় কর :

13. $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$ 14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$

15. $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 16. $(4-3a)^{\frac{3}{2}}$

17. প্রমাণ কর, $(1-x+x^2-\cdots\cdots\infty)\times(1+x+x^2+\cdots\cdots\infty)$
$=1+x^2+x^4+\ldots\ldots\infty$

18. $\sqrt{\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$-কে x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাতে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সহগ নির্ণয় কর :

19. $(2-3x)^{-3}$-এর বিস্তৃতির x^5 20. $(4+3x)^{\frac{3}{2}}$-এর x^3

21. $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ এর x^{10} [C. U. '57]

22. $\dfrac{2x-5}{9-6x+x^2}$ এর x^3 এবং x^r

23. $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\infty)^{\frac{1}{3}}$ এর x^8 এবং x^r

24. $(1+x)^2(1-x)^{-3}$ এর x^n

25. প্রমাণ কর $\frac{1}{1+x+x^2}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ 1, 0 অথবা -1 হইবে, যদি r-এর রূপ $3m$, $3m-1$ অথবা $3m+1$ হয়। [P. U. '53]

26. যদি $(1+x)^{2r}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ m_r হয়, তবে প্রমাণ কর, $1+m_1+m_2+\ldots\ldots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ [C. U. '52]

27. $\left(1+\frac{7x}{2}\right)^{\frac{13}{2}}$-এর প্রথম ঋণাত্মক পদ কোন্‌টি হইবে? [P. U. '47]

28. $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$-এর প্রথম ঋণাত্মক পদটি নির্ণয় কর।

29. $(1-x)^{\frac{12}{5}}$-এর বিস্তৃতির কয়টি পদ ধনাত্মক হইবে?

30. $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর, যখন $x=\frac{12}{13}$ এবং $n=\frac{4}{3}$।

31. $(1+x)^{\frac{13}{2}}$-এর বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর, যখন $x=\frac{2}{3}$.

4 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

32. $\sqrt{102}$ 33. $\sqrt{(1{\cdot}04)}$ 34. $\sqrt[4]{621}$ 35. $\sqrt[3]{2}$

36. $\frac{213}{998}$ 37. $\sqrt[3]{122}$

38. যদি $y=x-x^2+x^3-x^4+\cdots\infty$ হয়, তবে দেখাও যে, $x=y+y^2+y^3+\ldots\ldots\infty$ হইবে।

39. যদি $y=3x+6x^2+10x^3+\cdots\infty$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x=\frac{y}{3}-\frac{1.4}{3^2.\underline{|2}}y^2+\frac{1.4.7}{3^3.\underline{|3}}y^3-\ldots\ldots$$

40. যদি $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots\infty$ হয়, তবে x-কে তৃতীয় পদ পর্যন্ত y-এর উর্দ্ধক্রম ঘাতবিশিষ্ট শ্রেণীতে প্রকাশ কর। [C. U. '31]

41. প্রমাণ কর, $(1+x)^2=1+\frac{2x}{1+x}+\frac{3x^2}{(1+x)^2}+\frac{4x^3}{(1+x)^3}+\cdots$

42. দেখাও যে, $(1+x+x^2+\cdots\infty)^2=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\ldots$ যদি $|x|<1$ হয়। [G. U. '49]

43. প্রমাণ কর,

$$\frac{1}{(1+x)^n}=\frac{1}{2^n}\left\{1+n.\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\ldots\right\}$$ [C. U. '14]

44. দেখাও যে,

$$\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}=1+\frac{x}{1+x}+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{5}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots$$

45. দেখাও যে, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{4n}$-এর মধ্যপদটি $(1-4x)^{-n-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^n এর সহগের সমান। [P. U. '57]

46. যদি x খুব ছোট হয় এবং উহার ত্রিঘাত এবং অন্যান্য উচ্চঘাত বর্জন করা যায়, প্রমাণ কর, $\frac{1}{(1+4x)^3}-\frac{1}{(1+3x)^4}=6x^2$

47. যদি a খুব ক্ষুদ্রতর হয় যে উহার বর্গ এবং ঊর্ধ্বতরঘাত বর্জন করা যায় তবে $\frac{\sqrt{1+3a}}{(1-2a)^{\frac{1}{3}}}$-এর মান নির্ণয় কর।

48. যদি x এত বড় হয় যে $\frac{1}{x^5}$কে বর্জন করা চলে, তবে প্রমাণ কর,

$\sqrt{(x^2+1)}-\sqrt{(x^2-1)}=\frac{1}{x}$-এর সমান।

49. যদি c এরূপ একটি ক্ষুদ্ররাশি হয় যে, l^3-এর তুলনায় c^3কে বর্জন করা চলে, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}$ প্রায় $2+\frac{3c^2}{4l^2}$-এর সমান। [C. U.]

একাদশ অধ্যায়

অসীম শ্রেণী এবং গুণোত্তর অসীম শ্রেণীর সমষ্টি

(Infinite Series and sum of Infinite G.P. Series)

অসীম শ্রেণী (Infinite series)

যে শ্রেণীর পদসংখ্যার সীমা নির্দিষ্ট থাকে না তাহাদের অসীম শ্রেণী বলে। অপর পক্ষে উহারা সসীম (finite) শ্রেণী হইবে। তোমরা পূর্ব অধ্যায়ে দেখিয়াছ ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ ঘাত বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্যের বিস্তৃতি যে শ্রেণী গঠন করে তাহা অসীম।

সমান্তর শ্রেণী, গুণোত্তর শ্রেণী বা বিপরীত প্রগতির শ্রেণী সম্বন্ধে তোমরা পূর্বেই জানিয়াছ এবং ইহারা সসীম শ্রেণী। ইহাদের প্রত্যেকেরই সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব হয় এবং তাহাদের সমষ্টিও সসীম হইয়া থাকে। কিন্তু কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা অসীম হইলে তাহার সমষ্টি সসীম হইতেও পারে আবার নাও হইতে পারে। সুতরাং সকল ক্ষেত্রে অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

সীমাস্থ মান (Limiting value)

কোন কোন অসীম শ্রেণীর সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত হইতে পারে, যাহা অপেক্ষা অধিক কোন প্রকারেই সম্ভব হয়, পদসংখ্যা যত বেশী হউক না কেন। যেমন, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ একটি অসীম শ্রেণী। কিন্তু ইহার সমষ্টি কোন প্রকারেই 2 অপেক্ষা অধিক হইতে পারে না, পদসংখ্যা যতই অধিক হউক না কেন। এই 2কে ঐ শ্রেণীর **সীমাস্থ মান** বলা হয়।

অভিসারী ও অপসারী শ্রেণী (Convergent and Divergent Series)

কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে যদি উহার n-পদের সমষ্টি কোন নির্দিষ্ট মান অতিক্রম করিতে না পারে, তবে সেইরূপ শ্রেণীকে **অভিসারী** (Convergent) অসীম শ্রেণী বলে। উপরের শ্রেণীটি একটি **অভিসারী** অসীম শ্রেণী।

আবার যদি কোন শ্রেণীর পদসংখ্যা অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে সীমাস্থ মানও অসীম হইয়া পড়ে, তবে সেইরূপ শ্রেণীকে **অপসারী** (divergent) অসীম শ্রেণী বলে। ইহাদের সমষ্টি নির্ণয় করা যায় না। $1+2+3+4+\cdots\cdots$ একটি **অপসারী** অসীম শ্রেণী।

আবার আর এক প্রকার অসীম শ্রেণী আছে, যাহাদের সমষ্টি বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হয়। যেমন, $1-1+1-1+1-1+\cdots$ এই শ্রেণীর সমষ্টি একবার 0 (যখন পদসংখ্যা যুগ্ম) এবং একবার 1 (যখন পদসংখ্যা অযুগ্ম) এইরূপ শ্রেণীকে **দোলায়মান** (Oscillatory) শ্রেণী বলে।

যদি সমষ্টিদ্বয়ের অন্তর নির্দিষ্ট হয়, তবে সেই দোলায়মান শ্রেণীটি নির্দিষ্ট মানের মধ্যে দোলায়মান বলা হয়। আবার যদি সমষ্টিদ্বয়ের অন্তর অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হয়, তবে শ্রেণীটিকে দোলায়মান অপসারী শ্রেণী বলা হয়।

প্রতীক (Symbol)

(1) ধনাত্মক পদবিশিষ্ট একটি শ্রেণীকে সাধারণতঃ $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ দ্বারা সূচিত করা এবং সংক্ষেপে $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ এইরূপে লেখা হয়।

(2) n-এর মান ক্রমশঃ অসীমের দিকে অগ্রসর হইলে $n\to\infty$ লেখা হয়। যদি $n\to\infty$ তবে $\frac{1}{n}\to 0$.

অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় (Sum of infinite geometric series)

n-পদ বিশিষ্ট গুণোত্তর শ্রেণী $a, ar, ar^2, \cdots ar^{n-1}$, যখন প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r। ইহা একটি সসীম শ্রেণী এবং ইহার n-পদের সমষ্টি

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ যখন } r<1 \quad \dots (1)$$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ যখন } r>1 \quad \dots (2)$$

(1) হইতে $S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{r^n}{1=r}$.

(i) এখন $|r|<1$ হইলে, n-এর মান যত বৃদ্ধি পাইবে, r^n-এর পরমমান অর্থাৎ $\frac{r^n}{1-r}$-এর মান ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে। সুতরাং n-এর মান অসীম পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে r^n-এর অর্থাৎ $\frac{r^n}{1-r}$-এর মান ক্রমশঃ ছোট হইতে থাকিবে,

অর্থাৎ $\frac{r^4}{1-r}\to 0$ যখন $n\to\infty$।

$\therefore$ তখন S_n-এর সীমাস্থ মান $\frac{a}{1-r}$ হইবে। অর্থাৎ যদি $-1<r<1$ হয় এবং $n\to\infty$, তবে $S_n\to\frac{a}{1-r}$.

$\therefore$ r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ঐ গুণোত্তর শ্রেণীর অসীম পদের সমষ্টি $\frac{a}{1-r}$ হইবে। যদি সমষ্টিকে S_∞ দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $S_\infty=\frac{a}{1-r}$ ...(3)

সুতরাং ঐ অসীম গুণোত্তর শ্রেণীটি একটি অভিসারী শ্রেণী যদি $-1<r<1$ হয়।

(ii) যদি $r > 1$ হয়, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$.

এক্ষেত্রে যদি $n \to \infty$, $r^n \to \infty$ অর্থাৎ $\frac{r^n - 1}{r-1} \to \infty$.

$\therefore$ $S_n \to \infty$ যদি $n \to \infty$।

সুতরাং এক্ষেত্রে সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয় এবং শ্রেণীটি একটি অপসারী শ্রেণী হইবে যখন $r > 1$।

(iii) যদি $r < -1$, $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1-r}$.

এক্ষেত্রে $(1 - r^n) \to +\infty$ যদি n যুগ্ম হয় এবং $\to -\infty$ যদি n অযুগ্ম হয়।

সুতরাং $S_n \to +\infty$ অথবা $-\infty$ যদি $n \to \infty$ যখন n যথাক্রমে যুগ্ম বা অযুগ্ম হয়। সুতরাং S_n-এর মান $+\infty$ হইতে $-\infty$-এর মধ্যে দোলায়মান। অতএব সেক্ষেত্রে শ্রেণীটি দোলায়মান অপসারী শ্রেণী হইবে।

উদা. 1. সমষ্টি নির্ণয় কর : $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots\cdots$ [C. U. '22]

মনে করি নির্ণেয় সমষ্টি $= S$

$$\therefore \quad S = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5^3} + \cdots\cdots\infty\right) + \left(\frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^4} + \cdots\cdots\infty\right)$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{5^2}} + \frac{\frac{3}{5^2}}{1 - \frac{1}{5^2}}$$

[প্রথম শ্রেণীটির $a = \frac{2}{5}$, $r = \frac{1}{5^2}$

দ্বিতীয় শ্রেণীটির $a = \frac{3}{5^2}$, $r = \frac{1}{5^2}$]

$$= \tfrac{2}{5} \times \tfrac{25}{24} + \tfrac{3}{25} \times \tfrac{25}{24} = \tfrac{5}{12} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{13}{24}.$$

উদা. 2. দেখাও যে $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী।

$$\text{এখানে} \quad S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \to \infty \text{ যখন } n \to \infty$$

[কারণ n-এর মান বৃদ্ধি পাইলে $\frac{1}{2^n}$-এর মান হ্রাস পাইবে এবং S_n ক্রমশঃই 2-এর দিকে অগ্রসর হইবে।]

$\therefore$ শ্রেণীটি অভিসারী।

উদা. 3. দেখাও যে, $3 + 5 + 7 + \ldots + n + \cdots$ শ্রেণীটি অপসারী।

এখানে $S_n = \frac{n}{2}\{2.3 + (n-2)2\} = n^2 + 2n \to \infty$ যখন $n \leftarrow \infty$.

$\therefore$ শ্রেণীটি অপসারী।

দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়।

উদা. 4. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\ldots\infty$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

এইরূপ শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ শ্রেণীটিকে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির আকারে লিখিতে হইবে।

প্রদত্ত শ্রেণী $=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots\cdots$

$$=\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}.$$

[**দ্রষ্টব্য :** যদি সহগগুলির লবে পরপর উৎপাদকগুলি এমন একটি সমান্তর শ্রেণী গঠন করে যাহার সাধারণ অন্তর ঘাতের হরের সমান, তবে বুঝিতে হইবে বিস্তৃতিটি দ্বিপদ।]

উদা. 5. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\infty$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. '50]

প্রদত্ত শ্রেণী $=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{1.3.5}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

উদা. 6. দেখাও যে, $\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\cdots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2)$

বামপক্ষের প্রত্যেক পদকে 3 দ্বারা গুণ করিয়া এবং সমগ্র গুণফলকে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই।

প্রদত্ত শ্রেণী $=\frac{1}{3}\left\{\frac{3.5}{3.6}+\frac{3.5.7}{3.6.9}+\frac{3.5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots\cdots\right\}$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|2}}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\underline{|3}}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{1+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|2}}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\underline{|3}}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\right\}-1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left\{\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right\}-2\right]=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}-2\right\}=\frac{1}{3}(3^{\frac{3}{2}}-2)$$

$$=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2)$$

Exercise—15

নিম্নলিখিত গুণোত্তর শ্রেণীগুলির অসীম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots$ 2. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{2}{5^4}+\frac{1}{5^3}+\frac{2}{5^6}+\cdots$

3. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}-\ldots$ 4. $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\ldots$

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$

6. $(\sqrt{2}+1)+(1)+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

7. প্রমাণ কর $a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}.\cdots\cdots\infty=a$ [G. U.]

8. দেখাও যে $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$ শ্রেণীটি একটি অভিসারী শ্রেণী এবং কোন্ মানের দিকে অভিসারী তাহা বাহির কর।

9. $1+2^2+2^3+2^4+\cdots$ শ্রেণীটি অভিসারী কিনা পরীক্ষা কর।

10. দেখাও যে, $1+2+3+4+\cdots$ শ্রেণীটি একটি অপসারী শ্রেণী।

11. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$ শ্রেণীটি অভিসারী না অপসারী তাহা পরীক্ষা কর।

12. দেখাও যে $2-2+2-2+\cdots$ শ্রেণীটি একটি দোলায়মান শ্রেণী।

13. দেখাও যে $1-2+2^2-2^3+\ldots+(-2)^{n-1}+\ldots\ldots$ শ্রেণীটি একটি দোলায়মান অপসারী শ্রেণী।

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অসীম পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

14. $1+\frac{1.2}{2.3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots$ 15. $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots$

16. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots$ 17. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{6^3}+\cdots$

18. $1+\frac{3}{2.4}+\frac{1.3.3^2}{2^2.4^2.\lfloor 2}+\frac{1.3.5.3^3}{2^3.4^3.\lfloor 3}+\ldots$

19. $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.5}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots$

20. $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.18}+\frac{2.5.8}{9.18.27}+\ldots$ [B. U.]

21. $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots$ [G. U.]

22. $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1.3}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10}+\ldots$ [B. U.]

23. $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\ldots$ [A. U.]

24. $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\ldots$ [A. U.]

25. $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8}+\ldots$

প্রমাণ কর :

26. $1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{3}}$

27. $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\ldots$

28. $\sqrt{2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots$ [H. S. '67]

29. $1+\frac{3}{2.4}+\frac{1.3.3^2}{2^2.4^2.|\underline{2}}+\frac{1.3.5.3^3}{2^3.4^3.|\underline{3}}+\cdots=2$

30. $1-\frac{1}{8}+\frac{1.5}{81.6}-\frac{1.5.9}{8.16.24}+\cdots=\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

দ্বাদশ অধ্যায়

লগারিদম্

(Logarithm)

আমরা জানি $2^3=8$; অর্থাৎ 2-এর ঘাতের সূচক যখন 3-এ উন্নীত করা হয়, তখন ইহার মান 8 হয়। 2-কে নিধান (base), 3-কে 2-এর ঘাতের (power) সূচক (index) বলে। তাহা হইলে 3-এর সহিত 8-এর সম্পর্ক কি? আমরা বলি 2 নিধান যুক্ত 8-এর লগারিদম্ 3; (ইংরাজীতে বলা হয় 3 is the logarithm of 8 to the base 2); লগারিদম্ এর চিহ্নে ইহাকে লেখা হয় $\log_2 8=3$; সেইরূপ $3^4=81$-কে লেখা হয়, $\log_3 81=4$. সাধারণ ভাবে $a^x=M$ হইলে, $\log_a M=x$ আবার বিপরীতক্রমে $x=\log_a M$ হইলে $a^x=M$ হইবে।

সংজ্ঞা: কোন নিধানকে কোন ঘাতে উন্নীত করিলে যে রাশির সহিত উহা সমান হয়, ঐ ঘাতের সূচককে ঐ রাশির প্রদত্ত নিধানেরজন্য **লঘারিদম্** (logarithm) বলে।

ইহা অবশ্যই উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, একই সংখ্যার বিভিন্ন নিধানযুক্ত লগারিদম্-এর মান বিভিন্ন হইবে। যেমন, $2^6=64$ অর্থাৎ $\log_2 64=6$; $4^3=64$ অর্থাৎ $\log_4 64=3$; আবার $8^2=64$ অর্থাৎ $\log_8 64=2$. সুতরাং নিধান ব্যতিরেকে কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর কোন অর্থ হয় না। কোন একটি সমস্যা সমাধানে যদি প্রতি ক্ষেত্রেই একই নিধান ব্যবহৃত হয়, তখন আমাদের সুবিধার জন্য নিধানকে বর্জন করিয়া থাকি। অথবা যদি কোন সম্পর্ক সকল নিধানের জন্যই সত্য হয়, সেক্ষেত্রেও আমরা সুবিধার জন্য নিধান বর্জন করিয়া থাকি।

দ্রষ্টব্য: যেহেতু $a^x=-M$, x-এর কোন বাস্তব মানে সিদ্ধ হয় না (a বাস্তব), সুতরাং ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম্ কাল্পনিক হইবে।

লগারিদম্-এর কয়েকটি সূত্র (Some properties of logarithm)

সূত্র 1. $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

[দুইটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদম্, সংখ্যাদ্বয়ের পৃথক লগারিদম্-এর যোগফলের সমান।]

প্রমাণ: মনে করি $\log_a M=x$, $\log_a N=y$

$\therefore\ a^x=M,\ a^y=N$ [সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore\ MN=a^x.a^y=a^{x+y}$ $\therefore\ \log_a(MN)=x+y$

বা, $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

অনুসিদ্ধান্ত : $\log(MNP\cdots)=\log_a M+\log_a N+\log_a P+\ldots$

সূত্র. 2. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

[দুইটি সংখ্যার অনুপাতের লগারিদ্‌ম্‌ সংখ্যাদ্বয়ের পৃথক লগারিদ্‌মের অন্তরফলের সমান।]

প্রমাণ : পূর্বের ন্যায় $\log_a M=x$, $\log_a N=y$ ধরিলে

$$a^x=M,\ a^y=N\ ;\qquad \therefore\ \frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\ \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y \qquad \text{বা, } \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$$

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a\frac{MNP\cdots}{XYZ\cdots}=\log_a M+\log_a N+\log_a P\cdots$
$-\log_a X-\log_a Y-\log_a Z-\cdots$

সূত্র. 3. $n\log_a M^n=\log_a M.$

[ঘাতযুক্ত কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌, ঐ সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ এবং ঘাতের গুণফলের সমান।]

প্রমাণ : মনে করি $\log_a M=x$ $\quad\therefore\ a^x=M\quad\therefore\ M^n=(a^x)^n$

বা, $M^n=a^{nx}$ $\quad\therefore\ \log_a M^n=nx$

বা, $\log_a M^n=n\log_a M$ $\quad$ [n-এর যে কোন মানে ইহা সত্য]

বিকল্প প্রমাণ : (সূত্র 1-এর সাহায্যে)

$\log_a M^n=\log_a(M.M.M\cdots n$-উৎপাদক পর্যন্ত)

$=\log_a M+\log_a M+\log_a M+\ldots n$-তম পদ পর্যন্ত $=n\log_a M.$

নিধানের পরিবর্তন (Change of base) :

বর্তমানে আমরা বিভিন্ন নিধানযুক্ত একই সংখ্যার মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করিব যদি একটি নিধানযুক্ত কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ দেওয়া থাকে।

সূত্র. 4. $\log_a M=\log_b M\times\log_a b.$

প্রমাণ : মনে করি $\log_a M=x$, $\log_b M=y$, $\log_a b=z$

$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $a^x=M,\ b^y=M,\ a^z=b$

$$\therefore\ a^x=M=b^y=(a^z)^y=a^{yz}$$

$$\therefore\ x=yz \qquad \therefore\ \log_a M=\log_b M\times\log_a b$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. এই সূত্রে $M=a$ ধরিলে $\log_b a \times \log_a b = \log_a a$

এখন $\log_a a = 1$ [প্রমাণ পরে দ্রষ্টব্য]

$\therefore \quad \log_b a \times \log_a b = 1$ বা, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

$= \log_b M \times \dfrac{1}{\log_b a}$ [অনুসিদ্ধান্ত 1-হইতে]

$\therefore \quad \log_a M = \log_b M / \log_b a$

বিশেষ কয়েকটি ক্ষেত্র (Special cases)

(i) আমরা জানি $a^\circ = 1$ যখন $a \neq 1$, যে কোন বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore$ লগারিদ্‌ম্‌-এর সংজ্ঞানুসারে $\log_a 1 = 0$; অর্থাৎ যে কোন নিধানযুক্ত 1-এর লগারিদ্‌ম্‌ শূন্য হইবে।

(ii) আবার, $a^1 = a \quad \therefore \quad \log_a a = 1$; অর্থাৎ যাহা নিধান তাহারই লগারিদ্‌ম্‌ সর্বদাই 1 হইবে।

(iii) $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \quad \therefore \quad \log_a \left(\dfrac{1}{a}\right) = -1$; অর্থাৎ কোন নিধানের $(\neq 1)$ অন্যোন্যকের লগারিদ্‌ম্‌ -1.

(iv) নিধান <1 হইলে, $\log 0 = +\infty$ এবং নিধান >1 হইলে $\log 0 = -\infty$ হইবে।

$a<1$ ধরিলে $a^x = 0$ হইলে, $x = +\infty \quad \therefore \quad \log_a 0 = +\infty$

আবার $a>1$ ধরিয়া যদি $a^x = 0$ হয়, তবে $x = -\infty \quad \therefore \quad \log_a 0 = -\infty$.

উদা. 1. নিধান $2\sqrt{5}$ হইলে 400-এর লগারিদ্‌ম্‌ কত হইবে ?

মনে করি নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্‌ $= x$

$\therefore \quad \log_{2\sqrt{5}} 400 = x$ বা, $(2\sqrt{5})^x = 400 = 16.25 = 2^4.5^2 = (2\sqrt{5})^4$

$\therefore \quad x = 4. \quad \therefore$ নির্ণেয় লগারিদ্‌ম্‌ $= 4$

উদা. 2. $\frac{1}{3}$ এর লগারিদ্‌ম্‌ $-\frac{1}{3}$ হইলে উহার নিধান কত ?

মনে করি, নির্ণেয় নিধান $= x$

$\therefore \quad \log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ বা, $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} = 3^{-1} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = (27)^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \quad x = 27$

$\therefore$ নির্ণেয় নিধান $= 27$

উদা. 3. প্রমাণ কর: $7\log\frac{15}{16}+6\log\frac{8}{3}+5\log\frac{2}{5}+\log\frac{32}{25}=\log 3$

বামপক্ষ $=7(\log 15-\log 16)+6(\log 8-\log 3)+5(\log 2-\log 5)$
$\quad +(\log 32-\log 25)$

$=7\log(3\times 5)-7\log 2^4+6\log 2^3-6\log 3$
$\quad +5\log 2-5\log 5+\log 2^5-\log 5^2$

$=7\log 3+7\log 5-28\log 2+18\log 2-6\log 3$
$\quad +5\log 2-5\log 5+5\log 2-2\log 5$

$=7\log 3-6\log 3-28\log 2+28\log 2+7\log 5-7\log 5$

$=\log 3=$ ডানপক্ষ

উদা. 4. দেখাও যে, $\log_{10} 2$-এর মান $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{4}$-এর মধ্যে থাকে।

[C. U. '26]

এখন $8<10<16$

বা, $\log_{10} 8<\log_{10} 10<\log_{10} 16$

বা, $\log_{10} 2^3<1<\log_{10} 2^4$ বা, $3\log_{10} 2<1<4\log_{10} 2$

বা, $3<\dfrac{1}{\log_{10} 2}<4$ বা, $\frac{1}{3}>\log_{10} 2>\frac{1}{4}$ [প্রমাণিত]

উদা. 5. যদি $\dfrac{\log a}{y-z}=\dfrac{\log b}{z-x}=\dfrac{\log c}{x-y}$ হয়, দেখাও যে, $a^x b^y c^z=1$

মনে করি, $\dfrac{\log a}{y-z}=\dfrac{\log b}{z-x}=\dfrac{\log c}{x-y}=k$

$\therefore \log a=k(y-z)$ বা, $x\log a=xk(y-z)$

বা, $\log a^x=k(xy-zx)$ ...(1)

$\log b=k(z-x)$ বা, $y\log b=yk(z-x)$

বা, $\log b^y=k(yz-xy)$ ...(2)

$\log c=k(x-y)$ বা, $z\log c=zk(x-y)$

বা, $\log c^z=k(zx-yz)$ ...(3)

(1), (2), (3) যোগ করিয়া পাই,

$\log a^x+\log b^y+\log c^z=k(xy-zx+yz-xy+zx-yz)$

বা, $\log(a^x b^y c^z)=k.0=0=\log 1$ বা, $a^x b^y c^z=1$

উদা. 6. যদি $a^2+b^2=23ab$ হয় দেখাও যে,

$$\log\{\tfrac{1}{5}(a+b)\}=\tfrac{1}{2}(\log a+\log b)$$

$a^2+b^2=23ab$ বা, $a^2+2ab+b^2=25ab$

বা, $(a+b)^2=25ab$ বা, $\{\frac{1}{5}(a+b)\}^2=ab$

বা, $\frac{1}{5}(a+b)=(ab)^{\frac{1}{2}}$

এখন উভয়পক্ষে লগ্ লইলে,

$$\log\{\tfrac{1}{5}(a+b)\}=\log(ab)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}(\log a+\log b)$$

উদা. 7. প্রমাণ কর : $\log_b a\times\log_c b\times\log_d c=\log_d a$

বামপক্ষ $=\log_b a\times\log_c b\times\log_d c$

$=\log_d a\times\log_b d\times\log_d b$

$=\log_d a\times\log_b d\times\dfrac{1}{\log_b d}=\log_d a$

উদা. 8. যদি $x=\log_a(bc)$, $y=\log_b(ca)$ এবং $z=\log_c(ab)$ হয়, প্রমাণ কর $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1$

$x=\log_a(bc)$ বা, $a^x=bc$ বা, $a.a^x=abc$

বা, $a^{1+x}=abc$ বা, $a=(abc)^{\frac{1}{1+x}}$ ... (1)

$y=\log_b(ca)$ বা, $b^y=ca$ বা, $b.b^y=abc$

বা, $b^{1+y}=abc$ বা, $b=(abc)^{\frac{1}{1+y}}$ ... (2)

$z=\log_c(ab)$ বা, $c^z=ab$ বা, $c.c^z=abc$

বা, $c^{1+z}=abc$ বা, $c=(abc)^{\frac{1}{1+z}}$ ... (3)

(1), (2), (3) গুণ করিয়া পাই,

$$(abc)^{\frac{1}{1+x}}.(abc)^{\frac{1}{1+y}}.(abc)^{\frac{1}{1+z}}=abc$$

বা, $(abc)^{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}}=(abc)^1$ $\therefore$ $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1$

উদা. 9. যদি $\log_a b=10$ এবং $\log_{6a}(32b)=5$ হয়, a-র মান নির্ণয় কর। [C. U. '49]

$\log_a b=10$ $\therefore$ $a^{10}=b$ ... (1)

$\log_{6a}(32b)=5$ $\therefore$ $(6a)^5=32b$ ... (2)

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$\frac{a^{10}}{(6a)^5}=\frac{b}{32b}$ বা, $\frac{a^{10}}{6^5.a^5}=\frac{1}{2^5}$

বা, $a^5=\frac{6^5}{2^5}=3^5$. বা, $a=3$

উদা. 10. $\log_{10}x-\log_{10}\sqrt{x}=\frac{2}{\log_{10}x}$. $\log_{10}x$-এর মান নির্ণয় কর।

বা, $\log_{10}x-\log_{10}x^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\log_{10}x}$ বা, $\log_{10}x-\frac{1}{2}\log_{10}x=\frac{2}{\log_{10}x}$

বা, $\frac{1}{2}\log_{10}x=\frac{2}{\log_{10}x}$ বা, $(\log_{10}x)^2=4$

বা, $\log_{10}x=\pm 2$

Exericse—15

1. প্রদত্ত নিধান যুক্ত নিম্নলিখিত রাশিগুলির লগারিদম্ নির্ণয় কর :

(i) $3\sqrt{2}$ নিধানযুক্ত 5832 (ii) $\sqrt[3]{9}$ নিধানযুক্ত 81

(iii) $5\sqrt{5}$ নিধানযুক্ত 125 (iv) $2\sqrt{3}$ নিধানযুক্ত 1728

(v) $9\sqrt{3}$ নিধানযুক্ত ·1 (vi) $\sqrt[3]{7}$ নিধানযুক্ত 2401

(vii) ·01 নিধানযুক্ত ·000001 (viii) $\cot\alpha$ নিধানযুক্ত $\tan^3\alpha$

2. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে নিধান নির্ণয় কর যখন :

(i) 1296-এর লগারিদম্ 4 (ii) $\frac{1}{2}$-এর লগারিদম্ $-\frac{1}{2}$

(iii) $\sqrt{5}$-এর লগারিদম্ $\frac{1}{2}$ (iv) $\cos^3\alpha$-এর লগারিদম্ -3

3. প্রমাণ কর :

) $a^{\log_a x}=x$ (ii) $\log_a\left(\frac{1}{a^n}\right)=-n$

(iii) $a^{\log b}=b^{\log a}$.

4. নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

(a) $\log\frac{384}{5}+\log\frac{81}{32}+3\log\frac{5}{3}+\log\frac{1}{9}=2$ [H. S. '60]

(b) $\log\frac{81}{8}-2\log\frac{3}{2}+3\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}=0$ [H. S. Comp. '60]

(c) $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$ [H. S. '61]

(d) $\log_{10}2+16\log_{10}\frac{16}{15}+12\log_{10}\frac{25}{24}+7\log_{10}\frac{81}{80}=1$ [H. S. Comp. '61]

(e) $7 \log \frac{15}{16} + 6 \log \frac{8}{3} + 5 \log \frac{2}{5} + 5 \log \frac{32}{25} = \log 3$ [H. S. '62]

(f) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$ [H. S. '68]

5. প্রমাণ কর, $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$

6. প্রমাণ কর :

(i) $\log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} 256 = 1$ (ii) $\log_3 \log_2 \log_{\sqrt{3}} 81 = 1$

7. দেখাও যে, $\log_{10} 3$-এর মান $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$-এর মধ্যে থাকিবে।

8. যদি $\log_e m + \log_e n = \log_e(m+n)$ হয়, তবে m-এর মান n-এর অপেক্ষক হিসাবে বাহির কর।

9. যদি $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ হয়, প্রমাণ কর $x^x y^y z^z = 1$.

10. যদি $\frac{\log a}{y-z} = \frac{\log b}{z-x} = \frac{\log c}{x-y}$ হয়, তবে প্রমাণ কর,

(i) $a^x b^y c^z = 1$ (iii) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$

11. প্রমাণ কর ; $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$

[C. U. '55]

12. প্রমাণ কর : $\log \frac{b^n}{c^n} + \log \frac{c^n}{a^n} + \log \frac{a^n}{b^n} = 0$ [C. U. '44]

13. প্রমাণ কর : $\log a + \log a^2 + \log a^3 + \cdots + \log a^n = \frac{1}{2} n(n+1) \log a$

14. প্রমাণ কর :

(i) $\log_a x + \log_b y = \log_b x \times \log_a y$

(ii) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c d \times \log_d a = 1$

15. যদি $\log(x^2 y^3) = a$ এবং $\log\left(\frac{x}{y}\right) = b$ হয় তবে $\log x$ এবং $\log y$-এর মান a, b দ্বারা বাহির কর।

16. যদি $a^{2-x} b^{5x} = a^{x+3} b^{3x}$ হয়,

প্রমাণ কর, $x \log\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} \log a$ [H. S. '69]

17. যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, প্রমাণ কর $\log\{\frac{1}{3}(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

18. যদি $x = \log_{2a} a$, $y = \log_{3a} 2a$ এবং $z = \log_{4a} 3a$ হয়, তবে দেখাও যে, $1 + xyz = 2yz$ [A. U. '49]

19. মান নির্ণয় কর : $\log_3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\cdots}}}$

20. যদি x, y, z গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করে, তবে প্রমাণ কর, $\log_a x$, $\log_a y$ এবং $\log_a z$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করে।

21. a, b, c গুণোত্তর শ্রেণী গঠন করিলে প্রমাণ কর $\log_a a$, $\log_b y$, $\log_c x$, বিপরীত প্রগতিতে (H.P) থাকিবে।

22. যদি P, Q, R কোন গুণোত্তর শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ হয়, তবে দেখাও যে $(q-r)\log P+(r-p)\log Q+(p-q)\log R=0$ [C. U. '62]

23. দেখাও যে, $(yz)^{\log y-\log z}\times(zx)^{\log z-\log x}$
$\times(xy)^{\log x-\log y}=1$ [G.U. '49]

24. যদি $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a}=\dfrac{b(c+a-b)}{\log b}=\dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$, দেখাও যে,
$b^c c^b=c^a a^c=a^b b^a$.

25. $\log_m x=a$, $\log_n x=b$ হইলে প্রমাণ কর, $\log_{\frac{m}{n}} x=\dfrac{ab}{b-a}$

26. যদি $y=a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z=a^{\frac{1}{1-\log y}}$ হয় তবে প্রমাণ কর, $x=a^{\frac{1}{1-\log z}}$
[H. S. '

27. প্রমাণ কর, $\dfrac{1}{\log_x(xyz)}+\dfrac{1}{\log_y(xyz)}+\dfrac{1}{\log_z(xyz)}=1$

28. যদি $xy^{l-1}=a$, $xy^{m-1}=b$, $xy^{n-1}=c$ হয়, তবে প্রমাণ কর,
$(m-n)\log a+(n-l)\log b+(l-m)\log c=0$

29. যদি $p=\log_a(bc)$, $q=\log_b(ca)$, $r=\log_c(ab)$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $pqr=p+q+r+2$.

30. যদি $\dfrac{xy\log(xy)}{x+y}=\dfrac{yz\log(yz)}{y+z}=\dfrac{zx\log(zx)}{z+y}$ হয়,
তবে প্রমাণ কর, $x^x=y^y=z^z$.

সাধারণ লগারিদ্‌ম্ (Common logarithm)

লগারিদ্‌ম্ এর নিধান হিসাবে যে কোন সংখ্যাকেই ব্যবহার করা যায় এবং কোন একটি নিধানের সাপেক্ষে বিভিন্ন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায়। অবশ্য কার্যক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুই পদ্ধতির লগারিদ্‌ম্ ব্যবহার করা হয়। ন্যাপিরিয়ান পদ্ধতি (Napierian System) এবং সাধারণ পদ্ধতি (Common System)।

ন্যাপিরিয়ান পদ্ধতি উদ্ভাবক জন্ নেপিয়ার এবং তাহার নামানুসারেই এই পদ্ধতির নামাকরণ হইয়াছে। এক্ষেত্রে লগারিদম্-এর নিধান হিসাবে অমেয় সংখ্যা (Incommensurable Number) e-কে লওয়া হয়। যখন $e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+$ ......একটি অসীম শ্রেণী এবং আসন্ন 5 দশমিক পর্যন্ত মান 2·71828. [এই সম্বন্ধে বিস্তারিত পরবর্তী অধ্যায়ে পাইবে]

নিধান 10 যুক্ত লগারিদম্‌কে সাধারণ লগারিদম্ বলে। কোন লগারিদমের নিধান না থাকিলে উহা 10 ধরিতে হইবে। এই পদ্ধতির উদ্ভাবক গাণিতিক Henry Briggs।

পূর্ণক এবং অংশক (Characteristic and Mantissa)

$10^0=1 \qquad \therefore \log 1=0$

$10^1=10 \qquad \therefore \log 10=1$

$10^2=100 \qquad \therefore \log 100=2$

$10^3=1000 \qquad \therefore \log 1000=3$ ইত্যাদি।

এখানে দেখা যাইতেছে যে, 11 হইতে 99 পর্যন্ত যে কোন রাশির লগারিদম্ 1 অপেক্ষা বড় কিন্তু 2 অপেক্ষা ছোট, অর্থাৎ 1+1-অপেক্ষা ছোট দশমিক অংক। সুতরাং সকল সংখ্যার লগারিদম্ পূর্ণ সংখ্যা হইবে না। কিছু অংশ পূর্ণ এবং কিছু অংশ দশমিকাংশ হইবে।

কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণ অংশের নাম পূর্ণক (Characteristic) এবং দশমিকাংশের নাম অংশক (Mantissa)। আবার 2 হইতে 9 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক 0; 11 হইতে 99 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম্ এর পূর্ণক 1; 101 হইতে 999 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক 2; ইত্যাদি। সুতরাং কোন রাশির পূর্ণ অংশে অঙ্ক সংখ্যা হইতে 1 কম উহার লগারিদম্ এর পূর্ণক হইবে।

আবার $10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot 1 \qquad \therefore \log \cdot 1=-1$

$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot 01 \qquad \therefore \log \cdot 01=-2$

$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot 001 \qquad \therefore \log \cdot 001=-3$ ইত্যাদি।

মনে কর, log ·05 এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\cdot 01<\cdot 05<\cdot 1 \qquad \therefore \log \cdot 01<\log \cdot 05<\log \cdot 1$

অর্থাৎ $-2<\log \cdot 05<-1$

অর্থাৎ log ·05 এর মান −2 অপেক্ষা বড় কিন্তু −1 অপেক্ষা ছোট।

$\therefore \log \cdot 05=-2+$দশমিকাংশ।

সুতরাং ইহার পূর্ণক ঋণাত্মক এবং অংশক ধনাত্মক।

এখানে দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যতগুলি শূন্য থাকিবে সেই সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী পূর্ণক হইবে এবং তাহা ঋণাত্মক হইবে। শূন্য অংশকে সর্বক্ষেত্রেই ধনাত্মক হইবে।

দুইটি প্রয়োজনীয় টীকা (Two important Notes)

(a) 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম্ এর পূর্ণক ধনাত্মক এবং সংখ্যাটির পূর্ণ অংশের অঙ্ক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম হইবে। যেমন 6283·432 এর লগারিদ্‌ম্ এর পূর্ণক 3।

(b) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদ্‌ম্-এর পূর্ণক ঋণাত্মক এবং দশমিক বিন্দুর পরে যতগুলি শূন্য হইবে তাহা অপেক্ষা 1 বেশী সাংখ্যমানবিশিষ্ট হইবে।

একই অংশকবিশিষ্ট বিভিন্ন সংখ্যা (Numbers having the same mantissa)

একই সার্থক অঙ্কবিশিষ্ট এবং একই প্রকারে সজ্জিত দশমিক বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থান বিশিষ্ট সকল সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ এর অংশক একই হইবে।

মনে করি, x যে কোন একটি সংখ্যা; তাহা হইলে $x\times 10^m$ অথবা, $x\div 10^n$ (যখন m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) এর মান x এর সমান অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হইবে। (কারণ 10 এর কোন ঘাত দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে সংখ্যাটির সার্থক অঙ্কের ক্রমের কোন পরিবর্তন ঘটে না।)

এখন $\log(x\times 10^m)=\log x+\log 10^m=\log x+m\log 10$

$$=\log x+m \qquad \cdots \qquad (1)$$

এবং $\log(x\div 10^n)=\log x-\log 10^n=\log x-n\log 10$

$$=\log x-n \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) নং একটি পূর্ণ সংখ্যা যুক্ত এবং (2) নং এ একটি পূর্ণসংখ্যা $\log x$ হইতে বিযুক্ত হইয়াছে। দশমিক অংশ অর্থাৎ অংশক উভয়ক্ষেত্রেই সমান রহিয়াছে।

লগ্ তালিকা হইতে অংশক বাহির করিবার নিয়ম (Rule of finding out the mantissa from log table)

লগতালিকা হইতে অংশকের মান বাহির করিতে হয়। বিভিন্ন অঙ্কবিশিষ্ট লগ্ তালিকা থাকে।

লগ্ তালিকার প্রথম স্তম্ভে একটির নীচে আর একটি সংখ্যা হিসাবে মোটা অক্ষরে 10 হইতে 99 পর্যন্ত সংখ্যা থাকে। তালিকার উপরে সাধারণ অক্ষরে 0 হইতে 9 পর্যন্ত এবং তারও পরে আরও ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। ঐ

উপরের সারির নীচে এবং বামের মোটা সংখ্যার ডানদিকের সারিতে প্রতিঘরে যে সব সংখ্যা আছে তাহারা পূর্ণসংখ্যা নহে। তাহাদের পূর্বে দশমিক বিন্দু আছে ধরিয়া লইতে হইবে। অর্থাৎ 0356 লেখা থাকিলে উহা ·0356 ধরিতে হইবে। লগ্‌ তালিকা হইতে কিরূপে অংশক বাহির করিতে হয়, তাহা নিম্নের উদাহরণ হইতে বুঝিতে পারিবে।

(i) মনে কর 46-এর লগের অংশক বাহির করিতে হইবে। এখন প্রথম স্তম্ভের 46-এর পর ঠিক উপরের 0 স্তম্ভের নীচে আছে 6628 ; সুতরাং 46-এর লগের অংশক হইবে ·6628.

(ii) 465-এর লগের অংশক বাহির করিতে হইলে 46-এর সারি এবং যে স্তম্ভের মাথার উপর 5 আছে তাহারা যে সংখ্যায় পরস্পর লম্বভাবে মিলিত হইবে তাহা বাহির করিতে হইবে। এক্ষেত্রে উহা 6675 ; সুতরাং 465-এর অংশক ·6675.

(iii) 4659-এর লগের অংশক বাহির করিতে হইলে, প্রদত্ত সংখ্যার 465-এর অংশক ·6675 নির্ণয় করিবে। এখন প্রদত্ত সংখ্যার চতুর্থ অঙ্ক 9 ; এখন 46-এর সারিতে ডানদিকে ছোট অক্ষরে 1 হইতে 9 পর্যন্ত যে সংখ্যা আছে তাহার 9-এর নীচের আছে 81 অর্থাৎ ·0008 এখন ·6675-এর সহিত ·0008 যোগ করিয়া পাওয়া যায় ·6683 ; ইহাই 4659-এর লগের অংশক।

দ্রষ্টব্য ঃ 4659-এর লগের পূর্ণক 3 এবং অংশক ·6683.

$$\therefore \log 4659 = 3{\cdot}6683$$

অনুরূপে $\log 46 = 1{\cdot}6628$, $\log 465 = 2{\cdot}6675$

পূর্বেই বলা হইয়াছে, যে সব সংখ্যার অঙ্কগুলি সমান এবং একই ভাবে সজ্জিত কিন্তু দশমিক বিন্দুর অবস্থান পৃথক, তাহাদের প্রত্যেকের লগের অংশক সমান হইবে।

যেমন $\log 465{\cdot}9 = \log\frac{4659}{10} = \log 4659 - \log 10 = 3{\cdot}6683 - 1$
$$= 2{\cdot}6683 \quad ;$$

$$\log 46{\cdot}59 = \log\frac{4659}{100} = \log 4659 - \log 100 = 3{\cdot}6683 - 2 = 1{\cdot}6683$$

$$\log 4{\cdot}659 = \log\frac{4659}{1000} = \log 4659 - \log 1000 = 3{\cdot}6683 - 3 = {\cdot}6683$$

$$\log {\cdot}4659 = \log\frac{4659}{10000} = \log 4659 - \log 10000 = 3{\cdot}6683 - 4$$
$$= 3 + {\cdot}6683 - 4 = -1 + {\cdot}6683 = \bar{1}{\cdot}6683$$

$\therefore$ log ·4659-এর পূর্ণক -1 এবং অংশক ·6683.

ইহাকে $-1{\cdot}6683$ হিসাবে লেখা হয় না। কারণ এরূপ লিখিলে সমস্ত সংখ্যাটিকেই ঋণাত্মক বলিয়া মনে হইতে পারে। কিন্তু অংশক ঋণাত্মক নয়, পূর্ণক ঋণাত্মক। পূর্ণক ঋণাত্মক বুঝাইবার জন্য 1-এর মাথার উপর একটি রেখা টানিয়া পরে

দশমিক বিন্দু এবং দশমিক বিন্দুর পরে অংশক লেখা হয়। এই রেখাকে Bar (বার) বলে। অর্থাৎ $\bar{1}$, $\bar{2}$, এইরূপ লিখিয়া উহাদের ঋণাত্মক বুঝানো হইয়া থাকে।

অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বা অ্যান্টিলগ (Antilogarithm or Antilog).

কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ x হইলে, ঐ সংখ্যাকে x-এর অ্যান্টিলগারিদ্‌ম্ বা অ্যান্টিলগ বলে। যেমন 465·9-এর লগারিদ্‌ম্ 2·6683 ; ∴ 2·6683-এর অ্যান্টিলগ 465·9 হইবে।

অ্যান্টিলগ বাহির করিবার পদ্ধতি :

লগ তালিকার ন্যায় অ্যান্টিলগের তালিকা ও লগ তালিকার পরে দেওয়া থাকে। এই তালিকার প্রথম সারিতে দশমিক বিন্দুর পরে দুইটি অঙ্ক দেওয়া থাকে। তাহারা লগারিদ্‌ম্-এর অংশকের প্রথম দুইটি অঙ্ক।

মনে কর 2·6683-এর অ্যান্টিলগ বাহির করিতে হইবে। ইহার অংশক ·6683। সুতরাং ·66-এর সারি এবং যে স্তম্ভের উপর 8 আছে তাহারা যে সংখ্যায় পরস্পর লম্ব ভাবে মিলিত হইয়াছে, তাহার মান 4656 এবং এই সারির আরও ডানদিকে 3-এর নীচে আছে 3 ; এই 3, 4656-এর সহিত যোগ করিয়া পাওয়া যায় 4659. অতএব ·6683 এই অংশকের জন্য পাওয়া গেল 4659 এবং 2·6683-এর পূর্ণক 2 ; সুতরাং ইহা যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ তাহার পূর্ণ সংখ্যায় তিনটি অঙ্ক আছে।

∴ 2·6683-এর অ্যান্টিলগ = 465·9

অনুরূপে 3·6683-এর অ্যান্টিলগ = 4659

1·6683-এর অ্যান্টিলগ = 46·59

$\bar{2}$·6683-এর অ্যান্টিলগ = ·04659

উদা. 1. $(6)^{24}$ সংখ্যাটিতে মোট কয়টি অঙ্ক থাকিবে। প্রদত্ত $\log 2 = \cdot 3010$ এবং $\log 3 = \cdot 4771$

এখন $\log(6)^{24} = 24 \log 6 = 24 \log (2 \times 3) = 24(\log 2 + \log 3)$

$= 24(\cdot 3010 + \cdot 4771) = 24 \times \cdot 7781 = 18\cdot 6744.$

যেহেতু $\log(6)^{24}$-এর পূর্ণক 18, সুতরাং সংখ্যাটিতে মোট 19টি অঙ্ক আছে।

উদা. 2. $(1\cdot 62)^{-20}$-এর দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে কতগুলি শূন্য আছে ?

মনে করি $x = (1\cdot 62)^{-20}$

$$\therefore \log x = \log (1\cdot 62)^{-20} = -20 \log \tfrac{162}{100} = -20(\log 162 - \log 100)$$

$$= -20\{\log(3^4 \times 2) - 2\} = -20\{4 \log 3 + \log 2 - 2\}$$

$$= -20\{4 \times \cdot 4771 + \cdot 3010 - 2\}$$

$$= -20\{1{\cdot}9084 + {\cdot}3010 - 2\}$$
$$= -20(2{\cdot}2094 - 2) = -20 \times {\cdot}2094 = -4{\cdot}1880$$
$$= -5 + 5 - 4{\cdot}1880 = -5{\cdot}8120 = \bar{5}{\cdot}8120$$

$\therefore$ $\log(1{\cdot}62)^{-20}$-এর পূর্ণক $\bar{5}$

$\therefore$ দশমিক বিন্দু ও প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে শূন্য $= 5 - 1 = 4$টি।

উদা. 3. $\log 2 = {\cdot}3010300$ এবং $\log 3 = {\cdot}4771213$ হইলে $5\frac{1}{16}$-এর লগ-এর মান কত হইবে ?

$$\log 5\tfrac{1}{16} = \log \tfrac{81}{16} = \log 81 - \log 16 = \log 3^4 - \log 2^4$$
$$= 4(\log 3 - \log 2) = 4({\cdot}4771213 - {\cdot}3010300)$$
$$= 4 \times {\cdot}1760913 = {\cdot}7043652$$

উদা. 4. $\sqrt[5]{{\cdot}00000165}$-এর মান নির্ণয় কর প্রদত্ত $\log 165 = 2{\cdot}2175$ এবং $\log 6974 = 3{\cdot}8435$.

মনে করি $x = \sqrt[5]{{\cdot}00000165} = ({\cdot}00000165)^{\frac{1}{5}}$

$$\therefore \log x = \tfrac{1}{5}\log {\cdot}00000165 = \tfrac{1}{5}(\log 165 - 8) = \tfrac{1}{5}(2{\cdot}2175 - 8)$$
$$= \tfrac{1}{5}(-5{\cdot}7825) = -1{\cdot}1565 = -5 + 5 - 1{\cdot}1565$$
$$= -5 + 3{\cdot}8435 = 3{\cdot}8435 - 5 = \log 6974 - \log 100000$$
$$= \log \tfrac{6974}{100000} = \log {\cdot}06974 \qquad \therefore x = {\cdot}06974$$
$$\therefore \sqrt[5]{{\cdot}00000165} = {\cdot}06974$$

উদা. 5. $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$ সমীকরণ হইতে x-এর দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে $\log 2 = {\cdot}3010300$ ও $\log 3 = {\cdot}4771213$ **[C. U. '38]**

$$6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$$

উভয়পক্ষের লগ লইয়া পাই, $\log(6^{3-4x}.4^{x+5}) = \log 8$

বা, $(3-4x)\log(2\times 3) + (x+5)\log 2^2 = \log 2^3$

বা, $(3-4x)(\log 2 + \log 3) + 2(x+5)\log 2 = 3\log 2$

বা, $x(-4\log 2 - 4\log 3 + 2\log 2)$
$$= 3\log 2 - 3\log 2 - 3\log 3 - 10\log 2$$

বা, $x(4\log 3 + 2\log 2) = 10\log 2 + 3\log 3$

বা, $x = \dfrac{10\log 2 + 3\log 3}{4\log 3 + 2\log 2} = \dfrac{10\times{\cdot}3010300 + 3\times{\cdot}4771213}{4\times{\cdot}4771213 + 2\times{\cdot}3010300}$

$$= \frac{3{\cdot}010300 + 1{\cdot}4313639}{1{\cdot}9084852 + {\cdot}6020600} = \frac{4{\cdot}4416639}{2{\cdot}5105452} = 1{\cdot}769$$

$= 1{\cdot}77$ (আসন্ন দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)।

উদা. 6. $\log 2 = \cdot3010300$ এবং $\log 3 = \cdot4771213$ হইলে

$$\log\left\{\frac{(10\cdot8)^{\frac{1}{2}} \times (\cdot24)^{\frac{5}{3}}}{(90)^{-2}}\right\} \quad [\text{H. S. '65}]$$

$$\log\left\{\frac{(10\cdot8)^{\frac{1}{2}} \times (\cdot24)^{\frac{5}{3}}}{(90)^{-2}}\right\} = \log(10\cdot8)^{\frac{1}{2}} + \log(\cdot24)^{\frac{5}{3}} - \log(90)^{-2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\tfrac{108}{10} + \tfrac{5}{3}\log\tfrac{24}{100} + 2\log 90$$

$$= \tfrac{1}{2}\log(3^3 \times 2^2) - \tfrac{1}{2}\log 10 + \tfrac{5}{3}\log(3 \times 2^3) - \tfrac{5}{3}\log 100 + 2\log(3^2 \times 10)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\log 3^3 + \log 2^2) - \tfrac{1}{2}.1 + \tfrac{5}{3}(\log 3 + \log 2^3) - \tfrac{5}{3} \times 2 + 2(\log 3^2 + \log 10)$$

$$= \tfrac{1}{2}(3\log 3 + 2\log 2) - \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{3}(\log 3 + 3\log 2) - \tfrac{10}{3} + 2(2\log 3 + 1)$$

$$= \tfrac{3}{2}\log 3 + \log 2 + \tfrac{5}{3}\log 3 + 5\log 2 + 4\log 3 + 2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{10}{3}$$

$$= 6\log 2 + (\tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{3} + 4)\log 3 - \tfrac{11}{6}$$

$$= 6 \times \cdot3010300 + \tfrac{43}{6} \times \cdot4771213 - \tfrac{11}{6}$$

$$= 1\cdot8061800 + 3\cdot4193693 - 1\cdot8333333$$

$$= 5\cdot2255493 - 1\cdot8333333 = 3\cdot3922160.$$

সমানুপাতিক অংশের নীতি (Principle of proportional parts)

মনে কর লগ তালিকা হইতে 3265 এবং 3266-এর মান বাহির করা হইল এবং 3265·7-এর মান বাহির করিতে হইবে। কী প্রকারে তাহা করা হইবে? এইজন্য সমানুপাতিক অংশের নীতি (Principle of proportional parts) প্রয়োগ করা হয়।

যদি কোন সংখ্যার মান একটি চলরাশি x-এর উপর নির্ভরশীল হয় এবং উহার মানের (x-এর মানের জন্য) একটি নির্দিষ্ট ক্ষুদ্র অন্তর অন্তর তালিকা করা হয়, তাহা হইলে অধিকাংশ ক্ষেত্রে x-এর সামান্য পরিবর্তনের জন্য, তালিকার মানের যে সামান্য পরিবর্তন ঘটে তাহা x-এর পরিবর্তনের সহিত সমানুপাতিক।'

কোন সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয়ে এবং যে সংখ্যার লগারিদম্ দেওয়া আছে তাহা নির্ণয়ে এই নীতির প্রয়োগ নিম্নে প্রদত্ত হইল।

উদা. 7. প্রদত্ত $\log 63374 = 4\cdot8019111$ এবং $\log 63375 = 4\cdot8019180$ হইলে $\log 63\cdot3743$ এবং যে সংখ্যার লগারিদম্ $\bar{2}\cdot801913$ সেই সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

এখন $\log 63374 = 4\cdot8019111$ এবং $\log 63375 = 4\cdot8019180$. সুতরাং সংখ্যারমান 1 বৃদ্ধির জন্য লগারিদম্ মান ·0000069 বৃদ্ধি পায়। সুতরাং সমানুপাতিক অংশের নীতি অনুযায়ী, সংখ্যার মান ·3 বৃদ্ধির জন্য লগারিদম্ বৃদ্ধি হইবে,

$$\cdot3 \times \cdot0000069 = \cdot00000207 = \cdot0000021 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore \quad \log 63474{\cdot}3 = 4{\cdot}8019111 + {\cdot}0000021 = 4{\cdot}8019132$

$\therefore \quad \log 63{\cdot}3743 = 1{\cdot}8019132$

আবার 4·8019136, 4·8019111 এবং 4·8019180-এর মধ্যে অবস্থিত এবং প্রথম সংখ্যাটি হইতে ইহার অন্তর ·0000025. সুতরাং 4·8019136 এমন একটি সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ যাহার মান 63374 এবং 63375-এর মধ্যে অবস্থিত।

মনে করি সংখ্যাটি $63374 + x$.

1-এর জন্য অন্তর 69 (অর্থাৎ ·0000069) এবং x-এর জন্য অন্তর 25 (অর্থাৎ ·0000025).

$\therefore \quad 69 : 25 :: 1 : x \qquad \therefore \quad x = \frac{25}{69} = {\cdot}36\cdots\cdots$

$\therefore \quad \log 63374{\cdot}36\cdots = 4{\cdot}8019136$

সুতরাং একই অংশক বিশিষ্ট যে সংখ্যার লগারিদ্‌মের মান $\bar{2}{\cdot}8019136$, তাহা একই অঙ্ক বিশিষ্ট হইবে এবং উহার পূর্ণক -2 হইবে।

সুতরাং সংখ্যাটি ·06337436······

Exercise—16(A)

[যখন প্রয়োজন হইবে নিম্নলিখিত মানগুলি ধরিয়া করিবে :
$\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $\log 7 = {\cdot}8450980$,
$\log 11 = 1{\cdot}0413927$]

1. নিম্নের সংখ্যাগুলির অঙ্ক সংখ্যা নির্ণয় কর :

(i) 2^{30} (ii) 3^{15} (iii) 5^{25} [C. U. '47]

(iv) 14^{20} (v) 165^{16} (vi) $2^{50} \times 3^{25}$.

2. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির দশমিক বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে কতগুলি 0 আছে নির্ণয় কর :

(i) $({\cdot}014)^{16}$ (ii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{100}$ (iii) $\left(\frac{1}{5{\cdot}5}\right)^{12}$ (iv) $(16{\cdot}2)^{-12}$

3. নিম্ন সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌ম্-এর মান নির্ণয় কর :

(i) ·045 (ii) $3\frac{1}{16}$ (iii) $({\cdot}405)^{\frac{1}{6}}$ [H. S. Comp. '64]

(iv) $\left(\frac{5}{42}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (v) 4500 [H. S. '63] (vi) ·1875 [H. S. '62]

4. দেখাও যে, $\left(\frac{21}{20}\right)^{100} > 100$ হইবে। [H. S. '70]

5. সাংখ্যমান নির্ণয় কর :

$$\log\left\{\frac{(7\cdot2)^3 \times (\cdot016)^4}{\left(\frac{6}{5}\right)^{15}}\right\}$$ [H. S. Comp. '65]

6. $\left\{\frac{(\cdot32)^8 \times (625)^4}{(\cdot00432)^2 \times (\cdot3125)^3 \times 25}\right\}^{\frac{1}{5}}$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 259569 = 5\cdot4142524$ [H. S. '67]

7. $\log\left[(2\cdot7)^3 \times (\cdot81)^{\frac{4}{5}} \div (90)^{\frac{5}{4}}\right]$-এর মান নির্ণয় কর।

[H. S. Comp. '67]

8. $\sqrt[7]{3\cdot528}$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত $\log 2 = \cdot3010300$, $\log 3 = \cdot4771213$, $\log 7 = \cdot8450980$.

এবং $\log 1197\cdot342 = 3\cdot0782184$.

9. আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত 7 নিধানযুক্ত 108-এর লগারিদম্-এর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log_{10} 2 = \cdot30103$, $\log_{10} 3 = \cdot47712$

এবং $\log_{10} 7 = \cdot84510$

10. মান নির্ণয় কর : $\sqrt[7]{\cdot0020736}$ দেওয়া আছে $\log 41369 = 4\cdot6166750$

11. $\log 37601 = 4\cdot5751994$, $\log 37602 = 4\cdot5752109$ হইলে যাহার লগারিদম্ $1\cdot5752086$, সেই সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

12. $\log 3 = \cdot4771213$, $\log 74008 = 4\cdot8692787$ এবং 1-এর জন্য অন্তর 59 হইলে $(\cdot09)^{\frac{1}{8}}$-এর মান নির্ণয় কর।

13. সমাধান কর (প্রয়োজনে log 2, log 3 এবং মান ব্যবহার করিবে)।

(a) $2^x.3^{2x} = 100$ [C. U.] (b) $3^{2-x}.4^{2x-3} = 20$

(c) $5^{5-3x} = 2^{x+2}$ (d) $6^{3-4x}.4^{x+5} = 8$ [C. U. '38]

(e) $7^{3x+2} + 4^{x+2} = 7^{3x+1} + 2^{2x+6}$ [C. U. '41]

(f) $2^x = 3^y$, $2^{y+1} = 3^{x-1}$ [C. U. '42]

(g) $5^{x+1} = 6^y$, $2^{x+y} = 3^{x-y}$ (h) $\log_{10}x - \log_{10}\sqrt{x} = \frac{2}{\log_{10}x}$

14. দেওয়া আছে, $\log 101 = 2{\cdot}0043214$ এবং $\log 111{\cdot}5675 = 2{\cdot}0475354$ হইলে $\frac{101}{100} + \left(\frac{101}{100}\right)^2 + \left(\frac{101}{100}\right)^3 + \cdots\cdots$10-তম পদ, এর মান নির্ণয় কর।

15. কোন একটি নিধানযুক্ত একটি সংখ্যার লগারিদম্ 6 এবং প্রথম নিধান ও 25-এর গুণফল নিধান হইলে ঐ সংখ্যাটির 8 গুণ সংখ্যার লগারিদম্ হয় 3 ; প্রথম নিধানটি নির্ণয় কর। **[H. S. Comp. '63]**

16. যদি যে কোন বৎসরের প্রারম্ভে যে লোক সংখ্যা থাকে সেই বৎসরে তাহার $\frac{1}{24}$ ভাগ জন্মায় এবং $\frac{1}{80}$ অংশ মারা যায়, তবে কত বৎসরে লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হইবে।

[দেওয়া আছে, $\log 241 = 2{\cdot}3820170$, $\log 240 = 2{\cdot}3802112$]

17. কোন সহরের লোকসংখ্যা 3000 ; যদি উহা প্রতি বৎসর 10% হারে বৃদ্ধি পায়, তবে 3 বৎসর অন্তে উহার লোকসংখ্যা কত হইবে ?

18. এক দোকানদারের 40 কিলোগ্রাম চাল আছে ; প্রতি 4 কিলোগ্রাম চাল বিক্রয় করিয়া সে অবশিষ্ট চালের সহিত নিকৃষ্ট স্তরের 4 কিলোগ্রাম চাল মিশাইয়া দেয়। কতবার এই প্রক্রিয়া চালাইলে মোট চালের অর্ধেক নিকৃষ্ট স্তরের হইবে।

19. $y = ke^{-0{\cdot}038t}$ সূত্র হইতে আসন্ন দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত t-এর মান নির্ণয় কর।

যখন $y = \frac{k}{2}$ প্রদত্ত $\log_{10} 2 = {\cdot}3010$, $\log_{10} e = {\cdot}4343$.

ত্রয়োদশ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী

(Exponential and Logarithmic Series)

অসীম শ্রেণী সম্বন্ধে তোমাদের কিছু ধারণা পূর্বেই হইয়াছে। সাধারণ লগারিদ্‌ম্ এর সংজ্ঞা প্রসঙ্গে Napierian পদ্ধতির ক্ষেত্রে অমেয় সংখ্যা e-কে নিধান ধরা হইয়াছে যেখানে $e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots\cdots$

e দ্বারা সূচিত এই অসীম শ্রেণীর গণিতের ক্ষেত্রে ভূমিকা অসীম। ইহা একটি অসীম শ্রেণী হইলেও ইহার মান নির্দিষ্ট এবং 2 এবং 3-এর মধ্যে অবস্থান করে। সুতরাং e একটি সংখ্যা মাত্র। গণিতে ইহাকে অমেয় সংখ্যা (incommensurable number) বলে। π (পাই) ও একটি অমেয় সংখ্যা।

উপপাদ্য : প্রমাণ করিতে হইবে e-এর মান নির্দিষ্ট এবং উহা 2 এবং 3-এর মধ্যে অবস্থান করে। (To prove e is finite and lies between 2 and 3)

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\ e>2$$

আবার, $\lfloor 3=3.2.1 \qquad \therefore\ \lfloor 3>2.2.1$

$$\therefore\ \lfloor 3>2^2 \qquad \therefore\ \frac{1}{\lfloor 3}<\frac{1}{2^2}$$

অনুরূপে, $\frac{1}{\lfloor 4}<\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{\lfloor 5}<\frac{1}{2^4}$ ইত্যাদি

$$\therefore\ e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$$

অর্থাৎ, $e<1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $\left[\because\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right.$একটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী]

$$\therefore\ e<1+2 \text{ বা, } e<3 \quad \therefore\ 2<e<3$$

যেহেতু e-এর মান 2 এবং 3 এর মধ্যে অবস্থান করে সুতরাং উহা নির্দিষ্ট মান বিশিষ্ট।

উপপাদ্য : প্রমাণ করিতে হইবে e একটি অমেয় সংখ্যা। (To prove that e is an incommensurable number).

যদি সম্ভব হয়, মনে করি e প্রমেয় (commensurable) এবং $e=\dfrac{m}{n}$, যখন m ও n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$\therefore\ \frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots$$

উভয়পক্ষকে $\underline{|n}$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$m\underline{|n-1}=\underline{|n}+\underline{|n}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|2}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|3}}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

$\underline{|n-1}$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং ডানপক্ষের $\dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdots\cdots\cdots$ ছাড়া অবশিষ্ট সকল পদই পূর্ণসংখ্যা বিশিষ্ট।

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots=\text{কোন পূর্ণসংখ্যা} \quad \ldots \quad (1)$$

(1)নং এর বামপক্ষের সকল পদই ধনাত্মক, সুতরাং তাহাদের সমষ্টি$>\dfrac{1}{n+1}$

এবং, $<\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+3)^3}+\cdots\cdots$

অর্থাৎ, $<\dfrac{1}{n+1}\Big/\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ অর্থাৎ, $<\dfrac{1}{n}$

সুতরাং (1)নং এর বামপক্ষ $\dfrac{1}{n+1}$ এবং $\dfrac{1}{n}$ এর মধ্যে অবস্থান করে। সুতরাং উহা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। কিন্তু পূর্বেই দেখান হইয়াছে বামপক্ষ একটি পূর্ণসংখ্যা। সুতরাং e প্রমেয় এই কল্পনা ভুল। অতএব e প্রমেয় সংখ্যা হইতে পারে না। সুতরাং e একটি অমেয় সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য ঃ অসীম শ্রেণীর পদসংখ্যা বৃদ্ধি করিয়া e এর মান আসন্ন যে কোন দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করা যায়। আসন্ন 6 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত e এর মান 2·718282

e^x-এর বিস্তৃতি (Expansion of e^x)

x এর সকল মানের জন্য

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots \infty \cdots \qquad (1)$$

যদি $n > 1$ হয় (অর্থাৎ $\frac{1}{n} < 1$), দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাই,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx.\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}.\frac{1}{n^2} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

সুতরাং যখন $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, সুতরাং n এর অসীমমানে

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

সুতরাং (2)নং এ $x = 1$ বসাইলে, যখন n এর মান অসীম

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots = e$$

এখন $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$

$\therefore$ n এর মান অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি করিলে, x এর সকল মানে,

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots \infty \cdots \qquad (1)$$

e^x এর এই বিস্তৃতিকেই সূচক শ্রেণী (Exponential Series) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেহেতু x এর সকল মানে (1)নং শ্রেণীটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং x এর পরিবর্তে $-x$ এবং -1 বসাইয়া পাই,

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + (-1)^r \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots\cdots$$

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + (-)^r \frac{1}{\lfloor r} + \cdots\cdots$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. n-এর মান অসীম পর্যন্ত বৃদ্ধি করিলে $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ইহাকে সাধারণতঃ এইরূপ লেখা হইয়া থাকে।

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{অনুরূপে} \quad \underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x$$

দ্রষ্টব্য ঃ সূচক শ্রেণীর উপরের প্রমাণটি সম্পূর্ণরূপে যুক্তি গ্রাহ্য না হইতে পারে। কারণ সেক্ষেত্রে $\dfrac{x\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}$ কে r এর সকল মানে $\dfrac{x^r}{\lfloor r}$ ধরা হইয়াছে। কিন্তু n এর খুব বড় হইলে (অসীম) $\frac{1}{n}=0,\ \frac{2}{n}=0\cdots\cdots,\ \frac{r}{n}=0$। কিন্তু ইহা সর্বদা বলা যায় না যে $\frac{r}{n}$ এর মান সব সময় 0 হইবে যখন r ও n অনেক বড় হইবে (অসীম)।

সূচক শ্রেণীর বিকল্প প্রমাণ (alternative proof of exponential series)

এই প্রমাণটি অধ্যাপক হিল (Prof. Hill) সর্বপ্রথম উদ্ভাবন করেন। এক্ষেত্রে কল্পনা করা হয় দ্বিপদ উপপাদ্যে ঘাতের সূচক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য সত্যি।

প্রমাণ ঃ মনে করি,

$$f(m)\equiv 1+\frac{m}{\lfloor 1}+\frac{m^2}{\lfloor 2}+\frac{m^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{m^r}{\lfloor r}+\ldots\ldots(1)$$

$$f(n)\equiv 1+\frac{n}{\lfloor 1}+\frac{n^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{n^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots(2)$$

এবং $f(m+n)\equiv 1+\dfrac{(m+n)}{\lfloor 1}+\dfrac{(m+n)^2}{\lfloor 2}+\dfrac{(m+n)^3}{\lfloor 3}+\cdots+\dfrac{(m+n)^r}{\lfloor r}+\cdots(3)$

$f(m)$, $f(n)$ এবং $f(m+n)$ শ্রেণী তিনটি m এবং n এর সকল মানের জন্য অভিসারী (convergent)

(1) এবং (2) কে গুণ করিয়া এবং m, n এর একই ঘাতের পদগুলিকে একত্র করিয়া পাই,

$$f(m)\times f(n)\equiv 1+\frac{(m+n)}{\lfloor 1}+\left(\frac{m^2}{\lfloor 2}+\frac{mn}{\lfloor 1}+\frac{n^2}{\lfloor 2}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{m^r}{\lfloor r}+\frac{m^{r-1}}{\lfloor r-1}\cdot\frac{n}{\lfloor 1}+\frac{m^{r-2}}{\lfloor r-2}\cdot\frac{n^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{n^r}{\lfloor r}\right)+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{(m+n)}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}(m+n)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\lfloor r}\{m^r+rm^{r-1}n+\frac{r(r-1)}{\lfloor 2}m^{r-2}n^2+\cdots\cdots+n^r\}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{(m+n)}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}(m+n)^2+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor r}(m+n)^r+\cdots\cdots$$

$$=f(m+n)$$

$\therefore\ f(m)\times f(n)=f(m+n)$, m, n এর সকল মানের জন্য

অনুরূপে, $f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p)=f(m+n+p)$

এবং এইভাবে অগ্রসর হইলে,

$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\ \ldots\ldots$ নির্দিষ্ট সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$=f(m+n+p+\cdots\cdots$ নির্দিষ্ট সংখ্যক পদ পর্যন্ত) ...(4)

$m, n, p, \ldots\ldots$ এর সকল মানের জন্য।

(i) মনে করি, x একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(4)নং এ, $m=n=p=\cdots\cdots=1$ বসাইয়া পাই,

$f(1)\times f(1)\times f(1)\times\cdots x$ সংখ্যক উৎপাদক

$=f(1+1+1+\ldots x$-তম পদ)

$\therefore\ \{f(1)\}^x=f(x)$

(ii) মনে করি, x একটি ধনাত্মক মূলদ ভগ্নাংশ $\frac{h}{k}$, যখন h, k ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

মনে করি, $m=n=p=\cdots=\frac{h}{k}$ (4) হইতে

$\therefore\ f\left(\frac{h}{k}\right)\times f\left(\frac{h}{k}\right)\times\ldots k$ উৎপাদক

$=f\left(\frac{h}{k}+\frac{h}{k}+\cdots k\text{-তম পদ}\right)$

$\therefore\ \left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^r=f\left(\frac{h}{k}\times k\right)=f(h)=\{f(1)\}^h$

যেহেতু h ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore\ f\left(\frac{h}{k}\right)=\{f(1)\}^{\frac{h}{r}}$ $\qquad\therefore\ f(x)=\{f(1)\}^x$

$\therefore$ x এর সকল ধনাত্মক মানে, $\{f(1)\}^x=f(x)$

(iii) মনে করি, x ঋণাত্মক এবং $=-y$, যখন y ধনাত্মক।

এখন, $f(-y)\times f(y)=f(-y+y)=f(0)=1$

$\therefore\ f(-y)=\frac{1}{f(y)}$

$\therefore \quad f(x)=f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}=\dfrac{1}{\{f(1)\}^{y}}$, যেহেতু y ধনাত্মক।

$$=\{f(1)\}^{-y}=\{f(1)\}^{x}$$

$\therefore$ x এর যে কোন মানই হউক না কেন, $\{f(1)\}^{x}=f(x)$

কিন্তু $f(1)=1+\dfrac{1}{\lfloor 1}+\dfrac{1}{\lfloor 2}+\dfrac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=e$

এবং $f(x)=1+\dfrac{x}{\lfloor 1}+\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$

$\therefore$ x এর সকল মানের জন্য

$$e^x=f(x)=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots$$

a^x এর বিস্তৃতি (Expansion of a^x)

যদি a যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তবে

$$a^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}(\log_e a)+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}(\log_e a)^r+\cdots\cdots\infty$$

x এর সকল মানের জন্য।

যদি a যে কোন ধনাত্মক সংখ্যা হয় এবং k-র মান এরূপ হয় যে, $a=e^k$

অর্থাৎ $k=\log_e a$। তবে

$$a^x=(e^k)^x=e^{kx}=1+\frac{kx}{\lfloor 1}+\frac{k^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{k^rx^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad a^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}(\log_e a)+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}(\log_e a)^r+\cdots\cdots$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি $a^x=e^y \quad \therefore \; y=\log_e a^x=x\log_e a$

$$\therefore \quad a^x=e^y=1+\frac{y}{\lfloor 1}+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad a^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}(\log_e a)+\frac{x^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{\lfloor 3}(\log_e a)^3+\cdots\cdots$$

দ্রষ্টব্য ঃ ইহাকে সূচকীয় উপপাদ্য (Exponential Theorem) বলা হয়।

উদা. 1. $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ এবং $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

এখন $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$

$x=1$ বসাইয়া,

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots \quad (1)$$

$x=-1$ বসাইয়া,

$$e^{-1}=\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots\cdots \quad (2)$$

(1) ও (2) যোগ করিয়া এবং উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$$

(1) হইতে 2 বিয়োগ করিয়া এবং উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করিয়া পাই,

$$\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots$$

উদা. 2. দেখাও যে,

$$1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\cdots\cdots=e^2-e$$

[C. U. '29]

শ্রেণীটির n-তম পদ $t_n=\frac{1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}}{\lfloor n}=\frac{2^n-1}{\lfloor n}$

$$\therefore \quad t_n=\frac{2^n}{\lfloor n}-\frac{1}{\lfloor n}$$

$n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ বসাইয়া পাই,

$$t_1=\frac{2}{\lfloor 1}-\frac{1}{1}$$

$$t_2=\frac{2^2}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 2}$$

$$t_3=\frac{2^3}{\lfloor 3}-\frac{1}{\lfloor 3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

(যোগ করিয়া) প্রদত্ত শ্রেণী $=\left(\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)$

এখন $e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$

$x=2$ বসাইলে,

$$e^2 - 1 = \frac{2}{\lfloor 1} + \frac{2^2}{\lfloor 2} + \frac{2^3}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী $= (e^2 - 1) - (e - 1) = e^2 - 1 - e + 1 = e^2 - e$

উদা. 3. $\frac{1+x+x^2}{e^x}$ এর বিস্তৃতির x^n এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\frac{1+x+x^2}{e^x} = (1+x+x^2)e^{-x}$$

$$= (1+x+x^2)\{1 - x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots\}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $(n>1)$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{n(-1)^n}{n!} + \frac{n(n-1)(-1)^n}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\{1 - n + n(n-1)\} = \frac{(-1)^n}{n!}(n^2 - 2n + 1) = (-1)^n\frac{(n-1)^2}{n!}$$

উদা. 4. x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর :

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots\right)^2$$

এখন $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots$$

(যোগ করিয়া) $e^x + e^{-x} = 2(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots)$

বা, $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$

$\therefore$ $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী $= \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x}+e^{-2x}+2)$

$$= \frac{1}{4}\Big(1+\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}+\cdots$$

$$\cdots+1-\frac{2x}{1!}+\frac{4x^2}{2!}-\frac{8x^3}{3!}+\frac{16x^4}{4!}-\cdots+2\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(4+\frac{8x^2}{2!}+\frac{32x^4}{4!}+\cdots\Big) = 1+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^4}{4!}+\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}+\cdots\Big)$$

উদা. 5. $1+\frac{(a+bx)}{1!}+\frac{(a+bx)^2}{2!}+\frac{(a+bx)^3}{3!}+\cdots\cdots$ এই অসীম শ্রেণীর x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots$$

x-এর পরিবর্তে $a+bx$ বসাইয়া পাই,

$$e^{a+bx} = 1+\frac{a+bx}{1!}+\frac{(a+bx)^2}{2!}+\frac{(a+bx)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর x^r-এর সহগ $= e^{a+bx}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ $= e^a.e^{bx}$

$$= e^a\Big(1+\frac{bx}{1!}+\frac{b^2x^2}{2!}+\cdots+\frac{b^rx^r}{r!}+\cdots\Big)$$

$\therefore$ নির্ণেয় x^r-এর সহগ $= \frac{e^ab^r}{r!}$.

উদা. 6. যদি $\frac{e^x}{1-x}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ a_n হয়, তবে দেখাও যে

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!}$$

$$\frac{e^x}{1-x} = (1-x)^{-1}e^x$$

$$= (1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n+\cdots)$$

$$\Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}+\cdots\Big)$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \cdots\cdots + 1$$

$$a_{n-1} = \qquad \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \cdots\cdots + 1$$

(বিয়োগ করিয়া) $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n!}$

Exercise—17

নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

1. $\left\{1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\ldots\right\}\left\{1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\ldots\right\}=1$

2. $\left\{1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\right\}^2-\left\{1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\right\}^2=1$ [B. U. '64]

3. $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\cdots\cdots=e$ [C. U. '36]

4. $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\ldots\ldots=\frac{1}{e}$ [C. U. '37]

5. $z=1+\log_e z+\frac{(\log_e z)^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e z)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$

6. $1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+3}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor 4}+\cdots=\frac{3}{2}e$ [C. U. '35]

7. $\left\{1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\right\}^2-\left\{y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\cdots\right\}^2=1$

8. $\dfrac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}$

9. $\dfrac{\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots}{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots}=\dfrac{e-1}{e+1}$ [C. U. '34]

10. $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\quad\right)\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)=\frac{e^4-1}{4e^2}$

11. $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$-এর মান আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। [C. U. '36]

12. $\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots\right)=e+\frac{1}{e}-2$ [C. U. '38]

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির অসীম পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর :

13. $1+\frac{3}{1!}+\frac{5}{2!}+\frac{7}{3!}+\ldots\ldots$

14. $(1+2)\log_e 2+\frac{1+2^2}{2!}(\log_e 2)^2+\frac{1+2^3}{3!}(\log_e 2)^3+\cdots$

15. $1+\frac{1+x}{2!}+\frac{1+x+x^2}{3!}+\frac{1+x+x^2+x^3}{4!}+\cdots$

16. যে শ্রেণীর n-তম পদ $\frac{n^3}{n!}$ তাহার অসীম পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয়। [C. U. '39]

17. $\frac{1-3x+x^2}{e^x}$-এর x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

18. $1+\frac{2+3x}{1!}+\frac{(2+3x)^2}{2!}+\frac{(2+3x)^3}{3!}+\cdots$এর x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

19. x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে e^{e^x} কে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। [C. U. '38]

20. প্রমাণ কর e^{e^x} এর বিস্তৃতির x^r এর সহগ $\frac{1}{r!}\left\{\frac{1^r}{1!}+\frac{2^r}{2!}+\frac{3^r}{3!}+\cdots\right\}$; ইহা হইতে প্রমাণ কর $\frac{1^4}{1!}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots=15e$

21. যদি $y=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$ হয়, দেখাও যে $x=1-e^{-y}$ [C. U. '51]

22. প্রমাণ কর $\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{6}{\lfloor 2}+\frac{12}{\lfloor 3}+\frac{20}{\lfloor 4}+\ldots=3e$ [G. U. '48]

23. প্রমাণ কর $\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1+2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3}{\lfloor 4}+\ldots=\frac{e}{2}$ [G. U. '49]

24. $\frac{e^{4x}+e^x}{e^{2x}}$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর।

25. $\frac{x}{e^x-1}$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

26. $\left(2+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর।

27. x কাল্পনিক হইলে যদি $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots$ হয়, তবে $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর ($i = \sqrt{-1}$)। [C. U. '36]

লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী (Logarithmic Series)

$\log_e (1+x)$-এর বিস্তৃতিকে লগারিদ্‌ম্ শ্রেণী বলে। নিম্নে ইহার বিস্তৃতি নির্ণয় করা হইল।

সূচকীয় উপপাদ্য হইতে পাই,

$$a^y = 1 + y(\log_e a) + \frac{y^2}{\lfloor 2}(\log_e a)^2 + \cdots$$

a-র পরিবর্তে $1+x$ বসাইয়া পাই,

$$(1+x)^y = 1 + y \log_e(1+x) + \frac{y^2}{2}\{\log_e(1+x)\}^2 + \cdots \qquad (1)$$

যদি $|x| < 1$ হয়, তবে দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে পাই,

$$(1+x)^y = 1 + yx + \frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots \qquad (2)$$

সুতরাং $|x| < 1$ হইলে (1) ও (2) হইতে পাই,

$$1 + y \log_e(1+x) + \frac{y^2}{\lfloor 2}\{\log_e(1+x)\}^2 + \cdots$$

$$= 1 + yx + \frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$$

যেহেতু ইহা একটি অভেদ, উভয় পক্ষে y এর সহগ সমান হইবে।

বামপক্ষে y এর সহগ $= \log_e(1+x)$

ডানপক্ষে y এর সহগ

$$= x + \frac{-1}{\lfloor 2}x^2 + \frac{(-1).(-2)}{\lfloor 3}x^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{\lfloor 4}x^4 + \ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots$$

$$\therefore \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots \infty \qquad (3)$$

যখন $|x| < 1$

দ্রষ্টব্য ঃ $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতি সিদ্ধ হইবে যদি $-1 < x < 1$ হয়। কিন্তু $x = 1$ হইলেও বিস্তৃতি সিদ্ধ হয়। তবে বর্তমানে প্রমাণ দেওয়া সম্ভব নয়, পরে তোমরা

ঐ প্রমাণ পাইবে। সুতরাং $\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতি সিদ্ধ হইবে যদি $-1<x\leqslant 1$ হয়।

(3) নং এ $x=1$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e 2 = 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\ldots$$

অনুসিদ্ধান্ত : যেহেতু x এর সংখ্যা মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে লগারিদম্ শ্রেণী সিদ্ধ হয়, তবে (3) নং এ x এর পরিবর্তে $-x$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^r}{r}-\ldots \quad (4)$$

যখন $-1\leqslant x<1$

লগারিদম্ শ্রেণীর প্রয়োগ (Application of logarithmic series)

$$\log_e(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\log_e(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots$$

বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\log_e(1+x)-\log_e(1-x) = 2\left\{x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right\}$$

বা, $\log_e\dfrac{1+x}{1-x} = 2\left\{x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots\right\}$ ... (5)

বা, $\frac{1}{2}\log_e\dfrac{1+x}{1-x} = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots(-1<x<1)$

$x=\dfrac{m-n}{m+n}$ $(m>n)$ বসাই। $\therefore$ $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore$ (5) হইতে,

$$\log_e\frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\} \quad \cdots (6)$$

এখন $n=1$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e m = 2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\} \quad \cdots (7)$$

আবার (6) নং এ $m=n+1$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e\frac{n+1}{n} = \log_e(n+1)-\log_e n$$

$$= 2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^5}+\cdots\right\} \cdots (8)$$

এখন $\log_e(1+x)$ এ x এর পরিবর্তে যথাক্রমে $\frac{1}{n}$ এবং $-\frac{1}{n}$ বসাইয়া পাই

$$\log_e\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots \quad (9)$$

$$\log_e\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}-\cdots \quad (10) \qquad \text{যখন } n>1$$

(9) হইতে (10) বিয়োগ করিয়া পাই,

$$\log_e(n+1)-\log_e n-\log_e(n-1)+\log_e n$$

$$=2\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right\} \qquad \text{বা,}\quad \log_e(n+1)-\log_e(n-1)$$

$$=2\left\{1+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\quad\right\} \quad \cdots \quad (11)$$

লগারিদম্ শ্রেণী প্রয়োগ করিয়া বিভিন্ন সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয়
(Calculation of logarithms of different numbers applying logarithmic series)

(7) নং হইতে পাই,

$$\log_e m=2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\}$$

এই শ্রেণীটি ব্যবহার করিয়া আমরা 1 অপেক্ষা বড় ছোট ছোট সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয় করিতে পারি। তবে এক্ষেত্রে নিধান সর্বদাই e হইবে।

$m=2$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e 2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\ldots\right\}$$

$$=2\{\cdot 33333+\tfrac{1}{3}\times\cdot 03704+\tfrac{1}{5}\times\cdot 00432+\tfrac{1}{7}\times\cdot 00046+\cdots\}$$

$$=\cdot 69315 \text{ (আসন্ন 5 দশমিক পর্যন্ত)}$$

পর পর দুইটি সংখ্যার মধ্যে যদি একটি সংখ্যার লগারিদম্ জানা থাকে তবে (8) নং শ্রেণী প্রয়োগ করিয়া অপর সংখ্যার লগারিদম্ সহজেই নির্ণয় করা যায়।

8 নং এ $n=2$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e 3-\log_e 2=2.\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\right\}$$

$$=\cdot 40547 \text{ (আসন্ন 5 দশমিক পর্যন্ত)}$$

$$\therefore\quad \log_e 3=\cdot 40547+\log_e 2=\cdot 40547+\cdot 69315=1\cdot 09862$$

আবার $\log_e 4 = 2\log_e 2 = 2 \times \cdot 69315 = 1\cdot 38630$

আবার 8 নং সূত্র প্রয়োগ করিয়া $\log_e 4$ এর মান ব্যবহার করিয়া $\log_e 5$ এর মান নির্ণয় করা যায়। এইভাবে অন্যান্য সংখ্যার লগারিদম্ ও নির্ণয় করা যাইবে। এইভাবে পাওয়া যায়।

$$\log_e 10 = 2\cdot 30258509 \text{ (আসন্ন)}$$

(9), (10) বা (11) নং শ্রেণী ব্যবহার করিয়াও লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।
লগারিদম্ এর সূত্র হইতে আমরা পাই,

$$\log_e M = \log_{10} M \times \log_e 10 \quad \text{বা,} \quad \log_{10} M = \log_e M \times \frac{1}{\log_e 10}$$

এই সূত্র ব্যবহার করিয়া কোন সংখ্যার Napicrian পদ্ধতির (নিধান e) লগারিদম্ হইতে সাধারণ লগারিদম্ (নিধান 10) এ পরিবর্তন করা যায়।

সাধারণ লগারিদম্ এর মডিউলাস (modulus)

$$= \frac{1}{\log_e 10} = \frac{1}{2\cdot 30258509} = \cdot 43429448$$

সংক্ষেপে মডিউলাসকে μ(mu) চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore \quad \mu = \cdot 43429448$$

(8), (9), (10) ও (11) নং সূত্রে μ দ্বারা গুণ করিলেই উহা সাধারণ লগারিদম্ এ পরিবর্তিত হইবে।

$\therefore$ 8 নং হইতে,

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = \mu \log_e(n+1) - \mu \log_e n$$

$$= 2\mu\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\}$$

যখন $\mu = \cdot 43429448$

অনুরূপে (9), (10) এবং (11) নং এর সূত্র পাওয়া যাইবে। লগারিদম্ তালিকা ও এই সূত্র প্রয়োগ করিয়া নির্ণয় করা হইয়া থাকে।

উদা. 1. প্রমাণ কর $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \cdots = \log_e 2$

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$x = -\frac{1}{2}$ বসাইয়া পাই,

$$\log_e \tfrac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2.2^2} - \frac{1}{3.2^3} + \cdots$$

বা, $\log_e 1 - \log_e 2 = -\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots\right)$

বা, $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots=\log_e 2$ $\qquad [\because \log_e 1=0]$

উদা. 2. প্রমাণ কর $\log_e x=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots \quad x>0$

ডানপক্ষ $=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\ldots$

$$=\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(x+1)^3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots$$

$$=\left(-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x+1)^3}-\ldots\right)-\left\{-\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{(x+1)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{(x+1)^3}-\ldots\right\}$$

$$=\log_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\log_e\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\log_e\frac{x}{x+1}-\log_e\frac{1}{x+1}=\log_e\left\{\frac{x}{x+1}\times(x+1)\right\}=\log_e x$$

উদা. 3. যদি α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে দেখাও যে,
$\log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots$

যেহেতু $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α, β

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ a-bx+cx^2=a\left(1-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}$$

$$=a\{1+\alpha x+\beta x+\alpha\beta x^2\}=a\{1(1+\alpha x)+\beta x(1+\alpha x)\}$$

$$=a(1+\alpha x)(1+\beta x)$$

$$\therefore\ \log_e(a-bx+cx^2)$$

$$=\log_e a+\log_e(1+\alpha x)+\log_e(1+\beta x)$$

$$=\log_e a+(\alpha x-\tfrac{1}{2}\alpha^2x^2+\tfrac{1}{3}\alpha^3x^3-\ldots)+(\beta x-\tfrac{1}{2}\beta^2x^2+\tfrac{1}{3}\beta^3x^3-\ldots)$$

$$=\log a_e+(\alpha+\beta)x-\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\cdots$$

উদা. 4. যদি $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots$ হয় দেখাও যে,

$$x=y-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{3!}y^3-\frac{1}{4!}y^4+\dots$$

$y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots$

বা, $-y=(-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\cdots)=\log_e(1-x)$

বা, $1-x=e^{-y}$ বা, $x=1-e^{-y}$

বা, $x=1-\left(1-y+\frac{1}{2!}y^2-\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4-\dots\right)$

$=y-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{3!}y^3-\frac{1}{4!}y^4+\cdots$

উদা. 5. $\log_e(1+x+x^2)$ এর বিস্তৃতির x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

$\log_e(1+x+x^2)=\log_e\frac{1-x^3}{1-x}=\log_e(1-x^3)-\log_e(1-x)$

$\log_e(1-x^3)=-x^3-\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{3}x^9-\dots$

$\log_e(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\dots$

$\therefore\ \log_e(1+x+x^2)=(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)-(x^3+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{3}x^9+\cdots)$

$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots$ এর x^r এর সহগ $=\frac{1}{r}$ [যখন r, 3-এর গুণিতক নয়]

$x^3+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{3}x^9+\cdots$ এর x^r এর সহগ $=\frac{\frac{1}{r}}{3}$ [যখন r, 3-এর গুণিতক]

$=\frac{3}{r}$

$\therefore$ প্রদত্ত বিস্তৃতির x^r এর সহগ $=\frac{1}{r}-\frac{3}{r}=-\frac{2}{r}$

Exercise—17

নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ কর :

1. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$

[C. U. '45]

2. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots=\log_e 2$

3. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots=1-\log 2$ [C. U. '40]

4. $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}\right)+\cdots=\log_e\sqrt{2}$

5. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3x^6}+\cdots=2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)$

[C. U. '54]

6. $\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\ldots=\log_e 2$ [C. U. '57]

7. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots=3\log_e 2-1$ [C. U. '58]

8. $\log_e(a+b)=\log_e a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{b^3}{3a^3}-\frac{b^4}{4a^4}+\cdots(-a<b<a)$

9. $\log_e(1-x+x^2)$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর এবং x^r এর সহগ নির্ণয় কর।

10. $\log_e(1+x+x^2+x^3+\ldots\infty)$ কে x এর উর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত কর এবং x^n এর সহগ নির্ণয় কর। যখন $x^2<1$

নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর :

11. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}+\cdots$ [C. U. '53]

12. $1+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{5.2^4}+\frac{1}{7.2^6}+\ldots$ [C. U. '43]

13. $\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$

14. $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{9}x^6+\cdots$

15. $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^3}-\frac{1}{2^3}\right)+\cdots$

16. যদি $P=\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\cdots$

এবং $Q=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7-\frac{2}{9}x^9+\cdots$ হয়, তবে P ও Q এর মধ্যে একটি সম্পর্ক বাহির কর।

17. যদি $\log_e(1-x-x^2+x^3)^{-1}$ কে x-এর ঊর্ধ্বক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত করা হয়, তবে দেখাও যে x^n-এর সহগ $\frac{1}{n}$ অথবা $\frac{3}{n}$ হইবে, যখন n যথাক্রমে অযুগ্ম বা যুগ্ম হইবে।

18. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α, β হয়, তবে দেখাও যে
$\log_e(1+px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2+\frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3-\dots$

19. যদি $y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\dots$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\dots$$ [C. U. '13]

20. প্রমাণ কর :

$$\log_e(1+m)^{1+m}(1-m)^{1-m}=2\left(\frac{m^2}{1.2}+\frac{m^4}{3.4}+\frac{m^6}{5.6}+\dots\right)$$

21. যদি $ab+bc=2ac$ এবং $a>b>c$, হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{c^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)+\dots=\log_e\frac{b}{c}$$

22. যদি $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\dots$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$x=y-\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{3!}y^3-\frac{1}{4!}y^4+\dots$$

চতুর্দশ অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি সুদ ও বার্ষিকী

(Compound Interest and Annuities)

তোমরা মাধ্যমিক স্তরে আসল এবং তাহার সরল সুদ সম্বন্ধে বিভিন্ন প্রশ্নাবলীর সমাধান দেখিয়াছ। চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সুদও আসলে রূপান্তরিত হইয়া থাকে। যখন কোন আসলের নির্দিষ্ট সময় অন্তর সুদ হয়, তখন সেই সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া পরবর্তী সময়ে এই সুদাসল আসল রূপে কাজ করে। ফলে সুদের উপরও সুদ হইয়া থাকে। এই ভাবেই প্রক্রিয়া চলিতে থাকে। এই সুদকে **চক্রবৃদ্ধি সুদ** (Compound interest) বলে।

চক্রবৃদ্ধি সুদ সূত্র (প্রতি বৎসর সুদ আসলে রূপান্তরিত হইলে)
(Compound Interest Formula—Conversion per year).

প্রমাণ করিতে হইবে, $A=P(1+r)^n$

যখন P=আসল (Principal) $A=n$ বৎসর পরে মোট টাকার পরিমাণ

n=বৎসরের সংখ্যা (বা সুদের কাল)

r=বৎসরে 1 টাকার উপর যে সুদ দেয়।

মনে করি সুদ প্রতি বৎসরের শেষে আসলে পরিণত হয়।

$\therefore$ 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=r$ টাকা

P " 1 " " $=Pr$ "

$\therefore$ 1 বৎসর অন্তর মোট আসল $=P+Pr$ বা, $P(1+r)$ টাকা।

$\therefore$ P টাকার 2 বৎসর অন্তর মোট আসল হইবে $=P(1+r)$ টাকার 1 বৎসর পরে মোট আসল।

$$=P(1+r).(1+r)=P(1+r)^2$$

P টাকার 3 বৎসর অন্তর মোট আসল হইবে $=P(1+r)^2$ টাকার 1 বৎসর পরে মোট আসল $=P(1+r)^2.(1+r)=P(1+r)^3$

$\therefore$ P টাকার n বৎসর অন্তর মোট আসল হইবে $=P(1+r)^n$

$\therefore$ $A=P(1+r)^n$ ..... (1)

যদি n বৎসরে P টাকার উপর মোট I টাকা সুদ হয়, তবে,

$$I=A-P=P\{(1+r)^n-1\}\cdots\cdots(2)$$

$1+r$-এর পরিবর্তে R বসাইলে, R হইবে 1 টাকার 1 বৎসর পর মোট আসল। সেক্ষেত্রে উপরের সূত্রদ্বয় নিম্নরূপেও লেখা হইয়া থাকে।

$$A = PR^n \ldots (1') \text{ এবং } I = P(R^n - 1) \ldots (2')$$

সুতরাং চক্রবৃদ্ধি সুদের ক্ষেত্রে আসল গুণোত্তর প্রগতিতে বৃদ্ধি পায়।

অনুসিদ্ধান্ত : শতকরা বার্ষিক সুদের হার c হইলে $r = \frac{c}{100}$। সেক্ষেত্রে (1) ও (2) নং সূত্রদ্বয় নিম্নরূপ হইবে,

$$A = P\left(1+\frac{c}{100}\right)^n ; \qquad I = P\left\{\left(1+\frac{c}{100}\right)^n - 1\right\}$$

দ্রষ্টব্য : চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয়ে লগারিদম্ প্রয়োগ করাই বিধেয়। (1) নং-এর উভয় পক্ষে লগ্ লইলে,

$$\log A = \log P + n \log(1+r)$$

এই সূত্র হইতে A, P, n, r-এর যে কোন তিনটি জানা থাকিলে অবশিষ্টটি জানা যায়।

চক্রবৃদ্ধি সুদ সূত্র (বৎসরের আংশিক সময়ে সুদ আসলে রূপান্তরিত হইলে)।

উপরের যে সূত্র প্রতিষ্ঠিত হইয়াছে, সেক্ষেত্রে কল্পনা করা হইয়াছে যে, আসলের উপর যে সুদ হয় তাহা প্রতি বৎসর অন্তর আসলের সহিত যুক্ত হইয়া নতুন আসল তৈরী করে। কিন্তু যদি প্রতি বৎসরের q-তম অংশ পরে যে সুদ হইবে তাহা আসলের সহিত যুক্ত হইয়া নতুন আসল গঠন করে, অর্থাৎ বৎসরে q বার সুদ দেওয়া হয়, তবে পূর্বের ন্যায় একই প্রকার প্রতীক লইলে,

$1+\frac{r}{q}$ = বৎসরের q-তম অংশ পরে 1 টাকার উপর মোট আসল।

$\therefore\ P\left(1+\frac{r}{q}\right) =$ " " " " P " " " "

$\therefore\ P\left(1+\frac{r}{q}\right)^q = 1$ বৎসর " P " " " "

$\therefore\ P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn} = n$ " " " P " " " "

$\therefore$ n বৎসর পরে মোট আসল $= P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}$

$$\therefore\ A = P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}, \quad \therefore\ I = A - P = P\left\{\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn} - 1\right\}$$

দ্রষ্টব্য 1 : যদি সুদ অর্ধবৎসর অন্তর, একচতুর্থাংশ বৎসর অন্তর বা মাসে মাসে দেয় হয়, তবে সূত্রটি যথাক্রমে $A=P(1+\frac{1}{2}r)^{2n}$, $A=P(1+\frac{1}{4}r)^{4n}$ এবং $A=P(1+\frac{1}{12}r)^{12n}$ হইবে।

দ্রষ্টব্য 2 : যদি q-এর মান অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হয় তবে,

$$\underset{q\to\infty}{\text{Lt}}\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}=e^{nr} \quad [\text{ সূচক শ্রেণী দ্রষ্টব্য }]$$

$$\therefore \quad A=Pe^{nr}$$

বর্তমান মূল্য এবং বাটা (Present value and Discount)

উপপাদ্য : নির্দিষ্ট সময় অন্তর দেয় কোন টাকার বর্তমান মূল্য ও বাটা নির্ণয়।

[To find the present value and discount of a given sum due in a given time.]

মনে করি n বৎসর পরে দেয় P টাকার বর্তমান মূল্য V এবং 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা।

(i) যখন সরল সুদ হইবে।

1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r টাকা

V " 1 " " Vr "

V " n " " Vnr "

$\therefore$ দেয় টাকা $P=V+Vnr=V(1+nr)$

$$\therefore \text{ বর্তমান মূল্য}=V=\frac{P}{1+nr}$$

$$\therefore \text{ বাটা } D=P-V=P-\frac{P}{1+nr}=\frac{Pnr}{1+nr}.$$

(ii) যখন চক্রবৃদ্ধি সুদ হইবে।

পূর্ব নিয়মে পাওয়া যাইবে $P=V(1+r)^n=VR^n$

$$\therefore \quad V=\frac{P}{(1+r)^n}=\frac{P}{R^n}$$

$$\text{যেহেতু } D=P-V=P-\frac{P}{(1+r)^n}=P\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

$$\therefore \quad D=\frac{P\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)^n}=\frac{P(R^n-1)}{R^n}.$$

উদা. 1. কত সময়ে কোন টাকা 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদে দ্বিগুণ হইবে? [C. U. '49]

[দেওয়া আছে $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$,

$\log 7 = \cdot 8450980$]

মনে করি P টাকা n বৎসরে 5% চক্রবৃদ্ধি হারে দ্বিগুণ হয়।

$\therefore \quad P(1+\frac{5}{100})^n = 2P \qquad \therefore \quad (\frac{21}{20})^n = 2$

উভয় পক্ষে লগ্ লইলে, $n(\log 21 - \log 20) = \log 2$

বা, $n(\log 3 + \log 7 - \log 2 - \log 10) = \log 2$

বা, এখন log 2, log 3, log 7-এর মান এবং $\log 10 = 1$ বসাইয়া পাই,

$$n = \frac{\cdot 3010300}{\cdot 0211893} = 14 \cdot 2 \quad (\text{প্রায়})$$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় 14·2 বৎসর প্রায়।

উদা. 2. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 5 বৎসরে 1800 টাকার বর্তমান মূল্য ও বাটা নির্ণয় কর।

(দেওয়া আছে, $\log 18 = 1 \cdot 2552$, $\log 1479 \cdot 47 = 3 \cdot 1701$)

$$\text{বর্তমান মূল্য } V = \frac{P}{(1+r)^n}$$

এখানে $P = 1800,\ r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25},\ n = 5$

$$\therefore \quad V = \frac{1800}{(1+\frac{1}{25})^5} = \frac{1800 \times (25)^5}{(26)^5}$$

উভয় পক্ষে লগ লইয়া পাই, $\log V = \log 1800 + \log \left(\frac{25}{26}\right)^5$

বা, $\log V = 3 \cdot 2552 + 5(\log 25 - \log 26)$

$= 3 \cdot 2552 - \cdot 0851 = 3 \cdot 1701 = \log 1479 \cdot 47$ (প্রদত্ত)

$\therefore \quad V = 1479 \cdot 47 \qquad \therefore$ বর্তমান মূল্য $= 1479 \cdot 47$ টাকা

বাটা $= P - V = 1800 - 1479 \cdot 47 = 320 \cdot 53$ টাকা।

উদা. 3. যদি কোন টাকা নির্দিষ্ট চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে a, b, c বৎসরে যথাক্রমে A, B, C টাকা হয়, তবে প্রমাণ কর।

$$(b-c)\log A + (c-a)\log B + (a-b)\log C = 0$$

মনে করি আসল $= P$, 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= r$.

$\therefore \quad A = P(1+r)^a,\ B = P(1+r)^b,\ C = P(1+r)^c$

প্রত্যেকটির লগ লইয়া পাই,

$$\log A=\log P+a\log(1+r),\ \log B=\log P+b\log(1+r),$$
$$\log C=\log P+c\log(1+r)$$

$\therefore\quad \log A-\log B=(a-b)\log(1+r)$

বা, $a-b=\dfrac{\log A-\log B}{\log(1+r)}$

অনুরূপে, $b-c=\dfrac{\log B-\log C}{\log(1+r)},\quad c-a=\dfrac{\log C-\log A}{\log(1+r)}$.

$$\therefore\quad (b-c)\log A+(c-a)\log B+(a-b)\log C$$
$$=\frac{\log A(\log B-\log C)}{\log(1+r)}+\frac{\log B(\log C-\log A)}{\log(1+r)}+\frac{\log C(\log A-\log B)}{\log(1+r)}=0$$

Exercise—18

[প্রয়োজনে লগ্ তালিকা ব্যবহার করিবে]

1. কত সময়ে কোন টাকা শতকরা বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদে দ্বিগুণ হইবে ?
[$\log 11=1\cdot04139$, $\log 2=\cdot30103$]

2. কত বৎসরে 100 টাকা শতকরা বার্ষিক 4 টাকা চক্রবৃদ্ধি হারে 1000 টাকা হইবে। আসন্ন দুই দশমিক পর্যন্ত মান নির্ণয় কর। [C. U. '50]
[$\log 26=1\cdot41497$]

3. শতকরা কত চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কোন টাকা 17 বৎসরে দ্বিগুণ হইবে ? [C. U. '47]

4. কত টাকা বার্ষিক 4% চক্রবৃদ্ধি সুদে 18 বৎসরে 10000 টাকা হইবে ? [G. U. '52]

5. 100 টাকা 2 বৎসরের জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদে রাখা হইল। মোট টাকার পরিমাণের কি পার্থক্য ঘটিবে যদি সুদ বাৎসরিক বা অর্ধ-বাৎসরিক হারে দেয় হয়। সুদের হার 4%। [$\log 1\cdot0816=\cdot03407$, $\log 1\cdot08243=\cdot03440$]

6. সুদের হার কত হইলে 800 টাকা 20 বৎসরে 10000 টাকা হইবে যদি সুদ বৎসরের $\frac{1}{4}$ অংশ পর পর দেওয়া হয়।

7. 10000 টাকা 10 বৎসরে 10% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে কত টাকায় পরিণত হইবে যদি সুদ অর্ধবৎসর অন্তর দেয় হয়। [log 26532975 = 7·42379]

8. যদি কোন টাকা নির্দিষ্ট চক্রবৃদ্ধি সুদে x বৎসরে মূল টাকার m গুণ এবং y বৎসরে n গুণ হয়, তবে প্রমাণ কর $y = x \log_m n$.

9. যদি কোন টাকা নির্দিষ্ট চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে p, q, r বৎসরে যথাক্রমে P, Q, R হয়, তবে প্রমাণ কর,

$$p \log \frac{Q}{R} + q \log \frac{R}{P} + r \log \frac{P}{Q} = 0$$

10. 4630·50 টাকার 3 বৎসরে 5% চক্রবৃদ্ধি হারে বাটা কত হইবে? বর্তমান মূল্যই বা কত হইবে?

11. কত টাকা 20 বৎসরে 500 টাকায় পরিণত হইবে, যদি সুদের হার 5% হয়, এবং প্রতি মুহূর্তে দেয় হয়। [প্রদত্ত $e^{-1} = {\cdot}3678$]

12. যদি কোন সহরের লোকসংখ্যা, বৎসরের প্রারম্ভে ঐ সহরে যত লোক আছে তাহার 1·8% প্রতি বৎসর বৃদ্ধি পায়, তবে কত বৎসরে মোট বৃদ্ধি 30% হইবে? [C. U. '35]

বার্ষিকী (Annuities)

একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা যদি নির্দিষ্ট উল্লিখিত শর্তে সাধারণতঃ এক বৎসর অন্তর দেয় হয়, তবে ঐ নির্দিষ্ট টাকাকে **বার্ষিকী** বলে। কোন কোন ক্ষেত্রে ইহা অর্ধবৎসর, এক চতুর্থাংশ বৎসর অন্তর বা অন্যান্য সময় পরেও দেয় হইয়া থাকে।

যদি কোন বার্ষিকী কয়েক বৎসর ধরিয়া জমা না দেওয়া হয়, তবে উহাকে ঐ কয় বৎসরের জন্য অদেয় (unpaid) বলা হইয়া থাকে এবং বাৎসরিক টাকার পরিমাণ এবং তাহার সুদ সহ বার্ষিকীর পরিমাণ হইয়া থাকে।

যদি কোন বার্ষিকী নির্দিষ্ট বৎসরের জন্য দেয় হয়, তবে উহাকে **নির্দিষ্ট বার্ষিকী** (Annuity certain) বলা হয়। অপর পক্ষে যদি কোন বার্ষিকী চিরদিন দেয় হয়, তবে উহাকে **চিরস্থায়ী বার্ষিকী** (perpetual annuity) বলা হয়।

যদি কোন বার্ষিকী একটি নির্দিষ্ট সময় অতিবাহিত না হওয়া পর্যন্ত সুরু না হয়, তবে তাহাকে **বিলম্বিত বার্ষিকী** (deffered annuity) বলে। যদি কোন বার্ষিকী n বৎসরের জন্য বিলম্বিত (deffered) হয় তবে $(n+1)$ বৎসর পরে প্রথম টাকা দেয় হইবে।

বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলিতে বুঝায়, বিভিন্ন প্রকার দেয় টাকার বর্তমান মূল্যের সমষ্টি।

অনাদেয় বার্ষিকীর পরিমাণ (Amount of annuity left unpaid).

কয়েক বৎসরের অনাদেয় বার্ষিকীর পরিমাণ :

(i) যখন সুদ সরল হইবে।

মনে করি A-বার্ষিকী, n বৎসরের সংখ্যা এবং 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ r এবং M মোট টাকার পরিমাণ।

প্রথম কিস্তিতে যে টাকা দেওয়া হইবে তাহার পরিমাণ A; এবং যেহেতু ইহা $(n-1)$ বৎসর অদেয় থাকে, সুতরাং $(n-1)$ বৎসরে সরল সুদে ইহার পরিমাণ হইবে $A\{1+(n-1)r\}$.

দ্বিতীয় কিস্তিতে টাকার পরিমাণ A এবং যেহেতু ইহা $(n-2)$ বৎসর অদেয় থাকে, সুতরাং $(n-2)$ বৎসরে সরল সুদে ইহার পরিমাণ হইবে $A\{1+(n-2)r\}$.

অনুরূপে তৃতীয় কিস্তির টাকার পরিমাণ $=A\{1+(n-3)r\}$ ইত্যাদি।

n বৎসর পরে মোট টাকার পরিমাণ,

$$M=A\{1+(n-1)r\}+A\{1+(n-2)r\}+\cdots n\text{-তম পদ}$$

$$=nA+Ar\{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\}$$

$$=nA+Ar\times\frac{n(n-1)}{2}=nA+\tfrac{1}{2}n(n-1)rA$$

(ii) যখন সুদ চক্রবৃদ্ধি, পূর্বের ন্যায় একই প্রতীক চিহ্ন ব্যবহার করিলে,

প্রথম কিস্তির পরিমাণ $=A(1+r)^{n-1}$

দ্বিতীয় „ „ $=A(1+r)^{n-2}$

তৃতীয় „ „ $=A(1+r)^{n-3}$

... ...

$$\therefore\quad M=A\{(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1\}$$

$$=A.\frac{(1+r)^n-1}{r}=A.\frac{R^n-1}{r},$$ যখন 1 বৎসরে 1 টাকার মোট পরিমাণ R.

বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (Present value of an annuity).

চক্রবৃদ্ধি হারে কয়েক বৎসরের বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয়।

মনে করি বার্ষিকী A, 1 টাকার 1 বৎসরে যাহা হয় তাহার পরিমাণ R, n, বৎসরের সংখ্যা এবং V বর্তমান মূল্য।

1 বৎসরে A টাকার বর্তমান মূল্য $=AR^{-1}$

2 „ A „ „ „ $=AR^{-2}$

3 „ A „ „ „ $=AR^{-3}$

... ...

$$\therefore \quad V = AR^{-1} + AR^{-2} + AR^{-3} + \cdots\cdots n\text{-তম পদ}$$
$$= AR^{-1}(1 + R^{-1} + R^{-2} + \cdots\cdots n\text{-তম পদ})$$
$$= AR^{-1}.\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}} = \frac{A}{R-1}\left(1-\frac{1}{R^n}\right)$$
$$\therefore \quad V = \frac{A}{R-1}\left(1-\frac{1}{R^n}\right) = \frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

দ্বিতীয় প্রণালী : n বৎসরে V পরিমাণ টাকা হইবে VR^n

$$\therefore \quad VR^n = A.\frac{R^n-1}{R-1} \quad \therefore \quad V = \frac{A(R^n-1)}{R(R-1)} = \frac{A}{R-1}\left(1-\frac{1}{R^n}\right)$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি n-এর মান অসীম হয় তবে সেক্ষেত্রে এই অনির্দিষ্ট বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য হইবে,

$$V = \frac{A}{R-1} = \frac{A}{r},$$

যেহেতু, যখন $n \to \infty$, $R^n \to \infty$ অর্থাৎ $\frac{1}{R^n} \to 0$

দ্রষ্টব্য : বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয়ে সাধারণতঃ চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ ধরা হইয়া থাকে।

বিলম্বিত বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (Present value of Deffered Annuity)

m বৎসর পরে আরম্ভ হইয়া n বৎসরের জন্য চক্রবৃদ্ধি হারে কোন বিলম্বিত বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য নির্ণয়।

মনে করি বার্ষিকী A, 1 টাকার 1 বৎসরের পরিমাণ R এবং বর্তমান মূল্য V.

যেহেতু প্রথম কিস্তি $(m+1)$ বৎসর পরে, দ্বিতীয় কিস্তি $(m+2)$ বৎসর পরে, এই ভাবে দেওয়া হয়, সুতরাং প্রথম, দ্বিতীয়,…কিস্তিগুলির বর্তমান মূল্য যথাক্রমে,

$$AR^{-(m+1)}, AR^{-(m+2)}, \cdots AR^{-(m+n)}$$

$\therefore$ বিভিন্ন কিস্তিগুলির মোট সমষ্টি = বর্তমান মূল্য।

$$V = AR^{-(m+1)} + AR^{-(m+2)} + AR^{-(m+3)} + \cdots n\text{-তম পদ}$$
$$= AR^{-(m+1)}\{1 + R^{-1} + R^{-2} + \cdots n\text{-তম পদ}\}$$
$$= AR^{-(m+1)}.\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}} = \frac{A}{R^{m+n}}.\frac{R^n-1}{R-1}$$
$$= \frac{A}{R-1}\left\{\left(1-\frac{1}{R^{m+n}}\right)-\left(1-\frac{1}{R^m}\right)\right\}$$

অনুসিদ্ধান্ত : n-এর মান অসীম হইলে বিলম্বিত বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (যাহা m বৎসর পরে আরম্ভ হয়) হইবে,

$$V = \frac{AR^{-m}}{R-1}.$$

উদা. 1. 12 বৎসরে একটি নির্দিষ্ট বার্ষিকীর পরিমাণ এবং বর্তমান মূল্য কত হইবে, যদি $3\frac{1}{2}\%$ হারে চক্রবৃদ্ধি সুদ হয়। [C. U.]

[দেওয়া আছে $(1{\cdot}035)^{12} = 1{\cdot}511066$]

এখানে $A = 150$ টাকা, $n = 12$, $r = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = \frac{3{\cdot}5}{100} = {\cdot}035$

$$\therefore \quad M = \frac{A}{r}\{(1+r)^n - 1\} = \frac{150}{{\cdot}035}\{(1{\cdot}035)^{12} - 1\} = \frac{150}{{\cdot}035}(1{\cdot}511066 - 1)$$

$$= \frac{150 \times 1000}{35} \times \frac{511066}{1000000} = 2190{\cdot}28 \text{ টাকা}$$

আবার $V = \frac{A}{R}\left\{1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right\} = \frac{150}{{\cdot}035}\left\{1 - \frac{1}{(1{\cdot}035)^{12}}\right\}$

$$= \frac{150 \times 1000}{35}\left\{1 - \frac{1}{1{\cdot}511066}\right\} = \frac{150 \times 1000}{35} \times \frac{{\cdot}511066}{1{\cdot}511066}$$

$$= \frac{150 \times 1000 \times 511066}{35 \times 1511066} = 1449{\cdot}50 \text{ টাকা।}$$

উদা. 2. কোন সমিতির এক ব্যক্তি 400 টাকা এরূপ শর্তে ধার করিবেন যে তিনি 5% চক্রবৃদ্ধি সুদের হারে 5টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে উহা পরিশোধ করিবেন এবং প্রথম কিস্তি বৎসরের শেষে দিবেন। প্রতি কিস্তির পরিমাণ কত হইবে ? [C. U. '43]

মনে করি প্রতি কিস্তির পরিমাণ A।

এখানে $V = 400$, $n = 5$, $r = \frac{5}{100} = {\cdot}05$, $A = ?$

$$V = \frac{A}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n} \qquad \therefore \quad 400 = \frac{A}{{\cdot}05} \cdot \frac{(1{\cdot}05)^5 - 1}{(1{\cdot}05)^5}$$

মনে করি $x = (1{\cdot}05)^5 \quad \therefore \quad \log x = 5 \log 1{\cdot}05 = 5 \times {\cdot}0212 = {\cdot}1060$

$$\therefore \quad x = \text{Antilog } {\cdot}1060 = 1{\cdot}276 \quad \therefore \quad x = (1{\cdot}05)^5 = 1{\cdot}276$$

$$\therefore \quad 400 = \frac{A \times 100}{5} \cdot \frac{{\cdot}276}{1{\cdot}276} = \frac{A \times 20 \times 276}{1276}$$

$$\therefore \quad A = \frac{400 \times 1276}{20 \times 276} = 92{\cdot}46 \text{ টাকা।}$$

Exercise—18A

1. 300 টাকার 5 বৎসরে 4% চক্রবৃদ্ধি হারে বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য কত হইবে ?
[log 1·04 = ·01703, log 821·923 = 2·91483]

2. 100 টাকার একটি বার্ষিকী যাহা 10 বৎসর দেওয়া হয় নাই তাহা 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে কত টাকা হইবে ?
[log 1·6289 = ·211893]

3. 100 টাকার একটি বার্ষিকীর 40 বৎসরের জন্য 4% হারে মোট কত টাকা দিতে হইবে ?
[log 26 = 1·41497, log 20835 = 4·31880]

4. 1000 টাকার একটি ঋণ 10টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইবে। যদি 4% চক্রবৃদ্ধি সুদের হার হয়, তবে বৎসরে কত টাকা দিতে হইবে ?
[log 1·480238 = ·170333]

5. এক ব্যক্তি 5000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী ক্রয় করিতে চান এবং নগদে 1732 টাকা দিতে রাজী আছেন। অবশিষ্ট টাকা 9টি সমান কিস্তিতে পরিশোধ করিতে চান। যদি $4\frac{1}{2}\%$ হারে সুদ ধার্য হইয়া থাকে, তবে বৎসরে কত টাকা দিতে হইবে ?

6. এক কোম্পানী 10000 টাকা এরূপ সর্তে ধার করিল যে, 5% চক্রবৃদ্ধি সুদে বৎসরে 1000 টাকা পরিশোধ করা হইবে। কত বৎসরে ধার শোধ হইবে ?

7. 20000 টাকার একটি ঋণ 30টি সমান কিস্তিতে শোধ করিতে হইবে। যদি 4% চক্রবৃদ্ধি সুদের হার ধার্য হইয়া থাকে তবে প্রতি কিস্তির পরিমাণ কত হইবে ?

8. 60 বৎসর বয়সের এক ব্যক্তি বার্ষিক 1200 টাকা পেন্‌সন্ পান। তিনি তাঁহার সমস্ত পেন্‌সন্ বর্তমানে পাইতে চান। যদি 4% হারে সুদ ধার্য হইয়া থাকে এবং যদি তিনি আরও 10 বৎসর বাঁচিবেন বলিয়া আশা করেন, তবে কত টাকা পাইবেন ?
[log 1480238 = 6·1703]

9. এক ব্যক্তি 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 2000 টাকা ধার করিলেন এবং 10টি সমান কিস্তিতে শোধ করিবেন বলিয়া ঠিক করিলেন। যদি প্রথম কিস্তি বৎসরের শেষে দেন তবে প্রতি কিস্তির পরিমাণ কত হইবে ?
দেওয়া আছে $(1·04)^{10} = 1·480244$

10. যদি 1 টাকার উপর বৎসরে r টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদ ধার্য হয় এবং প্রতি বৎসরে $\frac{1}{m}$ টাকা করিয়া দিয়া n বৎসরে উহা শোধ হয়, তবে প্রমাণ কর

$$n = -\frac{\log(1-mr)}{\log(1+r)}$$

ত্রিকোণমিতি

(TRIGONOMETRY)

1 কোণ-পরিমাণ

প্রথম অধ্যায় MEASUREMENT OF ANGLES

1.1. ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

ত্রিকোণমিতি গণিতশাস্ত্রের একটি অন্যতম মূল্যবান শাখা। ত্রিভুজের কোণ, বাহু, ক্ষেত্রফল ইত্যাদির পরিমাপ ও পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় ছিল এর প্রাথমিক উদ্দেশ্য। পরবর্তিকালে, এর প্রয়োগক্ষেত্র আরও ব্যাপকতা লাভ করে এবং শুধু ত্রিভুজই নয়, যে কোন বহুভুজক্ষেত্রের কোণ, বাহু, ক্ষেত্রফল প্রভৃতি সম্পর্কেও যাবতীয় তথ্য এই শাখার আলোচ্য বিষয় হয়ে ওঠে। দূরত্ব, উচ্চতা ইত্যাদি নির্ণয়েও ত্রিকোণমিতির ব্যাপক প্রয়োগ রয়েছে। এর দুই ভাগ—**সামতলিক ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonometry)** ও **গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonometry)**।

1.2. কোণের পরিমাণ (Measure of an angle)

যে কোন মাপজোখের ক্ষেত্রে প্রথম প্রয়োজন হল একক (Unit) নির্ধারণ করা। কোণ পরিমাপের ক্ষেত্রেও তাই প্রথম কাজ হল **একক কোণ** স্থির করা। তা হলে, যে কোন কোণে ঐ একক কোণ কত সংখ্যক বার রয়েছে তা দিয়ে ঐ কোণের পরিমাণ প্রকাশ করা চলবে। একক কোণ নির্ধারণের উপর কোণ নিরূপণের বিভিন্ন পদ্ধতি সৃষ্টি হয়েছে।

1.3. ষষ্টিমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System)

এই পদ্ধতিতে কোণের একক হল **ডিগ্রি** (degree)। এক সমকোণকে 90 সমান অংশে ভাগ করে প্রত্যেক ভাগকে **ডিগ্রি** বলা হয়। এক ডিগ্রি থেকে ক্ষুদ্রতর কোণকে অখণ্ড সংখ্যায় প্রকাশ করার জন্য ডিগ্রিকে 60 সমান অংশে ভাগ করে প্রত্যেক ভাগকে এক **মিনিট** (minute) এবং প্রত্যেক মিনিটকে 60 সমান অংশে ভাগ করে প্রত্যেক ভাগকে এক **সেকেণ্ড** (second) বলা হয়ে থাকে।

কাজেই,

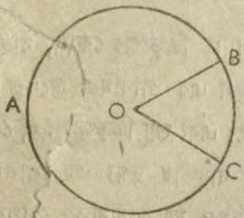
$$60 \text{ সেকেণ্ড } (60'') = 1 \text{ মিনিট } (1')$$
$$60 \text{ মিনিট } (60') = 1 \text{ ডিগ্রি } (1^\circ)$$
$$90 \text{ ডিগ্রি } (90^\circ) = 1 \text{ সমকোণ}$$

কোণের পরিমাণ সাধারণত এই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। একে ষষ্টিমূলক মান বলে।

1.4. বৃত্তমূলক পদ্ধতি (Circular system)

এই পদ্ধতিতে একক কোণকে এক রেডিয়ান (Radian) বলে।

রেডিয়ান—কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দীর্ঘ যে-কোন চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে রেডিয়ান বলে।



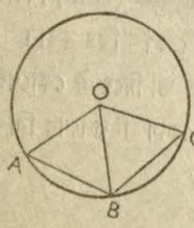
চিত্র 1

মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r। বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু B থেকে ব্যাসার্ধ r-এর সমান করে BC বৃত্তচাপ কাট। OB, OC যুক্ত কর। ∠BOC কোণটি এক রেডিয়ান।

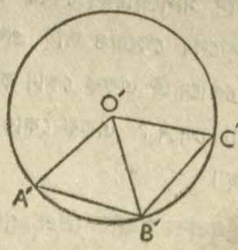
আমরা পরে দেখাব যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ।

1.5. বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত (Ratio of circumference and diameter of a circle)

ধর ABC ও A′B′C′ যে কোন দুটি বৃত্ত। r ও r' যথাক্রমে ওদের ব্যাসার্ধ। উভয়



চিত্র 2



চিত্র 3

বৃত্তেই n-ভুজবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত কর। কেন্দ্র O এবং O′-এর সঙ্গে বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো যুক্ত কর।

যেহেতু △OAB ও △O′A′B′ সদৃশ

$$\therefore \frac{OA}{O'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{n.AB}{n.A'B'} = \frac{p}{p'}$$

p এবং p' যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা।

$$\therefore \quad \frac{r}{r'}=\frac{p}{p'} \quad (\because \quad OA=r,\ O'A'=r')$$

n-এর মান যাই হোক না কেন উপরের সম্বন্ধটি সর্বদাই সত্যি। কাজেই n-এর মান সীমাতীতরূপে বাড়ালে, বহুভুজের পরিসীমাদ্বয় বৃত্তদ্বয়ের পরিধিতে পরিণত হবে।

$$\therefore \quad \frac{r}{r'}=\frac{\text{ABC বৃত্তের পরিধি}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}' \text{ বৃত্তের পরিধি}}$$

যেহেতু ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ, কাজেই, উপরের সম্বন্ধ থেকে লেখা যায়:

$$\frac{\text{কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{ঐ বৃত্তের ব্যাস}}=\text{ধ্রুবক।}$$

এই ধ্রুবকটিকে গ্রীক অক্ষর π দিয়ে সূচিত করা হয়। অতএব

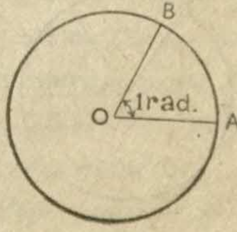
$$\frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃত্তের ব্যাস}}=\pi \quad \therefore \quad \text{বৃত্তের পরিধি}=2\pi r$$

পরিমাপ করে দেখা গেছে যে π-কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে দশমিকটি অসীম এবং অনাবৃত হয়। π-এর 5 দশমিক ঘর পর্যন্ত শুদ্ধ মান হল: $\pi = 3\cdot14159$। কার্যত π-এর মান ভগ্নাংশরূপে 22/7 (সূক্ষ্মতর হল 355/113) ধরা হয়।

1.6. রেডিয়ান একটি ধ্রুবক কোণ (Radian is a constant angle)

ধর, r ব্যাসার্ধযুক্ত কোন বৃত্তের কেন্দ্র O। $\therefore$ $OA=r$. বৃত্তের AB চাপটির দৈর্ঘ্য OA এর দৈর্ঘ্যের সমান। OB যোগ কর। তা হলে $\angle AOB=1$ রেডিয়ান।

এখন, জ্যামিতি থেকে জানা যায়, যে কোন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ কোণ-উৎপন্নকারী চাপের সমানুপাতী।



চিত্র 4

$$\therefore \quad \frac{\angle AOB}{\text{4 সমকোণ}}=\frac{\text{চাপ AB}}{\text{সমগ্র পরিধি}}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{\text{1 রেডিয়ান}}{\text{4 সমকোণ}}=\frac{r}{2\pi r}$$

$$\therefore \quad \text{1 রেডিয়ান}=\frac{2}{\pi}\ \text{সমকোণ}=\text{ধ্রুবক।}$$

1.7. রেডিয়ান ও ডিগ্রির সম্পর্ক (Relation between degrees and radians)

পূর্ব অনুচ্ছেদ থেকে, সহজেই পাওয়া যায়

$$\pi \text{ রেডিয়ান} = 2 \text{ সমকোণ} = 180°$$

$$\therefore \quad 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{180}{\pi} \text{ ডিগ্রি} = 57{\cdot}29577 \text{ ডিগ্রি}$$

$$= 57°17'44{\cdot}8'' \text{ (প্রায়)}$$

এবং $1 \text{ ডিগ্রি} = \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান} = {\cdot}0174533 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)}$

1.8. রেডিয়ান ও ডিগ্রির সম্পর্ক থেকে সহজেই লেখা যায়ঃ

$15° = \frac{\pi}{12}$ রেডিয়ান $90° = \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

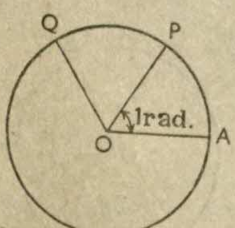
$30° = \frac{\pi}{6}$,, $120° = \frac{2\pi}{3}$,,

$45° = \frac{\pi}{4}$,, $180° = \pi$,,

$60° = \frac{\pi}{3}$,, $360° = 2\pi$,,

1.9. কোণের বৃত্তমূলক মান (Circular measure of an angle)

ধর $\angle AOQ$ একটি কোণ। এর বৃত্তমূলক বা রেডিয়ান মান বের করতে হবে। O-কে কেন্দ্র করে যে কোন ব্যাসার্ধ r নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপটি OA কে A বিন্দুতে এবং OQ কে Q বিন্দুতে ছেদ করল। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r-এর সমান করে আর একটি চাপ AP আঁক। OP যোগ কর। $\therefore \angle AOP = 1$ রেডিয়ান।



চিত্র 5

এক্ষণে, $\angle AOQ$ এর বৃত্তমূলক বা রেডিয়ান মান

$$= \frac{\angle AOQ}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AQ}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AQ}{r}$$

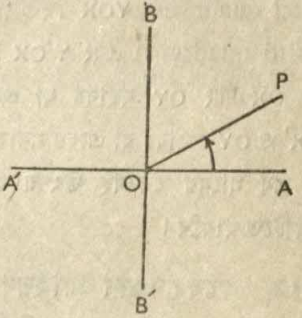
$\therefore$ l দৈর্ঘ্যের একটি চাপ যদি কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে এবং যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হয় তবে $\theta = l/r$

$\therefore$ কোণ $= \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}$ $\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $=$ কোণ $\times$ ব্যাসার্ধ

1.10. ত্রিকোণমিতিতে কোণ উৎপাদন (Generation of angles in trigonometry)

ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা জ্যামিতির তুলনায় ব্যাপক। নিচের আলোচনা থেকে তা স্পষ্ট হবে।

ধর, OP রেখাটি OA অবস্থান থেকে O বিন্দুর চারদিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী ঘূর্ণনে রত। ঘূর্ণনের ফলে ∠AOP উৎপন্ন হচ্ছে। OP-এর ঘূর্ণন মাত্রা OA ও OP রেখার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ধারণ করছে। 6 নং চিত্রে OP রেখার এমন একটি অবস্থান দেখান হয়েছে যে, ∠AOP কোণটি সূক্ষ্মকোণ।

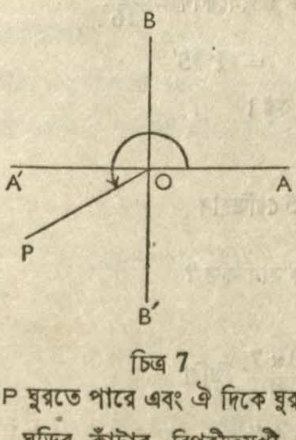


চিত্র 6

ঘুরতে ঘুরতে OP রেখা যখন OB অবস্থানে আসে তখন এক সমকোণের উৎপত্তি হয়।

OP যখন OA′ অবস্থানে আসবে তখন উৎপন্ন কোণের পরিমাণ দাঁড়াবে 2 সমকোণ।

ঘুরতে ঘুরতে OP 7 নং চিত্রে প্রদর্শিত অবস্থানে এলে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ 2 সমকোণের চেয়ে বেশি দাঁড়াবে।



চিত্র 7

এমন করে OP যখন তার পূর্ব অবস্থান OA-তে ফিরে আসবে তখন পুরো একবার আবর্তন ঘটবে এবং উৎপন্ন কোণ হবে 4 সমকোণ।

এইভাবে অনির্দিষ্টকাল ঘূর্ণন চললে যে কোন মানের কোণ উৎপন্ন হতে পারে। প্রতি পূর্ণ আবর্তনে 4 সমকোণ করে কোণের সৃষ্টি হবে। ঘড়ির কাঁটার অভিমুখেও OP ঘুরতে পারে এবং ঐ দিকে ঘুরলে আরো এক প্রস্থ নূতন কোণের উৎপত্তি হবে।

ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী আবর্তনে উৎপন্ন কোণগুলিকে **ধনাত্মক কোণ** (positive angles) এবং ঘড়ির কাঁটার অভিমুখী আবর্তনে উৎপন্ন কোণগুলিকে **ঋণাত্মক কোণ** (negative angles) বলা হয়।

কাজেই ত্রিকোণমিতির কোণ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এবং যে কোন মানের হতে পারে। জ্যামিতির ক্ষেত্রে ধনাত্মক এবং 4 সমকোণের চেয়ে ছোট কোণই শুধু অর্থবহ।

1.11. চার পাদ (Four quadrants)

XOX′ এবং YOY′ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব এবং O বিন্দুতে ছেদ করেছে। চিত্র 10 দেখ। ফলে সমতলটি XOY, YOX′, X′OY′ এবং Y′OX এই চারটি প্রকোষ্ঠে বিভক্ত হয়েছে। এগুলোকে এক একটি পাদ (quadrant) বলে। XOY হল প্রথম পাদ (first quadrant), YOX′ দ্বিতীয় পাদ (second quadrant), X′OY′ তৃতীয় পাদ (third quadrant) এবং Y′OX চতুর্থ পাদ (fourth quadrant)।

OX এবং OY বরাবর বা এদের সমান্তরাল দূরত্বগুলোকে প্রথামতো ধনাত্মক এবং OX′ ও OY′ বরাবর বা এদের সমান্তরাল দূরত্বকে ঋণাত্মক ধরা হয়।

যে মানের কোণই উৎপন্ন হোক না কেন, কোণটি অবশ্যই পাদ চারটির যে কোন একটিতে থাকবে।

1.12. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. ষষ্টিমূলক মান নির্ণয় কর: (i) $\frac{1}{12}$ সমকোণ (ii) 2 সমকোণের $\frac{1}{16}$

(i) 1 সমকোণ $=90^\circ$

$\therefore$ $\frac{1}{12}$ সমকোণ $=\frac{90^\circ}{12}$

$=7^\circ 30'$

(ii) 2 সমকোণ $=180^\circ$

$\therefore$ $\frac{1}{16}\times 2$ সমকোণ $=\frac{180^\circ}{16}$

$=11^\circ 15'$

উদা. 2. $45^\circ\ 15'\ 27''$ কে বৃত্তীয় মানে প্রকাশ কর।

$45^\circ\ 15'27''=45{\cdot}2575$ ডিগ্রি

$\therefore$ কোণটির বৃত্তীয় মান $=\frac{\pi}{180}\times 45{\cdot}2575$ রেডিয়ান

উদা. 3. যে কোণের বৃত্তীয় মান $\frac{3}{5}$ তার ষষ্টিমূলক মান কত?

ধর, কোণটি D ডিগ্রি।

$\therefore\ \frac{D}{180}=\frac{3}{5\pi}\quad \therefore\ D=\frac{3\times 180}{5\pi}=\frac{3\times 180\times 7}{5\times 22}$ ডিগ্রি

$=34^\circ 21' 49''$

উদা. 4. কোন ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 1 : 2 : 3 ; কোণগুলোকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

ধরি, কোণগুলোর মান, α, 2α ও 3α ডিগ্রি

$\therefore \quad \alpha+2\alpha+3\alpha=180^\circ$

$\therefore \quad 6\alpha=180^\circ \therefore \quad \alpha=30^\circ$

$\therefore$ অন্য কোণগুলো 60° এবং 90°

উদা. 5. কোন বৃত্তাকার বাগানের পরিধি 330 মিটার। বাগানের ব্যাস কত?

বাগানের ব্যাস $=d$ (ধরি)। অতএব প্রশ্নানুসারে, $\pi d=330$ মিটার

$\therefore \quad d=\frac{330}{\pi}=\frac{330\times7}{22}$ মি. $=$ **105** মিটার।

উদা. 6. 17 গজ 1 ফুট 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের একটি চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে 1.9 রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে। ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য ইঞ্চিতে প্রকাশ কর।

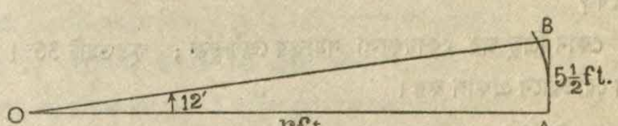
আমরা জানি, $\frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}}=$ কোণ (রেডিয়ানে)

$$\therefore \quad \frac{\{(17\times3)+1\}\ 12+3 \text{ ইঞ্চি}}{r\ (\text{ইঞ্চি})}=1\cdot9$$

$$\therefore \quad r=\frac{52\times12+3}{1\cdot9}=\frac{624+3}{1\cdot9}=\frac{627}{1\cdot9}=330 \text{ ইঞ্চি}$$

উদা. 7. $5\frac{1}{2}$ ফুট উঁচু একটি টাওয়ার কতদূরে থাকলে দর্শকের চোখে $12'$ কোণ উৎপন্ন করবে?

ধরি, AB হল টাওয়ার, O দর্শকের চোখ। $\therefore \quad \angle AOB=12'$ অর্থাৎ $\angle AOB$ অত্যন্ত ছোট। কাজেই AB-কে O কেন্দ্রযুক্ত একটি চাপ বলে ধরা যেতে পারে।



চিত্র 8

$$\therefore \quad \frac{12}{60}\times\frac{\pi}{180}=\frac{5\frac{1}{2}}{r}; \quad r \text{ ফুট}=OA$$

$$\therefore \quad r=\frac{\pi}{2}\times\frac{180\times60}{12\pi} \text{ ft.}=1575 \text{ ft.}$$

উদাহরণমালা 1

1. রেডিয়ানে প্রকাশিত নিচের কোণগুলিকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর :
$3\pi/4$, $5\pi/4$, $\pi/54$, $1\frac{1}{3}$, 0 02, 1·309

2. রেডিয়ানে প্রকাশ কর :
60°, 110°, 57°30′, 14°24′, 18°33′, 45″, 45°13′ 30″

3. একটি সুষম পঞ্চভুজ ও একটি সুষম দশভুজের বহিঃকোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

4. একটি সুষম n-বাহুবিশিষ্ট বহুভুজের এবং একটি সুষম সপ্তভুজের অন্তঃস্থ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

5. একটি ত্রিভুজের কোন একটি কোণ 45°, অপর একটি কোণ $5\pi/8$ রেডিয়ান। তৃতীয় কোণের ষষ্টিমূলক ও বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

6. একটি কোণে যত সংখ্যক ডিগ্রি আছে তা ঐ কোণের রেডিয়ান সংখ্যার 14 গুণের চেয়েও 51 বেশি। কোণটির ষষ্টিমূলক মান কত ?

7. দুটি কোণের অন্তর 10° এবং তাদের সমষ্টির বৃত্তীয় মান 2। প্রতিটি কোণের বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

8. দুটি কোণের সমষ্টি 3 রেডিয়ান এবং তাদের অন্তর 10°। প্রতিটি কোণকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর ($43\pi=135$ ধর)।

9. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং বৃহত্তমটি ক্ষুদ্রতমের দ্বিগুণ। কোণগুলো ডিগ্রি এবং রেডিয়ানে প্রকাশ কর। **(ক. বি. 1951)**

10. কোন ইঞ্জিনের ফ্লাইহুইল সেকেণ্ডে 40 বার ঘোরে। 9 রেডিয়ান ঘুরতে কত সময় লাগবে ?

11. কোন ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত ; ক্ষুদ্রতমটি 36°। ত্রিভুজের কোণগুলি রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

12. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রি সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ান সংখ্যার অনুপাত $60 : \pi$। কোণগুলো রেডিয়ান ও ডিগ্রিতে প্রকাশ কর। **(পঃ বঃ উচ্চ মাধ্যমিক 1960)**

13. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। বৃহত্তম কোণের ডিগ্রি সংখ্যা এবং অন্য কোণ দুটির সমষ্টির রেডিয়ান সংখ্যার অনুপাত 450 : 11। কোণগুলো ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

14. দুটি ত্রিভুজের প্রত্যেকেরই কোণগুলো গুণোত্তর শ্রেণীভুক্ত। একটির ক্ষুদ্রতম কোণ অন্যটির ক্ষুদ্রতম কোণের তিনগুন। আর বৃহত্তম কোণ দুটির সমষ্টি 240°। কোণ-গুলোর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

15. $3\pi/8$ কোণের সম্পূরক কোণের রেডিয়ান সংখ্যা কত?

16. একটি বহুভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। ক্ষুদ্রতমটি $2\pi/3$ রেডিয়ান এবং সাধারণ অন্তর 5°; বহুভুজটির বাহুসংখ্যা কত? (বহুভুজটিতে প্রবৃদ্ধ কোণ নেই)।

17. 7·5 ফুট দৈর্ঘ্যের চাপ কেন্দ্রে কত কোণ উৎপন্ন করবে? বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 গজ।

18. একই দৈর্ঘ্যের চাপ দুই বৃত্তের কেন্দ্রে 60° ও 75° কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাত 5 : 4। **(পঃ বঃ উচ্চ মাধ্যমিক)**

19. কোন বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়ে এক ব্যক্তি 36 সেকেণ্ডে কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন হয় এরূপ চাপ অতিক্রম করল। দেখাও যে, পথের ব্যাস 360 গজ। **(পঃ বঃ মাধ্যমিক, 1958)**

20. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সেমি.। 6 সেমি. দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে ডিগ্রি ও মিনিটে তার মান নির্ণয় কর। **(পঃ বঃ উচ্চমাধ্যমিক, 1961)**

21. 1 মাইল দূরে কোন দ্রষ্টার চোখে 1′ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ একটি টাওয়ারের উচ্চতা কত?

22. 10 ফুট উঁচু মঞ্চ দ্রষ্টার চোখে 10′ কোণ উৎপন্ন করে। মঞ্চের দূরত্ব কত?

23. $5\frac{1}{2}$ ফুট দীর্ঘ একজন লোককে আধ মাইল দূর থেকে দেখা যাচ্ছে। তিনি সেখানে যে কোণ উৎপন্ন করেন তার পরিমাণ কত? **(পঃ বঃ মাধ্যমিক 1952)**

24. পৃথিবীকে 4000 মাইল ব্যাসার্ধের একটা গোলক ধরলে কোন স্থানের 200 মাইল উত্তরে অবস্থিত অপর একটি স্থানের অক্ষাংশের পার্থক্যের আসন্ন:মান নির্ণয় কর।

25. একটি বৃত্তাকার পথে কোন ব্যক্তি সমবেগে দৌড়াচ্ছে। প্রতি মিনিটে সে বৃত্তের কেন্দ্রে $2\frac{6}{7}$ রেডিয়ান উৎপন্ন হয় এরূপ চাপ অতিক্রম করে। যদি প্রতি আবর্তনে 792 গজ অতিক্রান্ত হয় তবে 1 মাইল দৌড়তে কত সময় লাগবে?

26. একই মধ্যরেখায় অবস্থিত দুটি স্থানের অক্ষাংশের অন্তর 1°10′। যদি কোন গ্লোবের পৃষ্ঠ বরাবর মাপলে স্থান দুটির দূরত্ব 1 ইঞ্চি হয় তবে গ্লোবের ব্যাসার্ধ কত?

27. 27 ফুট লম্বা একটি দড়িতে কোন খুঁটির সঙ্গে একটি ঘোড়া বাঁধা আছে। দড়ি টান রেখে ঘোড়াটি বৃত্ত পথে কত দূর গেলে দড়িটি কেন্দ্রে 70° উৎপন্ন করবে?

28. বছরের দুটি নির্দিষ্ট দিনে দেখা গেল সূর্যের কৌণিক ব্যাস যথাক্রমে 31′ ও 32′। ঐ দুই দিন সূর্য-পৃথিবী দূরত্বের অনুপাত কত?

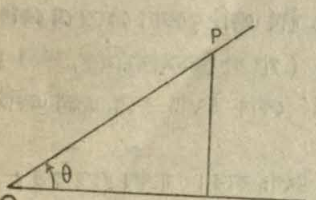
2 ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত

দ্বিতীয় অধ্যায় TRIGONOMETRIC RATIOS

2.1 আমরা এখন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত বা বৃত্তীয় অপেক্ষকের (**circular function**) সংজ্ঞা নির্ধারণ করব।

ধর, XOP যে কোন একটি সূক্ষ্মকোণ θ। OP-এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P নাও এবং OX এর উপর PM লম্ব টান। অতএব $\triangle$POM একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

θ কোণের sine বা $\sin\theta$ বলতে MP/OP, θ-কোণের cosine বা $\cos\theta$ বলতে OM/OP এবং θ কোণের tangent বা $\tan\theta$ বলতে MP/OM-কে বুঝায়। sine θ-এর অন্যোন্যক cosecant বা cosec θ, cosine θ এর অন্যোন্যক secant বা sec θ এবং tangent-এর অন্যোন্যক cotangent বা cot θ.



চিত্র 9

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}};\quad \cos\theta=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}\ \text{এবং}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}};\quad \cot\theta=\frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}};$$

$$\sec\theta=\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}\ \text{এবং}\ \operatorname{cosec}\theta=\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}$$

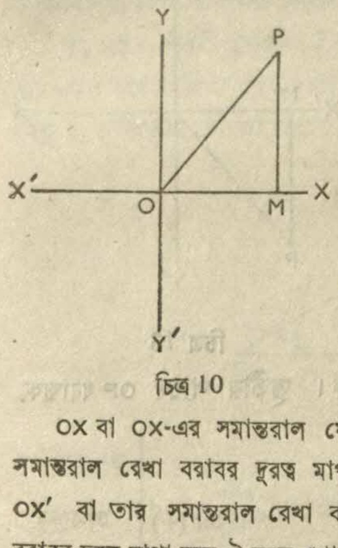
দ্রষ্টব্য : (i) সূক্ষ্মকোণ নিয়ে সংজ্ঞাগুলো নির্ধারণ করা হলেও পরবর্তী অনুচ্ছেদে দেখান হবে যে, এই সংজ্ঞা যে কোন মাপের কোণের পক্ষেই প্রযোজ্য।

(ii) উপরের ছটি অনুপাত ছাড়া আরও দুটি অনুপাত কখন কখন উল্লেখ করা হয়। যেমন, $1-\cos\theta$ কে বলে versed sine θ বা **vers A** এবং $1-\sin\theta$ কে বলে coversed sine A বা **co-vers A.**

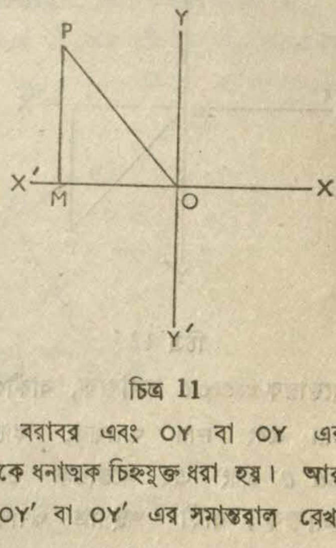
(iii) ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলো শুদ্ধ সংখ্যা, কেননা এরা দুটি দৈর্ঘ্যের অনুপাত। কাজেই, এদের উপর সমস্ত বীজগাণিতিক নিয়মগুলো প্রযোজ্য।

2.2. ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন: যে কোন কোণের অনুপাত (Sign of trigonometrical ratios: ratios of any angle)।

ধর, XX′ এবং YY′ রেখা দুটি O বিন্দুতে পরস্পরছেদী ও লম্ব। তলটিকে রেখা-দ্বয় চারটি পাদে বিভক্ত করছে: XOY, YOX′, X′OY′, YO′X—যথাক্রমে প্রথম পাদ। দ্বিতীয় পাদ, তৃতীয় পাদ এবং চতুর্থ পাদ।



চিত্র 10



চিত্র 11

OX বা OX-এর সমান্তরাল যে কোন রেখা বরাবর এবং OY বা OY এর সমান্তরাল রেখা বরাবর দূরত্ব মাপা হলে দূরত্বকে ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত ধরা হয়। আর OX′ বা তার সমান্তরাল রেখা বরাবর এবং OY′ বা OY′ এর সমান্তরাল রেখা বরাবর দূরত্ব মাপা হলে ঐ দূরত্ব ঋণাত্মক ধরা হয়।

ধর, কোন-উৎপাদক ঘূর্ণ্যমান রেখাটি প্রাথমিক অবস্থান OX থেকে বামাবর্তে বা দক্ষিণাবর্তে, যে কোন দিকে ঘুরে OP অবস্থানে এল এবং θ কোণ উৎপন্ন হল।

ঘূর্ণ্যমান রেখাটির চূড়ান্ত অবস্থান OP-এর উপর P একটি বিন্দু নাও এবং P থেকে XX′ এর উপর PM লম্ব টান। তা হলে, $\triangle$ OPM সমকোণী ত্রিভুজে OP যে পাদেই থাকুক না কেন, পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে বর্ণিত অনুপাতগুলোকে θ-কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত বলে। অর্থাৎ, যথোচিত চিহ্নসহ

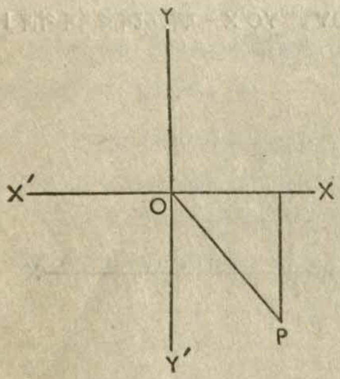
$$\sin\theta=\frac{PM}{OM};\ \cos\theta=\frac{OM}{OP};\qquad \tan\theta=\frac{PM}{OP}\ \text{ইত্যাদি।}$$

ঘূর্ণ্যমান রেখা OP কোণের সীমাজ্ঞাপক এবং সর্বদাই ধনাত্মক বলে ধরা হয়।

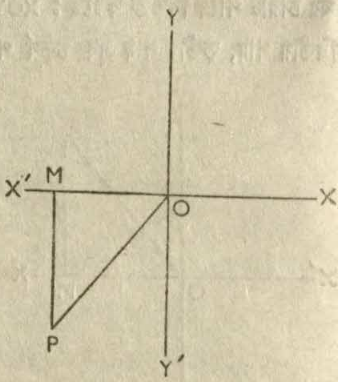
কাজেই ত্রৈকোণমিতিক রাশির চিহ্নসংক্রান্ত নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলো সহজেই করা চলে।

প্রথম পাদে OP, PM, OM সকলেই ধনাত্মক ; কাজেই এই পাদে ত্রৈকোণমিতিক সকল অনুপাতই ধনাত্মক।

দ্বিতীয় পাদে OP এবং PM ধনাত্মক, OM ঋণাত্মক। ফলে $\sin\theta$ এবং এর

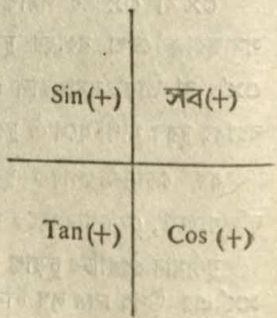


চিত্র 12



চিত্র 13

অন্যোন্যক $\operatorname{cosec}\theta$ ধনাত্মক, বাকীগুলো ঋণাত্মক। তৃতীয় পাদে OP ধনাত্মক, OM এবং PM ঋণাত্মক, কাজেই $\tan\theta$ এবং এর অন্যোন্যক $\cot\theta$ ধনাত্মক ; বাকী অনুপাত ঋণাত্মক, চতুর্থ পাদে, OP ও OM ধনাত্মক, PM ঋণাত্মক। ফলে $\cos\theta$ এবং এর অন্যোন্যক $\sec\theta$ ধনাত্মক এবং বাকী-গুলো ঋণাত্মক। মনে রাখার সুবিধার জন্য সিদ্ধান্তগুলিকে পাশে চিত্ররূপ দেওয়া হল।



চিত্র 14

2-3 সম-প্রান্তিক কোণ (Coterminal angles)

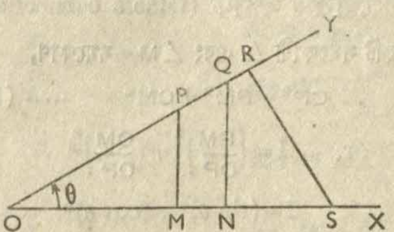
যখন কোন কোণকে 2π (রেডিয়ান) এর কোন গুণিতকের দ্বারা বাড়ানো বা কমানো হয়, তখন কোণ উৎপাদক ঘূর্ণ্যমান রেখা এক বা একাধিক পূর্ণ আবর্তনের পর

একই অবস্থান গ্রহণ করে। একই প্রান্তরেখা বিশিষ্ট এই জাতীয় কোণগুলোকে সম-প্রান্তিক কোণ বলে। θ-কোণের সমপ্রান্তিক কোণগুলোকে সাধারণভাবে $2n\pi+\theta$ (n=পূর্ণসংখ্যা) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

স্পষ্টত সব সমপ্রান্তিক কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলো সমান। অর্থাৎ $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ ইত্যাদি।

2.4 নির্দিষ্ট মানবিশিষ্ট কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতও নির্দিষ্ট মানবিশিষ্ট (For a given angle, the trigonometric ratios are unique)

ধর, XOY একটি সূক্ষ্মকোণ θ; OY-এর উপরে যে কোন দুটি বিন্দু P, Q নাও এবং OX-এর উপরে যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টান। ধর, OY-এর উপরে R আর একটি বিন্দু। R বিন্দুতে OY-এর উপরে RS লম্ব টান।



চিত্র 15

অতএব,

$$\sin\theta=\frac{PM}{OP}, \ \triangle POM \text{ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে; এবং}$$

$$\sin\theta=\frac{QN}{OQ}, \ \triangle QON \text{ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে; এবং}$$

$$\sin\theta=\frac{RS}{OS}, \ \triangle SOR \text{ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে।}$$

কিন্তু $\triangle^s$ POM, QON এবং SOR সকলেই সমান কোণী।

$$\therefore \ \frac{PM}{OP}=\frac{QN}{OQ}=\frac{RS}{OS}$$

কাজেই θ-কোণের sine-এর মান, তা যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের সম্পর্কেই নির্ণয় করা হোক না কেন, সর্বদা একই থাকবে।

অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের পক্ষেও এটি প্রযোজ্য। কাজেই, নির্দিষ্ট মানের কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতও নির্দিষ্ট মানবিশিষ্ট।

2.5. অনুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্বন্ধ (Relations between trigonometrical ratios)

সংজ্ঞানুসারে : $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$; $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$; $\tan\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}$.

চিত্র নং 1 অনুযায়ী : $\sin\theta=\dfrac{PM}{OP}$; $\cos\theta=\dfrac{OM}{OP}$

$$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{PM}{OP}\div\frac{OM}{OP}=\frac{PM}{OM}=\tan\theta$$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta};\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

2.6. অন্যান্য সংযোজক সম্পর্ক (Others connecting relations)

যেহেতু MOP একটি সমকোণী $\triangle$ এবং $\angle M=$ সমকোণ,

$$\therefore OP^2=PM^2+OM^2 \quad ......(A)$$

$$\text{or,}\quad 1=\left(\frac{PM}{OP}\right)^2+\left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$\therefore \quad 1=(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2$$

বা, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

(A) থেকেও আরও লেখা যায় :

$$\left(\frac{OP}{PM}\right)^2=1+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$

এবং $$\left(\frac{OP}{OM}\right)^2=1+\left(\frac{PM}{OM}\right)^2$$

বা, $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

অনুসিদ্ধান্ত : $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \quad \therefore \sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta \quad \therefore \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1 \quad \therefore \tan\theta=\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$

$\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta-1 \quad \therefore \cot\theta=\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta-1}$

দ্রষ্টব্য : যদি $\theta/2$ দ্বারা θ-কে পরিবর্তিত করা হয় তবে সূত্রগুলো এরূপ হবে : $\sin^2\theta/2+\cos^2\theta/21$ =ইত্যাদি।

2·7 ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা (Restrictions in the value of trigonometrical ratios)

অতিভুজই একটি সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু। কাজেই, ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞা থেকে বলা যায় :

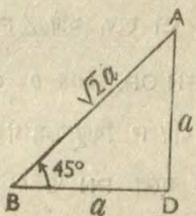
(i) sine ও cosine-এর মান (সাংখ্যিক) >1 হতে পারে না।

(ii) cosecant ও secant-এর মান (সাংখ্যিক) <1 হতে পারে না।

(iii) tangent ও cotangent-এর যে কোন সাংখ্যিক মান সম্ভব।

2.8. 45° $(=\pi/4)$ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের মান (Values of trigonometrical ratios of 45°)

ধর, ABD একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ ; ∠D সমকোণ, $\therefore$ $\angle A=\angle B=45°$। ধর, সমান বাহু দুটি BD ও AD-এর প্রত্যেকেই দৈর্ঘ্যে a একক।



চিত্র 16

$$\therefore\ AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{2}a$$

$$\therefore\ \sin 45°=\frac{AD}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45°=\frac{BD}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45°=\frac{AD}{BD}=\frac{a}{a}=1$$

$$\therefore\quad \operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}\ ;\ \sec 45°=\sqrt{2}\ ;\ \cot 45°=1$$

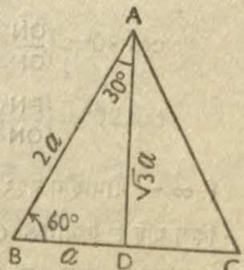
2·9. 60° $(=\pi/3)$ এবং 30° $(=\pi/6)$ কোণের অনুপাত (Ratios of 60° and 30°)

ধর, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ ; $\therefore$ প্রতিটি বাহু দৈর্ঘ্যে সমান এবং প্রত্যেকে $2a$ একক ধর। প্রতিটি কোণও সমান—প্রত্যেকে 60°।

BC এর উপর AD লম্ব টান ; সুতরাং AD রেখা ∠BAC কে এবং ভূমি BC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করল।

$\therefore$ $\angle ABD=60°$;

$\angle BAD=30°$; $BD=a$ এবং



চিত্র 17

$$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3}a$$

$\therefore\quad \sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2a}$; $\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 60° = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$; $\tan 30°\ \frac{BD}{AD} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

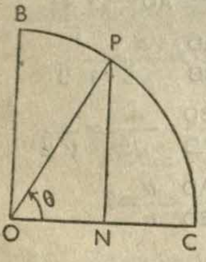
$\therefore$ অন্যান্য অনুপাতগুলোর মান হল :

$\operatorname{cosec} 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec 60° = 2$, $\cot 60 = 1/\sqrt{3}$

$\operatorname{cosec} 30° = 2$; $\sec 30° = 2/\sqrt{3}$; $\cot 30° = \sqrt{3}$

2.10. 90° ($=\pi/2$) ও 0° কোণের অনুপাত (**Ratios of 90° and 0°**)

ধর, BOC কোন বৃত্তের একটি পাদ। পরিধির উপরিস্থ কোন বিন্দু P থেকে OC-এর



চিত্র 18

PN লম্ব ধান। তা হলে যদি $\angle PON = \theta$ হয়। $\sin \theta = PN/OP$, $\cos \theta = ON/OP$ ইত্যাদি। এখন যদি P বিন্দু ক্রমাগত B-এর দিকে যায়, তা হলে PN ও θ কোণের মান ক্রমে বাড়তে থাকে ; ON ক্রমে ছোট হয়ে যায়, কিন্তু OP এর দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে। P যখন B বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়, তখন $0 = 90°$, ON লুপ্ত হয় এবং PN = OP হয়ে যায়।

$\therefore\quad \sin 90° = \left(\frac{PN}{PO}\right)_{PN=OP} = 1$ $\qquad\therefore\ \operatorname{cosec} 90° = 1$

$\cos 90° = \left(\frac{ON}{OP}\right)_{ON=O} = 0$ $\qquad \sec 90° = \infty$

$\tan 90° = \left(\frac{PN}{ON}\right)_{ON=0} = \infty$ (অসীম) $\qquad \tan 90^0 = 0$

(∞ — সীমাহীন বৃহৎ সংখ্যার দ্যোতক)

কিন্তু যদি P ক্রমাগত C অভিমুখে যায়, তবে θ-এর মান এবং PN-এর দৈর্ঘ্য ক্রমে কমতে থাকে। শেষে P যখন C-এর সঙ্গে মিলিত হয় তখন $\theta = 0°$ তে দাঁড়ায় ; PN লুপ্ত হয় এবং ON=OP হয়।

$\therefore \sin 0^\circ = \left(\frac{PN}{OP}\right)_{PN=0} = 0$ $\therefore$ cosec $0^\circ = \infty$

$\cos 0^\circ = \left(\frac{ON}{OP}\right)_{ON=OP} = 1$ sec $0^\circ = 1$

$\tan 0^\circ = \left(\frac{PN}{ON}\right)_{PN=0} = 0$ cot $0^\circ = \infty$

2.11 উপরের অনুচ্ছেদগুলোতে আলোচিত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান প্রায়ই কাজে লাগে। এজন্য ছাত্ররা এগুলো মুখস্থ রাখবে। মানগুলো নিচে তালিকাবদ্ধভাবে উপস্থাপিত করা হল।

কোণ → / অনুপাত ↓	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

অন্যান্য অনুপাতগুলো যথা **cosec, sec** এবং **cot** যথাক্রমে **sin, cos** ও **tan**-এর মানের অন্যোন্যক।

2.12 $-\theta$ কোণের অনুপাত (Ratios of $-\theta$)

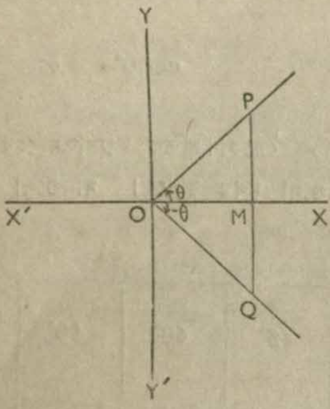
ধর, $\angle XOP = \theta$ এবং বামাবর্তে ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন $\angle XOQ = -\theta$. সীমারেখার উপর যে কোন বিন্দু P নিয়ে OX এর উপর PM লম্ব টান [(ii) ও (iii) নং ক্ষেত্রে OX′ এর উপর]। PM কে এরূপে বর্ধিত কর যেন OQ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু $\angle XOP = \angle XOQ$ (মানের দিক থেকে, চিহ্নের দিক থেকে নয়), কাজেই $\angle^s$ POM ও QOM পরস্পর সমান ; অতএব Δ^s POM ও QOM সর্বসম।

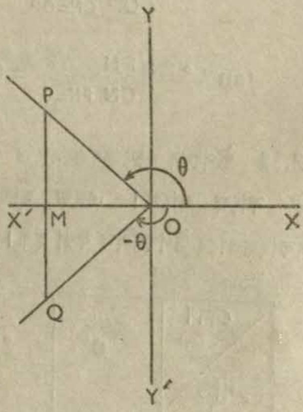
$\therefore$ QM $= -$PM, এবং OQ$=$OP,

চিহ্নের রীতি অনুসারে ঋণাত্মক চিহ্ন বসানো হয়েছে।

$$\therefore \ \sin\ (-\theta)=\frac{QM}{OQ}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta$$

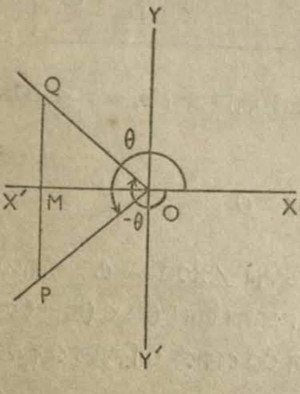


(i)

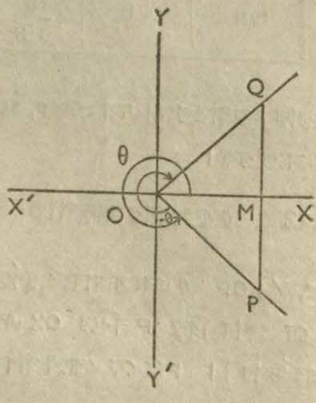


(ii)

$$\cos\ (-\theta)=\frac{OM}{OQ}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta\ ;\ \tan\ (-\theta)=\frac{QM}{OM}=\frac{-PM}{OM}=-\tan\theta$$



(iii)



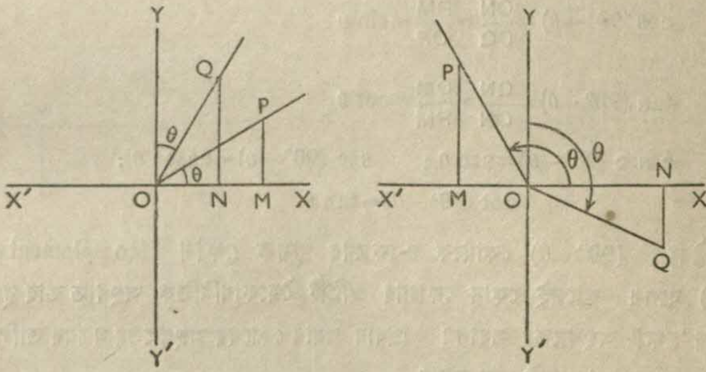
(iv)

$\therefore$ $\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$; $\sec(-\theta)=\sec\theta$; $\cot(-\theta)=-\cot\theta$.

দ্রষ্টব্য : দেখ যে, cosine এবং secant-এর মানের পরিবর্তন না ঘটিয়েও কোণের চিহ্ন পরিবর্তন করা যায়।

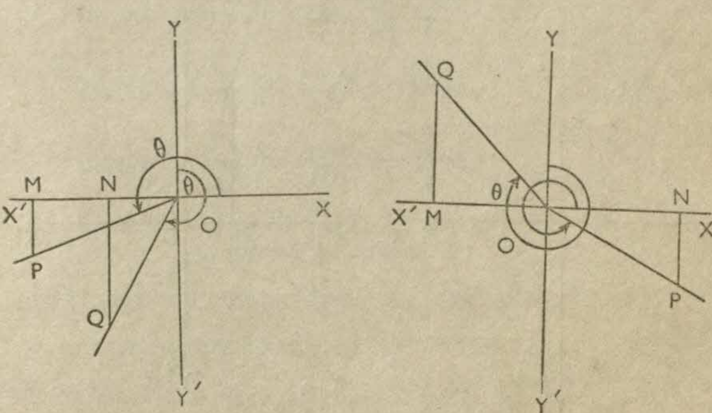
2.13 $(90° - \theta)$ কোণের অনুপাত
(Ratios of $90° - \theta$)

ধর, $\angle XOP = \theta$। প্রাথমিক অবস্থান OX থেকে একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা দক্ষিণাবর্তে XOY কোণ$=90°$ উৎপন্ন ক'রে পরে বামাবর্তে θ-পরিমাণ ঘুরে চূড়ান্ত অবস্থান



(i) (ii)

OQ নিল। $\therefore$ $\angle XOQ = (90° - \theta)$। OP ও OQ-এর উপরে যথাক্রমে P ও Q দুটি বিন্দু নাও যেন OP=OQ হয়। OX (বা OX′)-এর উপরে PM ও QN লম্ব টান।



(iii) (iv)

এক্ষণে, যেহেতু, $\angle XOP = \angle YOQ$ (মানের দিকে, চিহ্নে নয়),

$\therefore$ $\angle POM = \angle OQN$

আবার, যেহেতু, OP=OQ, $\therefore$ $\triangle$POM=$\triangle$OQN

$\therefore$ QN=OM, ON=PM, OQ=OP (উপযুক্ত চিহ্ন সহ)

$$\therefore \sin(90^\circ-\theta)=\sin XOQ=\frac{QN}{OQ}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{ON}{OQ}=\frac{PM}{OP}=\sin\theta$$

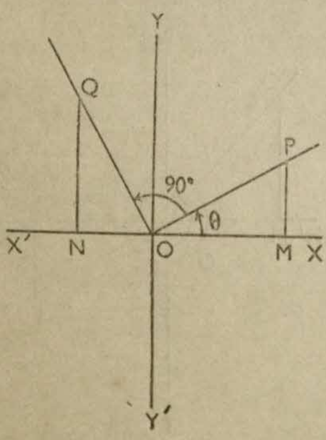
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{QN}{ON}=\frac{OM}{PM}=\cot\theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta;\quad \sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta;$$
$$\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta.$$

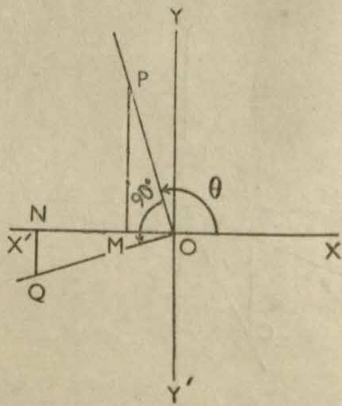
দ্রষ্টব্য : $(90^\circ-\theta)$ কোণকে θ-কোণের পূরক কোণ (complementary angle) বলে। কাজেই কোন কোণের প্রতিটি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত তার পূরক কোণের 'কো'-অনুপাতের সমান। প্রধান প্রধান কোণের অনুপাতের মানের তালিকা থেকেও এর সত্যতা যাচাই করা যায়।

2.14 $(90^\circ+\theta)$ কোণের অনুপাত

(Ratios of $90^\circ+\theta$)



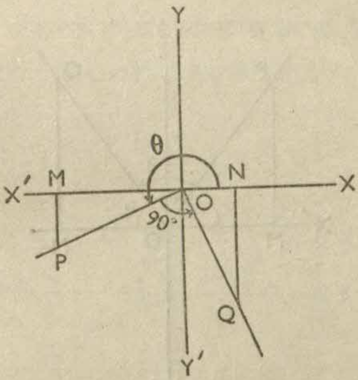
(i)



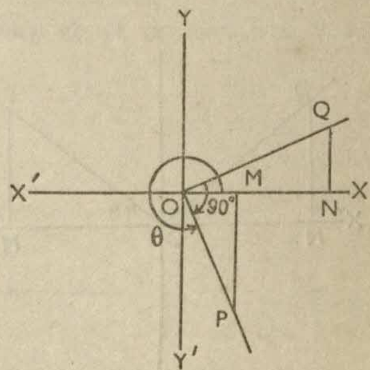
(ii)

ধর, ঘূর্ণ্যমান রেখা OP দক্ষিণাবর্তে ঘুরে $\angle$XOP=θ উৎপন্ন করল এবং পরে একই দিকে আরও ঘুরে $\angle$POQ=90° উৎপন্ন করল। $\therefore$ $\angle XOQ=90^\circ+\theta$

OP ও OQ-এর উপর যথাক্রমে P ও Q দুটি বিন্দু নাও যেন OP = OQ হয়। OX (বা OX′)-এর উপর PM ও QN লম্ব টান।



(i)



(ii)

যেহেতু OQ ⊥ OP, ∠POM = ∠OQN (∴ উভয়েই ∠QON-এর পূরক)।

∴ Δ^s OPM ও OQN সর্বসম। কাজেই, উপযুক্ত চিহ্নসহ লেখা যায় :

$$QN = OM, \quad ON = -PM, \quad OQ = OP.$$

$$\therefore \quad \sin(90^\circ + \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{OM}{-PM} = -\cot\theta$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta, \ \sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta.$$

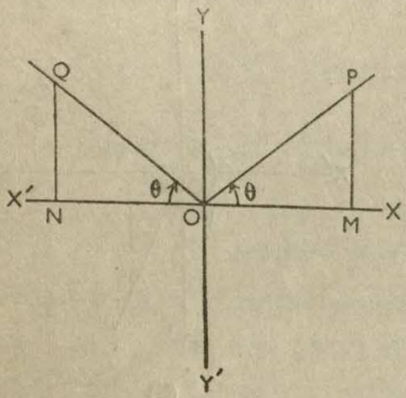
2.15 $(180^\circ - \theta)$ কোণের অনুপাত : (Ratios of $180^\circ - \theta$)

ধর, ∠XOP = Q এবং মনে কর, প্রাথমিক অবস্থান OX থেকে দক্ষিণাবর্তে ঘুরে একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা ∠XOX′ = 180° উৎপন্ন করল এবং পরে বামাবর্তে θ পরিমাণ ঘুরে চূড়ান্ত অবস্থান OQ নিল। ∴ ∠XOQ = 180° − θ.

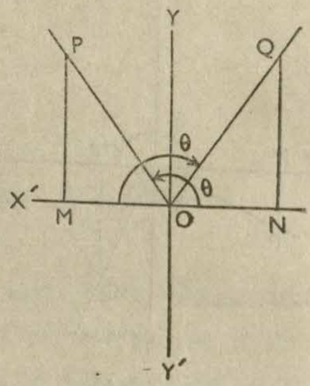
OP = OQ নাও এবং OX (বা OX′)-এর উপর PM, QN লম্ব টান। এক্ষণে, ∠POM = ∠QON (মানের দিক থেকে) এবং OP = OQ ; কাজেই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় POM ও QON সর্বসম। অতএব উপযুক্ত চিহ্ন সহ

$$QN = PM\ ; \quad ON = -OM\ ; \quad OQ = OP$$

$$\therefore \sin(180^\circ - \theta) = \sin XOQ = \frac{QN}{OQ} = \sin\theta$$



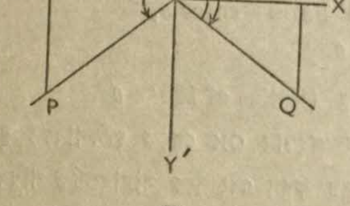
(i)



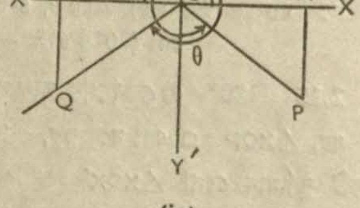
(iii)

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta$$

$$\tan(180^0 - \theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{OP}{-OM} = -\tan\theta$$



(ii)



(iv)

$$\therefore \operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta\ ; \quad \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$$

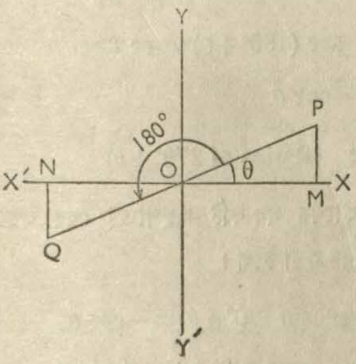
$$\cot(180^\circ - \theta) = \cot\theta$$

দ্রষ্টব্য : $(180^\circ - \theta)$ কোণকে θ-কোণের সম্পূরক (supplementary angle)

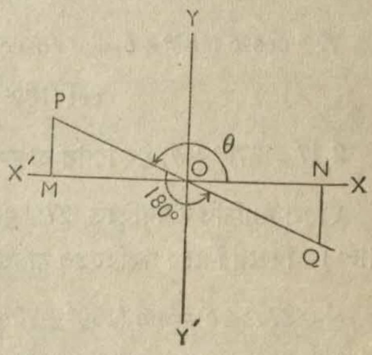
বলা হয়। কাজেই সম্পূরক কোণের sine গুলো সমান ; cosines এবং tangent সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত।

2.16 $(180° + \theta)$ কোণের অনুপাত : (Ratios of $180° + \theta$)

ধর, OP ঘূর্ণ্যমান রেখাদ্বারা উৎপন্ন $\angle XOP = \theta$ এবং ধর, OP একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 180°$ উৎপন্ন করল।



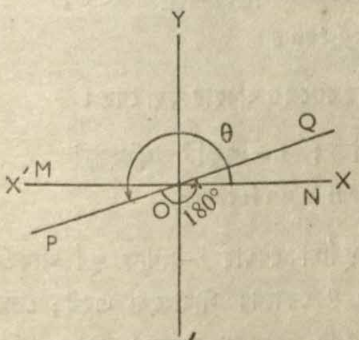
(i)



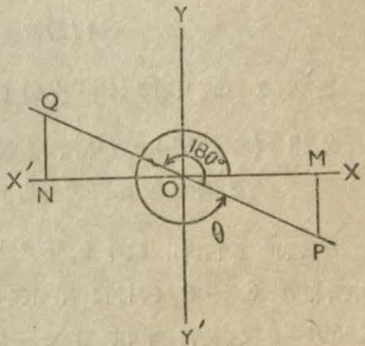
(ii)

$\therefore$ $\angle XOQ = 180° + \theta$ এবং OP ও OQ সমরৈখিক।

OP=OQ নাও এবং OX (বা OX′) এর উপর PM ও QN লম্ব টান। যেহেতু;



(iii)



(iv)

$\angle POM = \angle QON$ (মানের দিকে—যেহেতু বিপ্রতীপ) এবং OP=OQ, অতএব সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় POM ও QON সর্বসম। অতএব, উপযুক্ত চিহ্নসহ

$$QN = -PM, \quad ON = -OM, \quad OQ = OP$$

$$\therefore \quad \sin(180^\circ+\theta)=\sin XOQ=\frac{QN}{OQ}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\frac{ON}{OQ}=-\frac{OM}{OP}=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{QN}{ON}=\frac{-PM}{-ON}=\frac{PM}{OM}=\tan\theta$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}(180^\circ+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta\;;\quad \sec(180^\circ+\theta)=\sec\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\cot\theta$$

2.17 $(270^\circ\pm\theta)$ কোণের অনুপাত : (Ratios of $270^\circ\pm\theta$)

ছাত্ররা জ্যামিতিক পদ্ধতিতে $(270^\circ\pm\theta)$ কোণের সব কটি অনুপাতই বের করতে পারে। বিকল্পে নিচের পদ্ধতিতেও মানগুলো বের করা চলে।

$$\sin(270^\circ\pm\theta)=\sin(180^\circ+90^\circ\pm\theta)=-\sin(90^\circ\pm\theta)=-\cos\theta$$

$$\cos(270^\circ\pm\theta)=\cos(180^\circ+90^\circ\pm\theta)=-\cos(90^\circ\pm\theta)=\pm\sin\theta$$

$$\tan(270^\circ\pm\theta)=\frac{\sin(270^\circ\pm\theta)}{\cos(270^\circ\pm\theta)}=\frac{-\cos\theta}{\pm\sin\theta}=\pm\cot\theta$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}(270^\circ\pm\theta)=-\sec\theta\;;\quad \sec(270^\circ\pm\theta)=\pm\operatorname{cosec}\theta\;;$$

$$\cot(270^\circ\pm\theta)=\pm\tan\theta$$

দ্রষ্টব্য : এই পদ্ধতি $(180^\circ\pm\theta)$ কোণের ক্ষেত্রেও ব্যবহার করা যেত।

2.18 $(n.\,360^0\pm\theta)$ কোণের অনুপাত ; n = একটি পূর্ণসংখ্যা (Ratios of $n.360^\circ\pm\theta$, where n is an integer)

n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে $n.360^\circ$ অর্থ ঘূর্ণ্যমান রেখার n-সংখ্যক পূর্ণ আবর্তন। কাজেই $n.360^\circ+\theta$ কোণের সীমারেখা ও θ কোণের সীমারেখা একই; তেমনি $n.360^\circ-\theta$ কোণের সীমারেখা ও $-\theta$ কোণের সীমারেখা অভিন্ন। কাজেই চিহ্নে এবং মানে $n.360^\circ+\theta$ কোণের অনুপাতগুলো θ কোণের অনুরূপ অনুপাতের সমান। তেমনি $n.360^\circ-\theta$ কোণের অনুপাতগুলো, চিহ্ন এবং মানে, $-\theta$ কোণের অনুরূপ অনুপাতের সঙ্গে অভিন্ন।

$$\therefore \quad \sin(n.360^\circ-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(n.360^{0}-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(n.360^{\circ}-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

2.19 উপরের অনুচ্ছেদগুলিতে প্রকাশিত তথ্যগুলো মনে রাখার সুবিধার জন্য নিম্নে দুটি নিয়মের উল্লেখ করা হল।

I. θ যদি 90°-র যুগ্ম-গুণিতকের সঙ্গে যুক্ত থাকে (যথা $180^{\circ}\pm\theta$, $360^{\circ}\pm\theta$) তাহলে অনুপাতের আকৃতি অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ sine হয় sine, cosine হয় cosine ইত্যাদি। θ যদি 90°-এর অযুগ্ম গুণিতকের সঙ্গে যুক্ত থাকে (যথা $90^{\circ}\pm\theta$, $270^{\circ}\pm\theta$) তবে অনুপাত 'কো'—অনুপাতে পরিবর্তিত হয়। sine হয় cosine, tangent হয় cotangent ইত্যাদি।

II. চিহ্ন সংক্রান্ত নিয়ম : θ-কে সূক্ষ্ম মনে করে কোণটি কোন্ পাদে অবস্থিত ঠিক কর এবং তারপর 'সব, সাইন, ট্যান, কস' নিয়ম লাগাও।

দ্রষ্টব্য : $-\theta$ কোণকে $(0.360^{\circ}-\theta)$ এইভাবে লিখে এবং '0' কে যুগ্ম মনে করে $-\theta$ কোণের ক্ষেত্রেও উপরের নিয়ম প্রয়োগ করা যায়।

2.20 প্রথম পাদের বহির্ভূত কিছু প্রয়োজনীয় কোণের কয়েকটি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত : (Certain ratios of some important angles outside first quadrant)

$\sin 120^{\circ}=\sin 60^{\circ}=\sqrt{3}/2$ $\quad\quad$ $\cos 180^{\circ}=-\cos 0^{\circ}=-1$

$\cos 120^{\circ}=-\cos 60^{\circ}=-\frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $\tan 180^{\circ}=0$

$\sin 180^{\circ}=\sin 0^{\circ}=0$ $\quad\quad$ ইত্যাদি

2.21 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. সমস্ত ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষককে sine-এর হিসাবে প্রকাশ কর।

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta \qquad \therefore\ \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}} \qquad \therefore\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$$

$$\text{cosec}\,\theta=\frac{1}{\sin\theta}\ ;\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

উদা. 2. সমস্ত ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষককে tangent এর হিসাবে প্রকাশ কর।

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta \quad \therefore \quad \sec\theta=\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$

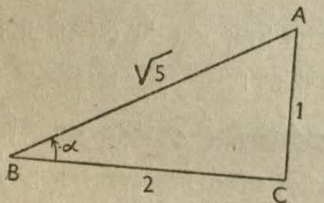
$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

$\sin\theta=\tan\theta.\cos\theta=\frac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$; $\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$.

দ্রষ্টব্য : যদি দুটি বাহু দেওয়া থাকে তবে সর্বদাই একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব। এই প্রণালীতে একটি অপেক্ষক দেওয়া থাকলে অন্যান্য অপেক্ষকগুলো সহজেই পাওয়া যায়।

উদা. 3. যদি $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ হয়, তবে $\sec\alpha$ এবং $\operatorname{cosec}\alpha$ কত ?



$\because$ $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,অতএব AC=1 একক এবং BC=2 একক নিয়ে △ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক যেন ∠ABC=α হয়।

জ্যামিতি থেকে : $AB=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\therefore \quad \sec\alpha=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ এবং $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{AB}{BC}=\sqrt{5}$

বিকল্প পদ্ধতি : যেহেতু, $\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$,

$\therefore \sec\alpha=\pm\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\pm\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}=\pm\sqrt{5}/2$

কিন্তু α সূক্ষ্মকোণ হওয়ায় $\sec\alpha=\sqrt{5}/2$

$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha\frac{1}{\sec\alpha}}=\frac{1}{\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{5}}}=\sqrt{5}$

দ্রষ্টব্য : প্রথম পদ্ধতি বিকল্প পদ্ধতির তুলনায় অনেক সহজ-সরল।

উদা. 4. দেখাও যে,

$\sin^2A\tan A+\cos^2A\cot A+2\sin A\cos A=\tan A+\cot A$

বামপক্ষ $=\sin^2 A\,\dfrac{\sin A}{\cos A}+\cos^2 A\,\dfrac{\cos A}{\sin A}+2\sin A\cos A$

$$=\frac{\sin^4 A+\cos^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2}{\sin A\cos A}=\frac{1}{\sin A\cos A}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\tan A+\cot A.$$

উদা. 5. দেখাও যে, $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sin A-\tan A$

বামপক্ষ $=\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}\cdot\dfrac{1-\sin A}{1-\sin A}}\qquad\left(\because\ \dfrac{1-\sin A}{1-\sin A}=1\right)$

$$=\frac{1-\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{1-\sin A}{\cos A}$$

$$=\sec A\tan A$$

উদা. 6. যদি $\sin A+\sin^2 A=1$ হয়, দেখাও যে, $\cos^2 A+\cos^4 A=1$

$\because\ \sin A+\sin^2 A=1,\qquad\therefore\ 1-\sin^2 A=\sin A$ বা $\cos^2 A=\sin A$

$$\therefore\ \cos^2 A+\cos^4 A=\sin A+(\cos^2 A)^2=\sin A+(\sin A)^2$$
$$=\sin A+\sin^2 A=1$$

উদা. 7. যদি $\tan\theta+\sec\theta=x$ হয়, দেখাও যে, $\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$$x=\tan\theta+\sec\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$\therefore\ x^2=\dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$; Comp. ও Div. ক'রে

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta+2\sin^2\theta}{2+2\sin\theta}=\frac{2\sin\theta\,(1+\sin\theta)}{2\,(1+\sin\theta)}=\sin\theta$$

উদা. 8. যদি $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ হয়, দেখাও যে, $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

শর্তানুসারে, $\tan\theta=\frac{a}{b}$ $\quad\therefore\quad \frac{a\sin\theta}{b\cos\theta}=\frac{a^2}{b^2}$

$\therefore\quad \frac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (Comp. ও Div ক'রে)

উদা. 9. x এবং y অসমান হলে, দেখাও যে, $\sin^2\theta=\frac{(x+y)^2}{4xy}$ অসম্ভব।

$\sin^2\theta=\frac{(x+y)^2}{4xy}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}>1$; কাজেই সমীকরণটি অসম্ভব।

উদা. 10. $\cos^2A-\sin^2A=\tan^2B$, দেখাও যে, $\cos^2B-\sin^2B=\tan^2A$

$\cos^2A-\sin^2A=\tan^2B$ (প্রদত্ত)

$\therefore\quad (1-\sin^2A)-\sin^2A=\tan^2B$

বা, $1-2\sin^2A=\tan^2B$

বা, $2\sin^2A=1-\tan^2B$

আবার, যেহেতু $\cos^2A-\sin^2A=\tan^2B$

$\therefore\quad \cos^2A-(1-\cos^2A)=\tan^2B$

বা, $2\cos^2A-1=\tan^2B$

বা, $2\cos^2A=1+\tan^2B$

$$\therefore\quad \tan^2A=\frac{2\sin^2A}{2\cos^2A}=\frac{1-\tan^2B}{1+\tan^2B}=\frac{1-\frac{\sin^2B}{\cos^2B}}{1+\frac{\sin^2B}{\cos^2B}}=\frac{\cos^2B-\sin^2B}{\cos^2B+\sin^2B}$$

$$=\cos^2B-\sin^2B$$

উদা. 11. যদি $\sin A+\cos A=m$ এবং $\sec A+\operatorname{cosec}A=n$ হয়, তবে দেখাও যে, $n(m^2-1)=2m$.

$m^2=(\sin A+\cos A)^2=\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\cos A$

$=1+2\sin A\cos A$

$\therefore\quad m^2-1=2\sin A\cos A \quad ......(1)$

কিন্তু $n=\sec A+\operatorname{cosec}A=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\frac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{m}{\sin A \cos A} \qquad ....(2)$$

$$\therefore \quad n(m^2-1)=\frac{m}{\sin A \cos A}\times 2\sin A \cos A=2m$$

উদা. 12. যদি $\tan^2\theta=1-e^2$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\sec\theta+\tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta=(2-e^2)^{\frac{3}{2}}$$

যেহেতু, $\tan^2\theta=1-e^2 \qquad \therefore \quad 1+\tan^2\theta=2-e^2$

বা, $\sec^2\theta=(2-e^2)$

$\therefore \quad \sec\theta=(2-e^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \quad \sec\theta+\tan^3\theta \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^3\theta}=\frac{1}{\cos^3\theta}=\sec^3\theta=(2-e^2)^{\frac{3}{2}}$$

উদা. 13. $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

নির্ণেয় মান $=2.\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

উদা. 14. দেখাও যে, $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{3}}=\sin\pi/3$

বামপক্ষ $=\dfrac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\dfrac{\pi}{3}$

উদা. 15. θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $4\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta-1=0$ সমীকরণটি থেকে θ-র মান নির্ণয় কর।

$$4\cos^2\theta=\sqrt{2}\cos\theta-1=0$$

এই সমীকরণটি $\cos\theta$-র দ্বিঘাত সমীকরণ। কাজেই $\cos\theta$-র মান হল :

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2.+4.4.1}}{2.4}=\frac{\sqrt{2}\pm 3\sqrt{2}}{8}$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ এবং } -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

কিন্তু θ সূক্ষ্মকোণ বলে $\cos\theta$ ঋণাত্মক হতে পারে না। কাজেই গ্রাহ্য মান হল :

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \theta=45^\circ$$

উদা. 16. নিম্নলিখিতগুলোর মান নির্ণয় কর।

(i) $\sin(540^\circ+C)$ (ii) $\text{cosec}(-210^\circ)$ (iii) $\text{cosec}(-1200^\circ)$

(i) $\sin(540^\circ+C)=\sin(360^\circ+180^\circ+C)=\sin(180^\circ+C)=-\cos C$

(ii) $\text{cosec}(-210^\circ)=-\text{cosec}\,210^\circ=-\text{cosec}(180^\circ+30^\circ)$

$$=\text{cosec}\,30^\circ=2$$

(iii) $\text{cosec}(-1200^\circ)=-\text{cosec}\,1200^\circ=-\text{cosec}(3\times360^\circ+120^\circ)$

$$=-\text{cosec}\,120^\circ=-\text{cosec}(90^\circ+30^\circ)=-\sec 30^\circ=-2/\sqrt{3}$$

উদা. 17. প্রমাণ কর যে, n যুগ্ম কি অযুগ্ম তার উপর নির্ভর করে $\sin\theta+\sin(2\pi+\theta)+\sin(2\pi+\theta)+\ldots\ldots n$ পদ পর্যন্ত রাশির মান 0 বা $\sin\theta$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\sin(3\pi+\theta)=\sin(\pi+\theta)$

$=-\sin\theta$

.... = ইত্যাদি

$\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$

$\sin(4\pi+\theta)=\sin\theta$

.... = ইত্যাদি

$\therefore$ বামপক্ষ $=\sin\theta-\sin\theta+\sin\theta-\sin\theta+\ldots\ldots n$ পদ পর্যন্ত

$=0$, যখন n যুগ্ম ; বা $\sin\theta$ (যখন n অযুগ্ম)

উদা. 18. সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ কর :

$$\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ+A)}+\frac{\cos A}{\sin(90^\circ-A)}-\frac{\tan(90^\circ+A)}{\cot A}$$

প্রদত্ত রাশি $=\frac{-\sin A}{-\sin A}+\frac{\cos A}{\cos A}+\frac{\cot A}{\cot A}=1+1+1=3.$

উদা. 19. 0° থেকে 360° সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানগুলো $\tan\theta=1$ সমীকরণ থেকে নির্ণয় কর।

যেহেতু $\tan\theta=1$ $\therefore$ $\theta=45^\circ$-ই হল সমীকরণ-সিদ্ধ সর্বনিম্ন মান।

আবার, কোণ তৃতীয় পাদে থাকলেও তার tangent ধনাত্মক হয় বলে θ-র দ্বিতীয় সম্ভাব্য মান $=180^\circ+45^\circ=225^\circ$

$$\therefore\ \theta=45^\circ,\ 225^\circ$$

উদাহরণমালা 2

প্রমাণ কর যে :

1. $\sin^2 A \cot^2 A + \cos^2 A \tan^2 A = 1$

2. $\sin A \sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A \cos A$

3. $(1+\tan^2 A)\cos^2 A = 1$

4. $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sin A} = 1$

5. $\sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

6. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^2\theta + \tan^4\theta$

7. $\frac{\sin A + \cos A}{\sec A + \operatorname{cosec} A} = \sin A \cos A$

8. $\frac{\sin A}{1+\cos A} + \frac{1+\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

9. $\tan^2 A + \cot^2 A = \frac{1 - 2\sin^2 A \cos^2 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$

10. $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\cos B - \cos A}{\sin A - \sin B}$

11. $\frac{(\operatorname{cosec}\theta + \sec\theta)^2}{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$

12. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ (পঃ বঃ মাঃ 1960)

13. $(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ (পঃ বঃ মাঃ 1956)

14. $\frac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \cot\theta$

15. $\tan^2\alpha + \sec^2\beta = \sec^2\alpha + \tan^2\beta$

16. $(1+\tan^2 A)(1-\sin^2 A) = 1$ (কঃ বিঃ)

17. $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\tan\alpha + \cot\alpha) = \sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha$ (পঃ বঃ মাঃ 1957)

18. $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$ (পঃ বঃ মাঃ 1958)

19. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

20. $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+\tan\theta$

21. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\text{cosec}\,\theta+\cot\theta$

22. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sec\theta=\sec\theta-\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

23. $\dfrac{\text{coeec A}+\cot A}{\text{cosec A}-\cot A}=\dfrac{\sin^2 A}{(1-\cos A)^2}$

24. $\cos A=5/13$ হলে, জ্যামিতিক পদ্ধতিতে cosec A, cot A-এর মান নির্ণয় কর।

25. যদি $\sin A=\dfrac{m}{n}$ হয়, প্রমাণ কর $\sqrt{n^2-m^2}\tan A=m$.

26. $\cot\theta=\dfrac{p}{q}$; $\dfrac{p\cos\theta-q\sin\theta}{p\cos\theta+q\sin\theta}$ কত?

27. $\cos A=m$, $\cot A=n$; প্রমাণ কর: $(1-m^2)(1+n^2)=1$

28. $\tan A=\dfrac{2pq}{p^2-q^2}$ হলে cos A এবং sec A এর মান নির্ণয় কর।

29. $\sec A=\dfrac{m^2+1}{2m}$; cos A এবং cosec A এর মান নির্ণয় কর।

30. $\sin\theta=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$; $\cos\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

31. $\tan\theta=\dfrac{m}{n}$; দেখাও যে, $m^2\text{cosec}^2\,\theta=m^2+n^2$

32. $\dfrac{\sin\theta}{a+b}=\dfrac{\cos\theta}{a-b}$; $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

33. $\sin\theta-\cos\theta=p$ এবং $\sec\theta-\text{cosec}\,\theta=q$; দেখাও $q(1-p^2)=2p$

34. যদি $\tan\theta+\sin\theta=m$ এবং $\tan\theta-\sin\theta=n$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$m^2-n^2=4\sqrt{mn}$$ (কঃ বিঃ 1914)

35. যদি $\sin A-\cos A=0$ হয়, দেখাও যে, $\sec A=\pm\sqrt{2}$

36. যদি $a \cos\theta + b \sin\theta = 1$ এবং $c \cos\theta + d \sin\theta = 1$ হয়,
দেখাও যে, $(a-c)^2 + (b-d)^2 = (bc - ad)^2$

37. $1 - 2 \sin\theta \cos\theta$-কে পূর্ণবর্গ রূপে প্রকাশ কর।

38. $\sin^2\theta \tan\theta + \cos^2\theta \cot\theta + 2 \sin\theta \cos\theta$-কে $\tan\theta$-র হিসাবে প্রকাশ কর।

39. $15 \sin^2\theta + 2 \cos\theta = 7$; $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

40. $7 \sin^2\theta + 3 \cos^2\theta = 4$; দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

41. যদি $1 + \sin^2\theta = 3 \sin\theta \cos\theta$ হয়, $\cot\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

42. $\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \cos\alpha$ দেখাও $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \sin\alpha$.

43. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\phi$ হলে, দেখাও যে, $\cos^2\phi - \sin^2\phi = \tan^2\theta$.

44. $a \cos\theta - b \sin\theta = c$ হলে, দেখাও যে,
$$a \sin\theta + b \cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

45. $\tan\theta = 2$ হলে, $\sin\theta - \cos\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

46. x এবং y দুটি অসমান প্রকৃত রাশি; দেখাও $\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ অসম্ভব।

47. $x = y$ হলে, দেখাও যে, $\sec^2\theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ সম্ভব। তখন θ-র মান কত?

প্রমাণ কর যে,

48. $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

49. $\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} - \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

50. $\frac{1}{\sec A - \tan A} - \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sec A + \tan A}$

51. $\cos\theta + \frac{\tan\theta \cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \sec\theta$

52. $\frac{\tan\alpha}{(1 + \tan^2\alpha)^2} + \frac{\cot\alpha}{(1 + \cot^2\alpha)^2} = \sin\alpha \cos\alpha$

53. $\left(\frac{1 - \tan\theta}{1 - \cot\theta}\right)^2 = \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \cot^2\theta}$ (পঃ বঃ মাঃ 1956)

54. $(\cos A \cos B - \sin A \sin B)^2 + (\sin A \cos B + \cos A \sin B)^2 = 1$

55. $\dfrac{1+2\sin A\cos A}{\sin A+\cos A} + \dfrac{1-2\sin A\cos A}{\cos A-\sin A} = 2\cos A$

56. $\dfrac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha} = \dfrac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$

57. $\tan^2 A = 1 + 2\tan^2 B$ হলে, দেখাও যে $\cos^2 B = 2\cos^2 A$

58. $\tan\theta = \dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ হলে, দেখাও যে $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\alpha - \cos\alpha$

59. যদি $x\sin^3\alpha + y\cos^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$ এবং
$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$ হয়, দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 1$

60. প্রমাণ কর যে, $(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A) = (2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$

61. নিচের রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 60^\circ$

(ii) $2\operatorname{cosec}^2 45^\circ + \cot 60^\circ . \tan 30^\circ$

(iii) $\tan^2 45^\circ \sin 60^\circ \tan 30^\circ \tan^2 60^\circ$

(iv) $2\cot 45^\circ + \cos^3 60^\circ - 2\sin^4 60^\circ + \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ$

(v) $\dfrac{2\tan^2 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ} + (\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ)$ (গৌহাটি, 1950)

62. নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে x-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $x \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \dfrac{\cot^2 30^\circ \sec 60^\circ \tan 45^\circ}{\operatorname{cosec}^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ}$

(ii) $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \dfrac{\tan^2 45^\circ \sec 60^\circ}{\cot^3 45^\circ}$

63. সমাধান কর : (θ ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ)

(i) $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$ (ii) $2\cos\theta = \cot\theta$

(iii) $6\cos^2\theta - 1 = \cos\theta$

(iv) $3\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta + 1 = 3\sec\theta + \sqrt{3}\tan\theta$

(v) $\sec\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta = 2 + \sqrt{2}$

64. $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ = কত ? (পঃ বঃ মাঃ 1957)

65. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$ হলে,

$\dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ = কত ? (পঃ বঃ মাঃ 1958)

66. $A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$; দেখাও যে, $\cos A = \cos^2 B - \sin^2 B$

67. মান নির্ণয় কর :

$\sin(-870^\circ)$, $\tan(-855^\circ)$, $\cos(960^\circ)$, $\operatorname{cosec}(-660^\circ)$, $\cot(840^\circ)$
$\sin(930^\circ)$, $\sin 11\pi/4$, $\tan 16\pi/3$, $\sec(3\pi/2 + \pi/4)$

68. $\alpha = 11\pi/4$ হলে, $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\tan\alpha - \sec^2\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

69. সরল কর : (i) $\dfrac{\sin(180^\circ-\theta)}{\tan(180^\circ+\theta)} \cdot \dfrac{\cot(90^\circ-\theta)}{\tan(90^\circ+\theta)} \cdot \dfrac{\cos(360^\circ-\theta)}{\sin(-\theta)}$

(ii) $\dfrac{\operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)}{\sec(180^\circ+\theta)} \cdot \dfrac{\cos(-\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}$

70. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^2 \pi/4 + \sin^2 3\pi/4 + \sin^2 5\pi/4 + \sin^2 7\pi/4$

(ii) $\cos^2 \pi/8 + \cos^2 3\pi/8 + \cos^2 5\pi/8 + \cos^2 7\pi/8$

(iii) $\cos\alpha + \cos(\pi+\alpha) + \cos(2\pi+\alpha) + \ldots\ldots n$-তম পদ পর্যন্ত

(iv) $\tan\dfrac{\pi}{20} \tan\dfrac{3\pi}{20} . \tan\dfrac{5\pi}{20} . \tan\dfrac{7\pi}{20} . \tan\dfrac{9\pi}{20}$.

71. 0° থেকে 360° সীমার মধ্যে θ নির্ণয় কর :

(i) $6\sin^2\theta - 5\sin\theta - 1 = 0$ (iv) 3 (sec

(ii) $8\sin^2\theta + 6\cos\theta - 9 = 0$ (v) 2 (cos

(iii) $4\sin^2\theta + 3\operatorname{cosec}^2\theta = 7$ (vi) cot θ − tan

72. A, B, C একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ, দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B) - \cos C = \cos(A+B) + \sin C$

(ii) $\tan(B+C) + \tan(C+A) + \tan(A+B) = \tan(\pi - A) + \tan(2\pi - B) + \tan(3\pi - C)$

73. A, B, C, D যদি কোন চতুর্ভুজের চারটি কোণ হয়, তবে দেখাও যে,

$\cos\dfrac{A+C}{2} + \cos\dfrac{B+D}{2} = 0$

74. যদি 73 নং প্রশ্নের চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হয়, তবে দেখাও যে, $\Sigma\cos A = 0$.

3 যোগ ও বিয়োগ সূত্রাবলী

তৃতীয় অধ্যায় (ADDITION-SUBTRACTION FORMULAE)

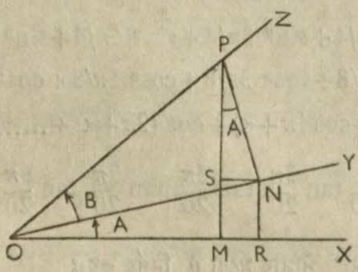
3.1. দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$.

ধর, $\angle XOY = A$ এবং $\angle YOZ=B$; A ও B উভয়েই ধনাত্মক। $\therefore \angle XOZ=A+B$.

(A+B) কোণের প্রান্তরেখা OZ-এর উপর যে কোন বিন্দু P নাও। P থেকে OX ও OY-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান। আবার N থেকে OX ও PM-এর উপর যথাক্রমে NR ও NS লম্ব টান।



সংজ্ঞানুসারে, $\sin(A+B)=\frac{PM}{OP}=\frac{PS+SM}{OP}=\frac{PS+NR}{OP}=\frac{NR}{OP}+\frac{PS}{OP}$

$$=\frac{NR}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PS}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$=\sin A\cos B+\cos SPN\sin A$

কিন্তু, $\angle SPN=90-\angle SNP=\angle SNO=\angle NOR=A$

$\therefore \sin(A+B)=\sin B\cos B+\cos A\sin B$ ....(1)

অনুরূপভাবে, $\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{OR-MR}{OP}=\frac{OR-SN}{OP}=\frac{OR}{OP}-\frac{SN}{OP}$

$$=\frac{OR}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{SN}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$=\cos A\cos B-\sin SPN.\sin B$

কিন্তু, $\angle SPN = A$; অতএব

$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ....(2)

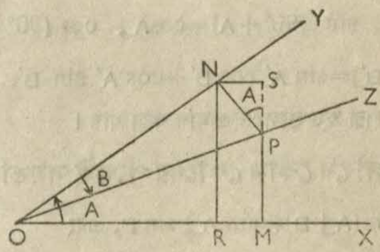
3.2 দেখাও যে,

(i) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(ii) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ধর, $\angle XOY = A$ and $\angle YOZ = B$; A একটি ধনাত্মক কোণ, B ঋণাত্মক কোণ এবং $A > B$; $\therefore \angle XOZ = (A-B)$

$(A-B)$ কোণের প্রান্তরেখা OZ-এর উপর যে কোন একটি বিন্দু P নাও ; P থেকে OX ও OY-এর উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান। আবার N থেকে OX ও MP (বর্ধিত)-এর উপর NR ও NS লম্ব টান।



সংজ্ঞানুসারে, $\sin(A-B) = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{SM - SP}{OP} = \dfrac{NR - SP}{OP} = \dfrac{NR}{OP} - \dfrac{SP}{OP}$

$$= \frac{NR}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{SP}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$= \sin A \cos B - \cos SPN \sin B$

কিন্তু, $\angle SPN = 90° - \angle PNS = \angle SPN = \angle YOX = A$.

$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.........(3)

অনুরূপভাবে, $\cos(A-B) = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OR + RM}{OP} = \dfrac{OR + NS}{OP} = \dfrac{OR}{OP} + \dfrac{NS}{OP}$

$$= \frac{OR}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{NS}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$= \cos A \cos B + \sin SPN \sin B$

কিন্তু, $\angle SPN = A$. অতএব,

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.........(4)

দ্রষ্টব্য : $\sin(A \pm B)$ এবং $\cos(A \pm B)$ সূত্রগুলো সাধারণতঃ 'যোগ ও বিয়োগের সূত্র' বলে পরিচিত।

উপরের প্রমাণে A, B, A+B সকলেই 90°-এর চেয়ে ছোট এবং A−B ধনাত্মক। চিত্রগুলোর সামান্য পরিবর্তন ঘটিয়ে দেখানো যায় যে, সূত্রগুলো যে কোন মানের কোণের পক্ষেই সত্যি।

ধর, A এবং B দুটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ, $A+B<90^\circ$। এখন ধর, $A'=90^\circ+A$ এবং $B'=B$

$\therefore\ \sin(A'+B')=\sin\{(90^\circ+A)+B\}=\sin(90^\circ+\overline{A+B})$

$=\cos(A+B)$

$=\cos A\cos B-\sin A.\sin B$ (প্রথম অনুচ্ছেদ)

$=\sin(90^\circ+A)\cos B+\cos(90^\circ+A)\sin B$

$[\because\ \sin(90^\circ+A)=\cos A,\ \cos(90^\circ+A)=-\sin A]$

$\therefore\ \sin(A'+B')=\sin A'\cos B'+\cos A'\sin B'.$

অনুরূপভাবে, অন্যান্য সূত্রগুলোও প্রমাণ করা যায়।

কাজেই সূত্রগুলো যে কোন কোণের পক্ষেই সমভাবে প্রযোজ্য।

সাবধান! $\sin(A\pm B)\neq\sin A\pm\sin B$, এবং

$\cos(A\pm B)\neq\cos A\pm\cos B$, ইত্যাদি।

কেননা 'সাইন', 'কস' এরা সংখ্যা নয় এবং শুধু 'সাইন' বা শুধু 'কস' অর্থহীন। এদের সঙ্গে কোন কোণ যুক্ত হলে তবে অর্থবহ হয়।

3.3 sin 75°, cos 75°, sin 15°, cos 15°-এর মান

$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \sin 15^\circ=\cos(90^\circ-15^\circ)=\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\sin 15°$ অবশ্য $\sin(45°-30°)$ ধরেও বের করা যেত। তেমনি $\cos 15°$ বের করা যেত $\cos(45°-30°)$ থেকে।

3.4 প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\cos^2 A$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

(i) বামপক্ষ$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$$

$$=\sin^2 A-\sin^2 B=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$$

$$=\cos^2 B-\cos^2 A$$

(ii) বামপক্ষ$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$$

$$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-\sin^2 B(1-\cos^2 A)$$

$$=\cos^2 A-\sin^2 B=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)$$

$$=\cos^2 B-\sin^2 A$$

3.5 প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(i) $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}}$$ ($\cos A\cos B$ দিয়ে লব ও হরকে ভাগ ক'রে)

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

(ii) অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.

3.6. প্রমাণ কর যে,

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$; (ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$

(i) $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

$=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ ($\sin A\sin B$ দিয়ে লব ও হরকে ভাগ ক'রে)

(ii) অনুরূপে দেখান যায় যে,

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

3.7 $\tan 75^\circ$ এবং $\tan 15^\circ$-এর মান

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1-1/\sqrt{3}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

দ্রষ্টব্য : $\tan 75^\circ=\sin 75^\circ/\cos 75^\circ$ ইত্যাদি ধরেও করা যেত।

3.8 দেখাও যে,

(i) $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$; (ii) $\tan(45^\circ-A)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$.

(i) $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan A}{1-\tan 45^\circ.\tan A}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

$\tan(45^\circ-A)=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan A}{1+\tan 45^\circ\tan A}=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

3.9 (i) sin (A + B + C) (ii) cos (A + B + C) এবং

(iii) tan (A + B + C) সূত্র

(i) $\sin(A+B+C) = \sin(\overline{A+B}+C)$

$= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C$

$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\cos C$
$\quad + (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\sin C$

$= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C$
$\quad + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C$

$\therefore\ \sin(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C(\tan A + \tan B + \tan C$
$\quad - \tan A\tan B\tan C)$

(ii) $\cos(A+B+C) = \cos(\overline{A+B}+C)$

$= \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C$

$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)\cos C$
$\quad - (\sin A\cos B + \cos A\sin B)\sin C$

$= \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C$
$\quad - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C$

$\therefore\ \cos(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C(1 - \tan A\tan B - \tan C\tan A - \tan B\tan C)$

(iii) $\tan(A+B+C) = \tan(\overline{A+B}+C)$

$$= \frac{\tan(A+B) + \tan C}{1 - \tan(A+B).\tan C}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B} + \tan C}{1 - \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}.\tan C}$$

$$\therefore\ \tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\tan(A+B+C) = \sin(A+B+C)/\cos(A+B+C)$ ধরেও করা যায়।

3.10 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. A ও B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $\cos A=3/5$ ও $\sin B=5/13$; $\cos(A-B)$ এবং $\sin(A+B)$-এর মান নির্ণয় কর।

$\because \cos A=3/5, \quad \therefore \sin A=\sqrt{1-(3/5)^2}=4/5$

$\because \sin B=5/13, \quad \therefore \cos B=\sqrt{1-(5/13)^2}=12/13$

$\therefore \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{36+20}{65}=\frac{56}{65}$$

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{48+15}{65}=\frac{63}{65}$$

উদা 2. দেখাও যে, $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$$

উদা 3. দেখাও যে, $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)}{(\cos A\cos B-\sin A\sin B)}\cdot\frac{(\sin A\cos B-\cos A\sin B)}{(\cos A\cos B+\sin A\sin B)}$$

$$=\frac{\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B}$$

$$=\frac{\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B}{\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$$

উদা. 4. $A+B+C=\pi$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$; দেখাও যে, $\tan A=\tan B+\tan C$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin(\pi-\overline{B+C})}{\cos B\cos C}$$ ($\because \pi=A+B+C$ এবং $\cos A=\cos B\cos C$)

$$=\frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C}=\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B.\cos C}$$

$$=\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}=\tan B+\tan C$$

উদা. 5. দেখাও যে, $\frac{\cos 8^\circ+\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ-\sin 8^\circ}=\tan 53^\circ$

$$\tan 53^\circ=\tan(45^\circ+8^\circ)=\frac{1+\tan 8^\circ}{1-\tan 8^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ}}{1-\frac{\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ}}=\frac{\cos 8^\circ+\sin 8^\circ}{\cos 8^\circ-\sin 8^\circ}$$

উদা 6. θ-কোণকে α এবং β এই দুই অংশে এমনভাবে ভাগ করা হল যে, $\tan\alpha:\tan\beta=x:y$; দেখাও যে,

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{x+y}\sin\theta$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\therefore\ \frac{x-y}{x+y}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\theta}\ (\because\ \alpha+\beta=\theta)$$

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{x+y}.\ \sin\theta$$

উদাহরণমালা 3

1. $\sin\alpha=\frac{1}{8}$, $\cos\beta=\frac{1}{8}$; α এবং β ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে $\cos(\alpha+\beta)$ -এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $\sec A=17/8$ এবং $\operatorname{cosec} B=5/4$ হয়, তবে $\sec(A+B)$ কত ?

3. প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=\cot B-\cot A$

4. দেখাও যে, $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\cot\alpha\cot\beta+1$

5. দেখাও যে, $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=0$

6. প্রমাণ কর যে :

(i) $\sin(A+2B)\cos A+\cos(A+2B)\sin A-\sin(2A+2B)=0$

(ii) $\sin A\cos(B+C)-\sin B\cos(C+A)-\sin(A-B)\cos C=0$

(iii) $\sin px.\cos(p-1)x-\cos px.\sin(p-1)x=\sin x$

7. দেখাও যে, $\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta=\sin 4\theta\cos\theta-\cos 4\theta\sin\theta$

8. দেখাও যে, $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A$

9. দেখাও যে, $\tan^2 A-\tan^2 B=\frac{\sin(A+B\sin)(A-B)}{\cos^2 A\cos^2 B}$

10. নিম্নলিখিত অভেদগুলো প্রমাণ কর :

(i) $\frac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\frac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}=0$

(ii) $\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0$

(iii) $\frac{\tan A-\tan(A-B)}{1+\tan A+\tan(A-B)}=\tan B$

(iv) $1+\tan\alpha\tan 2\alpha=\sec 2\alpha$

(v) $\tan(45^0+A)=\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$

(vi) $\frac{1+\sin 2\theta}{1-\sin 2\theta}=\tan^2(\pi/4+\theta)$

(vii) $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\frac{\sin 2A}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

(viii) $\sec(x+y)=\frac{\sec x\sec y}{1-\tan x\tan y}$

প্রমাণ কর যে,

11. $\frac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}=\sin 2A$

12. $\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$

13. $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A$

14. $\dfrac{1}{\tan 3A - \tan A} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A$

15. $\dfrac{1}{\tan 3\theta + \tan \theta} - \dfrac{1}{\cot 3\theta + \cot\theta} = \cot 4\theta$

16. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A . \tan 2A . \tan A$

17. $\dfrac{\cos 13^\circ + \sin 13^\circ}{\cos 13^\circ - \sin 13^\circ} = \tan 58^\circ$

18. যদি $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ হয়, দেখাও যে,

$$1 + \cot \alpha \tan \beta = 0$$

19. যদি $m \cos (x+\theta) = n \cos (x-\theta)$; হয় তবে দেখাও যে,

$$(m+n) \tan x = (m-n) \cot \theta$$

20. $A+B+C=\pi$, $\cos A = \cos B \cos C$; দেখাও যে, $2 \cot B \cot C = 1$

21. $\cos (\beta-\gamma) + \cos (\gamma-\alpha) + \cos (\alpha-\beta) = -3/2$ হলে, দেখাও যে, $(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 = 0$ এবং ঐভাবে প্রমাণ কর যে, $\Sigma \sin \alpha = 0$ এবং $\Sigma \cos \alpha = 0$.

22. $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta + \cos^3 \beta$ এবং $\sqrt{2} \sin \alpha = \sin \beta - \sin^3 \beta$ হলে প্রমাণ কর যে, $\sin (\alpha-\beta) = \pm 1/3$

23. যদি $\tan (\alpha-\beta) / \tan \alpha + \sin^2 y / \sin^2 \alpha = 1$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan \alpha \tan \beta = \tan y.$$

4 চতুর্থ অধ্যায়

ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সমষ্টি ও গুণফলের পারস্পরিক রূপান্তর (TRANSFORMATION OF PRODUCTS & SUMS OF TRIGONOMETRIC RATIOS)

4.1 গুণফলকে যোগ বা বিয়োগফলে পরিবর্তন (Transformation of products into sums & differences)

যোগের সূত্র থেকে

$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin (A+B)$ ... ...(1)

$\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin (A-B)$ ... ...(2)

আবার, $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B)$ ... ...(3)

$\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos (A-B)$ ... ...(4)

(1)+(2) করে : $\mathbf{2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)}$ ...(5)

(1)−(2) করে : $\mathbf{2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)}$ ...(6)

(3)+(4) করে : $\mathbf{2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)}$ ...(7)

(3)−(4) করে : $\mathbf{2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)}$ ...(8)

কাজেই এই সূত্রগুলো থেকে আমরা

(i) sine এবং cosine এর গুণফলকে দুটি sine-এর সমষ্টি এবং অন্তররূপে

(ii) দুটি cosine-এর গুণফলকে দুটি cosine-এর সমষ্টিরূপে এবং

(iii) দুটি sine-এর গুণফলকে দুটি cosine-এর অন্তররূপে প্রকাশ করতে পারি।

দ্রষ্টব্য : মনে রাখার সুবিধার জন্য লক্ষ্য কর :

$2 \sin A \cos B = \sin (\text{sum}) + \sin (\text{diff.})$

$2 \cos A \sin B = \sin (\text{sum}) - \sin (\text{diff.})$

$2 \cos A \cos B = \cos (\text{sum}) + \cos (\text{diff.})$

$2 \sin A \sin B = \cos (\text{diff.}) - \cos (\text{sum})$

লক্ষ্য কর যে, শেষ সূত্রটিতে 'diff.' আগে বসছে, 'sum' তার পরে বসছে।

4.2 সমষ্টি ও অন্তরফলকে গুণফলে পরিবর্তন

(Transformation of sums & differences into products)

ধর, $A+B=C$ এবং $A-B=D$ $\therefore$ $A=\frac{C+D}{2}$, $B=\frac{C-D}{2}$;

A ও B-এর এই মান পূর্ব অনুচ্ছেদের সূত্রাবলীতে বসিয়ে

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad ...(9)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad ...(10)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad ...(11)$$

$$\cos C-\cos D=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad ...(12)$$

দ্রষ্টব্য : ত্রিকোণমিতিতে এই চারিটি সূত্র বিশেষ প্রয়োজনীয় এবং সর্বদা স্মরণ রাখা কর্তব্য। মনে রাখার সুবিধার জন্য নিম্নোক্তভাবে সূত্রগুলো লেখা হল :

দুই সাইনের সমষ্টি $=2$ সাইন ($\frac{1}{2}$ যোগফল) কস ($\frac{1}{2}$ অন্তর)

দুই সাইনের অন্তর $=2$ কস ($\frac{1}{2}$ যোগফল) সাইন ($\frac{1}{2}$ অন্তর)

দুই কসের সমষ্টি $=2$ কস ($\frac{1}{2}$ যোগফল) কস ($\frac{1}{2}$ অন্তর)

দুই কসের অন্তর $=2$ সাইন ($\frac{1}{2}$ যোগফল) সাইন ($\frac{1}{2}$ অন্তর, উল্টো)

4.3. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. দেখাও যে, $\sin 5\theta+\sin 2\theta-\sin\theta=\sin 2\theta\,(2\cos 3\theta+1)$

বামপক্ষ $=(\sin 5\theta-\sin\theta)+\sin 2\theta$

$=2\cos 3\theta.\sin 2\theta+\sin 2\theta$

$=\sin 2\theta\,(2\cos 3\theta+1)$

উদা. 2. দেখাও যে, $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

(বেনারস, 1951)

বামপক্ষ $= \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \quad (\because \cos 60^\circ = 1/2)$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (2 \cos 40^\circ \cos 80^\circ)$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$

$= \frac{1}{4} \cos 20^\circ (-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ) \quad (\because \cos 120^\circ = -\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{8} (2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ)$

$= \frac{1}{8} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ)$

$= \frac{1}{8} \cos 60^\circ = \frac{1}{16} \quad (\quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$

উদা. 3. দেখাও যে, $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$

বামপক্ষ $= \cos 20^\circ + (\cos 100^\circ + \cos 140^\circ)$

$= \cos 20^\circ + 2 \cos 120^\circ . \cos 20^\circ$

$= \cos 20^\circ + 2(-\frac{1}{2}) \cos 20^\circ$

$= \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0$

উদা. 4. দেখাও যে, $\dfrac{\sin 7A - \sin 3A - \sin 5A + \sin A}{\cos 7A + \cos 3A - \cos 5A - \cos A} = \tan 2A$

বামপক্ষ $= \dfrac{(\sin 7A + \sin A) - (\sin 5A + \sin 3A)}{(\cos 7A - \cos A) - (\cos 5A - \cos 3A)}$

$= \dfrac{2 \sin 4A \cos 3A - 2 \sin 4A \cos A}{2 \sin 4A \sin (-3A) - 2 \sin 4A \sin (-A)}$

$= \dfrac{2 \sin 4A (\cos 3A - \cos A)}{2 \sin 4A (\sin A - \sin 3A)}$

$= \dfrac{2 \sin 2A \sin (-A)}{2 \cos 2A \sin (-A)} = \tan 2A$

উদা. 5. $4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$-কে চারিটি cosine পদের যোগফল রূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশি $= 2 \cos \alpha \{\cos (\beta + \gamma) + \cos (\beta - \gamma)\}$

$= 2 \cos \alpha \cos (\beta + \gamma) + 2 \cos \alpha \cos (\beta - \gamma)$

$= \cos (\alpha + \beta + \gamma) + \cos (\alpha - \beta - \gamma) + \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

$+ \cos (\alpha - \beta + \gamma)$

উদা. 6. যদি $\sin x = k \sin y$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}$$

শর্তানুসারে, $\frac{\sin x}{\sin y} = k$

$$\therefore \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{k-1}{k+1}$$

বা, $\frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{k-1}{k+1}$

বা, $\cot \frac{x+y}{2} \tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1}$

বা, $\tan \frac{x-y}{2} = \frac{k-1}{k+1} \tan \frac{x+y}{2}$

উদা. 7. দেখাও যে, $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 8x . \sin 2x$

বামপক্ষ $= \sin (5x+3x) \sin (5x-3x)$

$= \sin 8x . \sin 2x$ (অনুচ্ছেদ 5.4 দেখ)

উদা. 8. $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$ হলে দেখাও যে,

$$\tan A \tan B = \cot \frac{A+B}{2}$$ (পাটনা, 1936)

শর্তানুসারে, $\sec A - \sec B = \operatorname{cosec} B - \operatorname{cosec} A$

বা, $\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\cos B} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin A}$

বা, $\frac{\cos B - \cos A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A \sin B}$

বা, $\frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\cos A \cos B} = \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}}{\sin A \sin B}$

বা, $\dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} = \dfrac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$

বা, $\tan A \tan B = \cot \dfrac{A+B}{2}$

উদাহরণমালা 4

দেখাও যে,

1. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \dfrac{A+B}{2}$ (আগ্রা, 1955)

2. $\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = 4 \sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \alpha \cos \dfrac{3\alpha}{2}$

3. $\sin A + 2 \sin 3A + \sin 5A = 4 \sin 3A \cos^2 A$

4. $\dfrac{\sin 5A - \sin 3A}{\cos 5A + \cos 3A} = \tan A$

5. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + \cos 5\alpha + \cos \alpha} = \tan 2\alpha$

6. $\dfrac{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos \theta}{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin \theta} = \cot 2\theta$

7. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

8. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ (পাটনা, 1942)

9. $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ = 0$

10. $\sin 78^\circ - \sin 18^\circ + \cos 132^\circ = 0$

11. $\sin^2 5\theta - \sin^2 2\theta = \sin 7A \sin 3A$

12. $\dfrac{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ} = \tan 54^\circ$ ($\sin \theta = \cos \overline{90 - \theta}$ ব্যবহার কর)

13. $\dfrac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ} = \cot 20^\circ$

14. $\dfrac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \tan 35^\circ$

15. $\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha + \beta - \gamma)$
$+ \sin(\alpha - \beta + \gamma) = 4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$

16. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$
$-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

17. $\cos(\beta+\gamma-\alpha)-\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$
$-\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

18. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$
$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

19. $\cos A-\cos(60^\circ+A)-\cos(60^\circ-A)=0$

20. $\sin A+\sin(60^\circ-A)-\sin(60^\circ+A)=0$

21. $\tan\frac{A+B}{2}+\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin A}{\cos A+\cos B}$

22. যদি $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}$, দেখাও যে, $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$

23. $x\cos A+y\sin A=k=x\cos B+y\sin B$ হলে, তবে দেখাও যে,

$$\frac{\alpha}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{y}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{k}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

24. যদি, $\sin\theta+\sin\phi=a$ এবং $\cos\theta+\cos\phi=b$ হয়, তবে দেখাও যে;

(i) $\cos\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$,

(ii) $\cos\frac{\theta+\phi}{2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, এবং

(iii) $\tan\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

25. যদি $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{a}{b}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$a\tan x+b\tan y=(a+b)\tan\frac{x+y}{2}$$

26. $A+B=90^\circ$ হলে, দেখাও যে, $\cos A\cos B$ এর সর্বোচ্চ মান $=\frac{1}{2}$.

27. দেখাও যে, n জোড়-সংখ্যা হলে

$$\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n=2\cot^n\frac{A-B}{2}$$

কিন্তু n বিজোড়-সংখ্যা হলে রাশিটির মান শূন্য। (পাটনা, 1933)

5 গুণিতক কোণ এবং অংশ কোণ

পঞ্চম অধ্যায় (MULTIPLE & SUB-MULTIPLE ANGLES)

5-1 যদি A একটি কোণ সূচিত করে তবে 2A, 3A, ইত্যাদি কোণকে A-এর গুণিতক কোণ (Multiple angles) এবং A/2, A/3 ইত্যাদি কোণকে A-এর অংশ কোণ (Sub-multiple angles) বলে।

5-2. 2A-কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত

(Trigonometrical ratios of angle 2A)

$$\sin 2A=\sin (A+A)=\sin A \cos A+\sin A \cos A$$
$$=2 \sin A \cos A \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\cos 2A=\cos (A+A)=\cos A \cos A-\sin A \sin A$$
$$=\cos^2 A-\sin^2 A \quad \ldots\ldots (2)$$
$$=2 \cos^2 A-1 \quad \ldots\ldots (3)$$
$$=1-2 \sin^2 A \quad \ldots\ldots (4)$$

(3) ও (4) থেকে পক্ষান্তর ক'রে

$$1+\cos 2A=2 \cos^2 A \quad \ldots\ldots (5)$$
$$1-\cos 2A=2 \sin^2 A \quad \ldots\ldots (6)$$

(6)-কে (5) দিয়ে ভাগ করে

$$\tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} \quad \ldots\ldots (7)$$

$$\tan 2A=\tan (A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A.\tan A}$$

$$=\frac{2 \tan A}{1-\tan^2 A} \quad \ldots\ldots (8)$$

5·3 দেখাও যে,

(i) $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$, (ii) $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $1 \pm \sin 2A = (\cos A \pm \sin A)^2$

(i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A$

$= 2\tan A\cos^2 A = 2\tan A/\sec^2 A$

$= \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ ......(9)

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A\,(1-\tan^2 A) = (1-\tan^2 A)/\sec^2 A$

$= \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ......(10)

(iii) $1 \pm \sin 2A = (\cos^2 A + \sin^2 A) \pm 2\sin A\cos A$

$= (\cos A \pm \sin A)^2$ ......(11)

5·4 3A কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometrical ratios of angle 3A)

$\sin 3A = \sin(2A + A)$

$= \sin 2A\cos A + \cos 2A.\sin A$

$= 2\sin A\cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$

$= 2\sin A\,(1-\sin^2 A + (1-2\sin^2 A)\sin A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$ ......(12)

$\cos 3A = \cos(2A + A)$

$= \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A\cos A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2(1-\cos^2 A)\cos A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$ ......(13)

$\tan 3A = \tan(2A + A)$

$= \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A}$

$$=\frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A} \quad \text{......(14)}$$

দ্রষ্টব্য : উপরের সূত্রগুলো A-র যে কোন মানের পক্ষেই সত্য।

5-5 উপরের সূত্রগুলোতে যদি আমরা যথাক্রমে $A=\theta/2$ এবং $\theta/3$ বসাই তা হলে অংশ কোণের জন্য নিচের সূত্রগুলো সহজেই পাই।

(i) $\sin\theta=2\sin\theta/2\cos\theta/2$ (ii) $\cos\theta=\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2$
$=2\cos^2\theta/2-1$
$=1-2\sin^2\theta/2$

(iii) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\theta/2$

(iv) $\tan\theta=\frac{2\tan\theta/2}{1-\tan^2\theta/2}$ (v) $\sin\theta=\frac{2\tan\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$

(vi) $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}$ (vii) $\sin\theta=3\sin\theta/3-4\sin^3\theta/3$

(viii) $\cos\theta=4\cos^3\theta/3-3\cos^3\theta/3$

(ix) $\tan\theta=\frac{3\tan\theta/3-\tan^3\theta/3}{1-3\tan^2\theta/3}$

5.6 $\cos\theta$ দেওয়া আছে ; $\sin\theta/2$ এবং $\cos\theta/2$ নির্ণয়।
(Given $\cos\theta$, to find $\sin\theta/2$ and $\cos\theta/2$)

যেহেতু, $\cos\theta=2\cos^2\theta/2-1=1-2\sin^2\theta/2$

$\therefore\ \sin\theta/2=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$

এবং $\cos\theta/2=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$ ....(15)

$\therefore$ $\cos\theta$-এর একটি মানের জন্য $\sin\theta/2$ এবং $\cos\theta/2$-এর দুটি মান রয়েছে।

দুটি মানের অস্তিত্বের ব্যাখ্যা এইরূপ : $\cos\theta$ দেওয়া থাকলে এবং θ সম্পর্কে কিছু জানা না থাকলে, θ-র এবং কাজেই $\theta/2$-র একাধিক সাধারণ মান রয়েছে। কাজেই $\theta/2$ কোণটি যে কোন পাদে থাকতে পারে এবং সেই অনুসারে $\sin\theta/2$, $\cos\theta/2$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হয়। θ কোন্ পাদে অবস্থিত তা জানা গেলে অবশ্য চিহ্নসংক্রান্ত দ্ব্যর্থকতা দূর হয়।

5·7 sin θ দেওয়া আছে, sin $\theta/2$ এবং **cos $\theta/2$** নির্ণয়।

(Given sin θ, to find sin $\theta/2$ and cos $\theta/2$)

আমরা জানি : $\sin^2 \theta/2+\cos^2 \theta/2=1$

এবং $2\sin\theta/2 \cos\theta/2=\sin\theta$

যোগ ক'রে $(\sin\theta/2+\cos\theta/2)^2=1+\sin\theta$

বিয়োগ ক'রে $(\sin\theta/2-\cos\theta/2)^2=1-\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta/2+\cos\theta/2=\pm\sqrt{1+\sin\theta}$, এবং

$\sin\theta/2-\cos\theta/2=\pm\sqrt{1-\sin\theta}$

$$\therefore\ \sin\theta/2=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta}$$
$$\cos\theta/2=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\sin\theta}\ \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\sin\theta} \quad \text{......(16)}$$

যেহেতু দুটি $\sqrt{}$-চিহ্নের আগে $\pm$ চিহ্ন রয়েছে, কাজেই sin θ-এর একটি মানের জন্য sin $\theta/2$ এবং cos $\theta/2$ উভয়ের চারটি মান রয়েছে।

চিহ্নের দ্ব্যর্থকতার কারণ আগের মতোই। θ-র মানের সীমা জানলে তবেই দ্ব্যর্থকতা দূর করা সম্ভব।

5·8 tan θ দেওয়া আছে, tan $\theta/2$ নির্ণয় করণ।

(Given tan θ, to find tan $\theta/2$)

$$\tan\theta=\frac{2\tan\theta/2}{1-\tan^2\theta/2} \quad \therefore\ \tan\theta.\tan^2\theta/2+2\tan\theta/2-\tan\theta=0$$

$$\therefore\ \tan\theta/2=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\tan\theta.\tan\theta}}{2\tan\theta}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta} \quad \text{...(17)}$$

চিহ্নের দ্ব্যর্থকতার কারণ আগের মতোই।

5-9 θ-এর ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত থেকে $\theta/3$-এর অনুপাত নির্ণয়

(Trigonometrical ratios of $\theta/3$, from those of θ)

আমরা জানি : $\sin\theta=3\sin\theta/3-4\sin^3\theta/3$

কাজেই, যদি **sin θ** দেওয়া থাকে, তবে **sin $\theta/3$** নির্ণয় করার জন্য আমরা একটি ত্রি-ঘাত সমীকরণ পাচ্ছি এবং **sin θ-র** একটি মানের জন্য **sin $\theta/3$-র** তিনটি মান পাওয়া যাচ্ছে।

অনুরূপভাবে, cos θ এবং tan θ থেকে আমরা যথাক্রমে cos $\theta/3$ এবং tan $\theta/3$-এর মান নির্ণয় করিতে পারি।

5-10. 18°, 36°, 54°, 72° কোণের অনুপাত (Ratios of 18°, 36°, 54°, 72°)

ধর, $\theta=18^\circ$, $\therefore\ 5\theta=90^\circ$ বা $2\theta=90^\circ-3\theta$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\cos 3\theta$$

বা, $2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos\theta\,(4\cos^2\theta-3)$

বা, $2\sin\theta=4\cos^2\theta-3 \qquad (\because\ \cos\theta\neq 0)$

$$=4(1-\sin^2\theta)-3$$

বা, $4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

যেহেতু 18° সূক্ষ্মকোণ, শুধু ধনাত্মক মানটিই গ্রাহ্য হবে।

$$\therefore\ \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \qquad .....(18)$$

$$\cos 18^\circ=+\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad ...(19)$$

যেহেতু 72° এবং 18° পরস্পর পূরক কোণ, অতএব,

$$\sin 72^\circ=\cos 18^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdots(20)$$

$$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \ ....(21)$$

আবার, $\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \ ....(22)$

$$\sin 36^\circ=\sqrt{1-\cos^2 36^\circ}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) ...(23)$$

যেহেতু, 54° ও 36° পরস্পর পূরক কোণ, অতএব

$$\sin 54^\circ=\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) \qquad ...(24)$$

$$\cos 54° = \sin 36° = \frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}}) \quad ...(25)$$

5-11 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. cos 4A কে sin A-র হিসাবে প্রকাশ কর

$$\cos 4A = 1 - 2\sin^2 2A$$
$$= 1 - 2(4\sin^2 A \cos^2 A)$$
$$= 1 - 8\sin^2 A(1 - \sin^2 A)$$
$$= 1 - 8\sin^2 A + 8\sin^4 A$$

উদা. 2. যদি $\tan x = b/a$ হয়, তবে $a\cos 2x + b\sin 2x$-এর মান নির্ণয় কর।

$$a\cos 2x + b\sin 2x = a\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + b\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$
$$= a\frac{1-b^2/a^2}{1+b^2/a^2} + b\frac{2b/a}{1+b^2/a^2}$$
$$= \frac{a(1-b^2/a^2)+2b^2/a}{1+b^2/a^2}$$
$$= \frac{a^2(1-b^2/a^2)+2b^2}{a(1+b^2/a^2)} = \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)/a} = a$$

উদা. 3. দেখাও যে, $\sin^2 5x - \sin^2 3x = \sin 8x . \sin 2x$

$$\text{বামপক্ষ} = (\sin 5x + \sin 3x)(\sin 5x - \sin 3x)$$
$$= (2\sin 4x \cos x)(2\cos 4x \sin x)$$
$$= (2\sin 4x \cos 4x)(2\sin x \cos x)$$
$$= \sin 8x . \sin 2x$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\sin 8x \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 10x)$

$$= \frac{1}{2}\{1 - 2\sin^2 3x - (1 - 2\sin^2 5x)\}$$
$$= \sin^2 5x - \sin^2 3x$$

উদা. 4. দেখাও যে, $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \sec 2A - \tan 2A$

$$\text{দক্ষিণ পক্ষ} = \frac{1}{\cos 2A} - \frac{\sin^2 2A}{\cos^2 2A}$$

$$= \frac{1-\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A\cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$

$$=\frac{(\cos A-\sin A)^2}{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}=\frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}$$

$(\because \cos A\neq \sin A)$

উদা. 5. যদি $2\tan\alpha=3\tan\beta$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}.$$ (কঃ বিঃ 1946, আগ্রা, 1949)

যেহেতু $2\tan\alpha=3\tan\beta$, $\therefore \tan\alpha=\frac{3}{2}\tan\beta$

এক্ষণে, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{3}{2}\tan\beta-\tan\beta}{1+\frac{3}{2}\tan^2\beta}$

$$=\frac{\tan\beta}{2+3\tan^2\beta}=\frac{\sin\beta/\cos\beta}{2+3\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}$$

$$=\frac{2\sin\beta\cos\beta}{4\cos^2\beta+6\sin^2\beta}=\frac{\sin 2\beta}{4+2\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{5-(1-2\sin^2\beta)}$$

$$=\frac{\sin 2\beta}{5-\cos 2\beta}$$

উদা. 6. যদি α ও β সূক্ষ্মকোণ হয় এবং $\cos 2\alpha=\dfrac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos^2\beta}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$. (কঃ বিঃ 1941)

$$\because \cos 2\alpha=\frac{3\cos 2\beta-1}{3-\cos 2\beta}$$

$$\therefore \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3.\dfrac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}-1}{3-\dfrac{1-\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}}=\frac{2(1-2\tan^2\beta)}{2(1+2\tan^2\beta)}=\frac{1-2\tan^2\beta}{1+2\tan^2\beta}$$

$\therefore$ উভয়পক্ষে যথাক্রমে 1 যোগ এবং 1 বিয়োগ ক'রে

$$\frac{2\tan^2\alpha}{2}=\frac{4\tan^2\beta}{2}$$

বা, $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta$ $\therefore \tan\alpha=\pm\sqrt{2}\tan\beta$

যেহেতু α ও β সূক্ষ্মকোণ, $\therefore \tan\alpha=\sqrt{2}\tan\beta$

উদা. 7. দেখাও যে, $\sec\theta\ \tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta/2\right)$ (পাটনা, 1950)

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{(\sin\theta/2+\cos\theta/2)^2}{\cos^2\theta/2-\sin^2\theta/2}$$

$$=\frac{\cos\theta/2+\sin\theta/2}{\cos\theta/2-\sin\theta/2}=\frac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

উদা. 8. যদি $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}$ হয়, দেখাও যে,

$$\cos\theta=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$$ (পাটনা, 1940 ; আগ্রা, 1949)

শর্তানুসারে, $\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\phi}{2}$

বা, $\tan^2\frac{\phi}{2}=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\theta/2$

এখন, $$\cos\phi=\frac{1-\tan^2\phi/2}{1+\tan^2\phi/2}=\frac{1-\frac{1+e}{1-e}\tan^2\theta/2}{1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\theta/2}$$

$$=\frac{(1-e)-(1+e)\tan^2\theta/2}{(1-e)+(1+e)\tan^2\theta/2}$$

$$=\frac{(1-\tan^2\theta/2)-e(1+\tan^2\theta/2)}{(1+\tan^2\theta/2)-e(1-\tan^2\theta/2)}$$

$$=\frac{\frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}-e}{1-e\,\frac{1-\tan^2\theta/2}{1+\tan^2\theta/2}}$$ (লব ও হরকে $1+\tan^2\theta/2$ দিয়ে ভাগ ক'রে)

$$=\frac{\cos\theta-e}{1-e\cos\theta}$$

উদা. 9. দেখাও : $\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\therefore\ \sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}$$

$$\sin\frac{x}{2^2}=2\sin\frac{x}{2^3}\cos\frac{x}{2^3}$$

$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$$

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}}=2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}.$$

$$\therefore\ \sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\ldots\ldots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}.$$

উদাহরণমালা 5

প্রমাণ কর যে,

1. $\tan 2A-\sec A\sin A=\tan A\sec 2A$
2. $\dfrac{1-\cos 2\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\sin 2\theta}=\tan\theta$ (কঃ বিঃ 1938)
3. $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$
4. $\dfrac{\sin\alpha-\sqrt{1+\sin 2\alpha}}{\cos\alpha-\sqrt{1+\sin 2\alpha}}=\cot\alpha$
5. $\dfrac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}=\tan A$
6. $4(\cos^3 20^\circ+\cos^3 40^\circ)=3(\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)$
7. $4(\cos^3 10^\circ+\sin^3 20^\circ)=3(\cos 10^\circ+\sin 20^\circ)$
8. $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A\tan 2A\tan A$
9. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\dfrac{1}{\cos 20^\circ}=4$
10. $\dfrac{1}{\sin 15^\circ}-\dfrac{1}{\cos 15^\circ}=2\sqrt{2}$
11. $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-\theta)}{1+\tan^2(45^\circ+\theta)}=\sin 2\theta$
12. $\cos^2(A-120^\circ)+\cos^2 A+\cos^2(A+120^\circ)=\frac{3}{2}$
13. $\dfrac{\sin 2^2\theta}{\sin\theta}=2^2\cos\theta\cos 2\theta$

14. $\dfrac{\sin 2^n\theta}{\sin\theta}=2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\ldots\cos 2^{n-1}\theta$

15. $\theta=\pi/(2^n-1)$; দেখাও : $2^n\cos\theta\cos 2\theta\cos 2^2\theta\ldots\cos^{n-1}\theta=-1$
(আগ্রা, 1953)

16. দেখাও যে, $\dfrac{\tan 2^n\theta}{\tan\theta}=(1+\sec 2\theta)(1+\sec 2^2\theta)(1+\ldots(1+\sec 2^n\theta)$

17. যদি $\tan^2 x+2\tan x\tan 2y=\tan^2 y+2\tan y\tan 2x$ হলে, দেখাও যে, হয় $\tan x=\pm\tan y$, নতুবা উভয়পক্ষ$=1$

18. যদি $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$ হয়, দেখাও যে; $\cos 2B=1+2\cos 2A$

19. যদি $\dfrac{\tan(\alpha+\beta-\gamma)}{\tan(\alpha-\beta+\gamma)}=\dfrac{\tan\gamma}{\tan\beta}$ হয়, দেখাও যে, $\Sigma\sin 2\alpha=0$

20. দেখাও যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\tan 2\theta$ (আগ্রা, 1957)

21. দেখাও যে, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{2}{\cos 2\theta}$

22. $\tan\theta=\cos 2\beta$; দেখাও : $\sin 2\theta=\dfrac{1-\tan^4\beta}{1+\tan^4\beta}$ (পাটনা, 1940)

23. $\sin 45^\circ$-এর মান ধরে নিয়ে $\sin 22\frac{1}{2}^\circ$ এবং $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ মান নির্ণয় কর।

24. $\sin 3^\circ$ এবং $\cos 3^\circ$-এর মান নির্ণয় কর।

দেখাও যে,

25. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\theta/2}{1-\tan\theta/2}$

26. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{\cot\theta/2+1}{\cot\theta/2-1}$

27. $\sec A-\tan A=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$

28. $\tan A+\sec A=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)$

29. $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta/2\right)$

30. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}\cdot\dfrac{\cos A}{1+\cos A}=\tan\dfrac{A}{2}$

31. $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}\cdot\dfrac{1-\cos A}{\cos A}=\tan\dfrac{A}{2}$

32. $\tan 7\frac{1}{2}^\circ=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

33. $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$ (বেনারস, 1954)

34. $\cot 142\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 2 - \sqrt{6}$

35. $\tan\theta = \dfrac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$; দেখাও : $\tan \frac{\theta}{2}$-এর একটি মান $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}$

36. $\sin \alpha + \sin \beta = a$ এবং $\cos \alpha + \cos \beta = b$; $\cos (\alpha + \beta) =$ কত ?

37. নিচের সমতাগুলোর সত্যতার জন্য A-এর মানের উভয় সীমা নির্ধারণ কর :

(i) $2 \sin A = \sqrt{1 + \sin 2A} - \sqrt{1 - \sin 2A}$

(ii) $2 \cos A = -\sqrt{1 + \sin 2A} + \sqrt{1 - \sin 2A}$

(iii) $2 \sin A = -\sqrt{1 + \sin 2A} + \sqrt{1 - \sin 2A}$

38. দেখাও যে, $2 \sin \frac{1}{2}A = \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}$; এবং $270^\circ > A > 180^\circ$ হলে কোন্ চিহ্নটি সঠিক ? (বেনারস, 1931)

39. $A = 240^\circ$ হলে, $2 \sin\frac{A}{2} = \sqrt{1 + \sin A} - \sqrt{1 - \sin A}$—কি সত্যি ?

40. $A = 170^\circ$ হলে দেখাও যে, $\tan \frac{A}{2} = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$

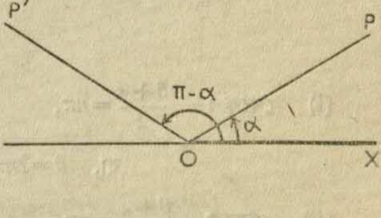
6
ষষ্ঠ অধ্যায়
সমীকরণ ঃ সাধারণ মান
(EQUATIONS : GENERAL VALUES)

6.1 যদি $\sin\theta=\frac{1}{2}$ হয়, তবে θ-এর মান কত ? এ প্রশ্নের সহজ উত্তর হল ঃ $\theta=\pi/6$। কিন্তু এটিই θ-র একমাত্র মান নয়। $\theta=\pi-\pi/6$ ও $\sin\theta=\frac{1}{2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। বস্তুত θ-র এই দুটি মানের সঙ্গে $360°$ বা 2π এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে কোন গুণিতক যোগ করলেও ঐ সমীকরণ সিদ্ধ হবে। কাজেই $30°$, $150°$, $390°$, $510°$, ... , $-330°$, $-210°$, ... ইত্যাদি অসংখ্য কোণের প্রত্যেকটির sine অনুপাত $\frac{1}{2}$। অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্রেও তাই।

কোন একটি কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত সুনির্দিষ্ট হলেও, দেখা গেল, বিপরীতটি সত্যি নয়। অসংখ্য কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই মানবিশিষ্ট। ঐ সব অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সাধারণ সূত্র সম্পর্কে পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলোতে আলোচনা করা হল।

6.2 একই sine (বা cosecant) বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র
(General expression for angles having a given sine or cosecant)

যে সব কোণের sine-এর মান একই, ধর, তাদের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α এবং θ হল অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম।



$\therefore\ \sin\theta=\sin\alpha$

বা, $\sin\theta-\sin\alpha=0$

বা, $2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}.\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$

$\therefore\ \cos\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ ...(i)

অথবা, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$...(ii)

(i) থেকে : $\frac{\theta+\alpha}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}$, $m=0, \pm1, \pm2,$

$\therefore\ \theta=(2m+1)\pi-\alpha$ ... (iii)

(ii) থেকে : $\frac{\theta-\alpha}{2}=m\pi$, $m=0, \pm 1, \pm 2,$

$\therefore \theta=2m\pi+\alpha$ ... (iv)

(iii) ও (iv) একত্রে : $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$, $n=0, \pm 1, \pm 2,...$

কেননা, $n=$ অযুগ্ম অর্থাৎ $2m+1$ হলে, $\theta=(2m+1)\pi+(-1)^{2m+1}\alpha$
$=(2m+1)\pi-\alpha$

$n=$ যুগ্ম অর্থাৎ $2m$ হলে, $\theta=2m\pi+(-1)^{2m}\alpha=2m\pi+\alpha$

আবার, $\operatorname{cosec}\theta=\operatorname{cosec}\alpha$ হলে $\sin\theta=\sin\alpha$

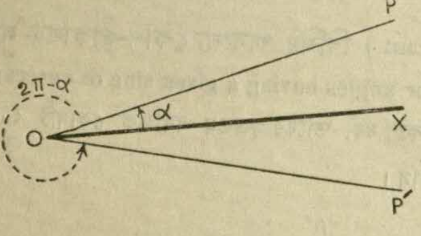
$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$

চিত্রে $n=0$ এবং $n=1$ এর ক্ষেত্র দুটি দেখান হল।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\sin\theta=0$ হয়, তবে $\theta=n\pi$, কেননা $\alpha=0$.

6.3 একই cosine (অথবা secant) বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র (General expression for angles having a given cosine or secant)

যে অসংখ্য কোণের cosine বা secant একই মানবিশিষ্ট, ধর, তাদের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α এবং θ সেই অজ্ঞাত কোণগুলোর সাধারণ নাম।



$\therefore \cos\theta=\cos\alpha$

বা, $\cos\alpha-\cos\theta=0$

বা, $2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}.\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$

$\therefore \sin\frac{\theta+\alpha}{2}=0$ ...(v)

বা, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2}=0$ ...(vi)

(i) থেকে : $\frac{\theta+\alpha}{2}=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2,...$

বা, $\theta=2n\pi-\alpha$ ...(vii)

(ii) থেকে : $\frac{\theta+\alpha}{2}=n\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2,...$

বা, $\theta=2n\pi+\alpha$ ...(viii)

(iii) ও (iv) একত্রে $\theta=2n\pi\pm\alpha$ $n=0, \pm 1, \pm 2,...$

চিত্রে $n=0$-এর ক্ষেত্রে ধনাত্মক কোণটি এবং $n=1$ এর ক্ষেত্রে একটি কোণ $(=2\pi-\alpha)$ দেখান হল।

আবার, $\sec\theta=\sec\alpha$ হলে $\cos\theta=\cos\alpha$

$\therefore$ এক্ষেত্রেও, $\theta=2n\pi\pm\alpha$ $\quad n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\cos\theta=1$ হয়, তবে $\theta=2n\pi$

6.4 একই ট্যাজেন্ট (বা কোট্যাজেন্ট) বিশিষ্ট অসংখ্য কোণের সূত্র (General expression for all angles having a given cosine or secant)

যে অসংখ্য কোণের tangent (বা cotangent) একই মানবিশিষ্ট, ধর, তাদের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α এবং θ সেই অজ্ঞাত কোণগুলোর সাধারণ নাম।

$$\therefore \tan\theta=\tan\alpha$$

বা, $\tan\theta-\tan\alpha=0$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$

বা, $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$

বা, $\sin(\theta-\alpha)=0 \quad (\because \cos\theta\neq0;\ \cos\alpha\neq0)$

$\therefore \theta-\alpha=n\pi, \qquad n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

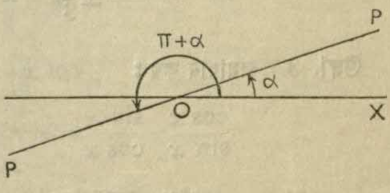
$$\therefore \theta=n\pi+\alpha$$

আবার, $\cot\theta=\cot\alpha$ হলে,

$\tan\theta=\tan\alpha$

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta=n\pi+\alpha$,

$n=0, \pm1, \pm2, \ldots$



অনুসিদ্ধান্ত : যদি $\tan\theta=0$, হয় তবে $\theta=n\pi$.

6.5 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রগুলিতে θ-এর সাধারণ মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin\theta=\dfrac{\sqrt3}{2}$, (ii) $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt3}{2}$, (iii) $\tan\theta=\sqrt3$

(i) $\because \sin\theta=\dfrac{\sqrt3}{2}$, অতএব θ-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ $=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ সাধারণ মান : $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

(ii) $\because$ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, কাজেই θ-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান $= 5\pi/6$

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(iii) $\because$ $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\pi/3$

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

উদা. 2. $\tan^2\theta = 3\,\text{cosec}^2\theta - 1$; θ-র সাধারণ মান নির্ণয় কর।

(ক: বি: 1939)

পক্ষান্তর ক'রে, $\tan^2\theta + 1 = 3\,\text{cosec}^2\theta$

বা, $\sec^2\theta = 3\,\text{cosec}^2\theta$

বা, $\tan^2\theta = 3$

$\therefore$ $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$

$\because$ $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ $\quad\therefore\; \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

$\because$ $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan(-\pi/3)$ $\quad\therefore\; \theta = n\pi - \pi/3$

$$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

উদা. 3. সমাধান কর : $\cot x - \tan x = 2$ (ক: বি: 1937)

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2$$

বা, $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x\cos x$

বা, $\cos 2x = \sin 2x$

বা, $\tan 2x = 1 = \tan\pi/4$

$\therefore$ $2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\; x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = (4n+1)\pi/8$

উদা. 4. সমাধান কর : $\cos 9\theta = \cos 5\theta - \cos\theta$

পক্ষান্তর ক'রে : $\cos 9\theta + \cos\theta - \cos 5\theta = 0$

বা, $2\cos 5\theta.\cos 4\theta - \cos 5\theta = 0$

বা, $\cos 5\theta\,(2\cos 4\theta-1)=0$

$\therefore$ হয়, $\cos 5\theta=0$ $\quad\therefore\ 5\theta=2n\pi\pm\pi/2$

$$\therefore\ \theta=(4n\pm1)\frac{\pi}{10}$$

নতুবা, $2\cos 4\theta-1=0$ $\quad\therefore\ 4\theta=2n\pi\pm\pi/3$

$$\therefore\ \theta=(6n\pm1)\frac{\pi}{12}$$

উদা. 5. সমাধান কর : $\tan x+\tan 2x+\tan x\tan 2x=1$

(কঃ বিঃ 1945)

পক্ষান্তর ক'রে : $\tan x+\tan 2x=1-\tan x\tan 2x$

$$\therefore\ \frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x}=1$$

বা, $\tan(x+2x)=1$

বা, $\tan 3x=1=\tan\pi/4$

$\therefore\ 3x=n\pi+\pi/4$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}(n\pi+\pi/4),\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

উদা. 6. সমাধান কর : $\cos m\theta=\sin n\theta$.

এখানে, $\cos m\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-n\theta\right)$

$$\therefore\ m\theta=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-n\theta\right),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

$$\therefore\ \begin{cases}(m+n)\theta=(2k+\frac{1}{2})\pi\\(m-n)\theta=(2k-\frac{1}{2})\pi\end{cases}$$

দ্রষ্টব্য : cosine-এর পরিবর্তে sine মাধ্যমেও অঙ্কটি করা যেত। কিন্তু উত্তরের চেহারা ভিন্ন হত। তবে তারা একই কোণ শ্রেণীকে বোঝাত।

উদা. 7. সমাধান কর : $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ (বেনারস, 1952)

উভয় পক্ষকে $\sin x$ এবং $\cos x$ এর সহগের বর্গের যোগফলের বর্গমূল দিয়ে ভাগ করে, অর্থাৎ $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}$ বা 2 দিয়ে ভাগ করে

$$\tfrac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা, }\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$বা, \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad x-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

$$বা, \quad x=2n\pi+\frac{5\pi}{12}$$

$$এবং \quad x=2n\pi-\pi/12$$

দ্রষ্টব্য : এ জাতীয় অঙ্কের ক্ষেত্রে, অর্থাৎ $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ আকারের সমীকরণে, সমীকরণটিকে বর্গ করা আপত্তিকর ; কারণ এতে এমন সমাধানও পাওয়া যাবে যা ঐ সমীকরণ সিদ্ধ করে না। এ রকম সমাধানকে **অবান্তর বীজ (extraneous solution)** বলা হয়। যেমন,

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$$

বর্গ ক'রে ও সাজিয়ে : $3\cos^2 x=(\sqrt{2}-\sin x)^2$

কিন্তু এই সমীকরণের সমাধানে $-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}-\sin x$ এর বীজও এসে যাবে।

এক্ষেত্রে রীতি হল : $a=r\cos\alpha$, $b=r\sin\alpha$ বসাও।

$\therefore \; r=\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin\alpha=b/\sqrt{a^2+b^2}$; $\cos\alpha=a/\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore \; a\cos\theta+b\sin\theta=c$ সমীকরণটির রূপ দাঁড়াল

$$\sqrt{(a^2+b^2)}\cos\alpha\cos\theta+\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\sin\theta=c$$

$$বা, \quad \cos(\theta-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\beta \text{ (ধর)}$$

$$\therefore \quad \theta-\alpha=2n\pi\pm\beta$$

$$\therefore \quad \theta=2n\pi\pm\beta+\alpha\pm\beta$$

উদা. 8. $\cos 2\theta=\cos\theta+\sin\theta$

$\therefore \; \cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos\theta+\sin\theta$

বা, $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta$

বা, $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta-1)=0$

$\therefore$ হয়, $\cos\theta+\sin\theta=0$ ...(i)

না হয়, $\cos\theta-\sin\theta=1$ ...(ii)

(i) থেকে : $\tan\theta - 1$ $\quad\therefore\ \theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$

(ii) থেকে : $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা. $\cos\theta\cos\frac{\pi}{4} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ \theta = 2n\pi$ বা, $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

উদা. 9. সমাধান কর : $\tan p\theta = \tan q\theta$.

যেহেতু $\tan p\theta = \tan q\theta$

$\therefore\ p\theta = n\pi + q\theta$

$\therefore\ (p-q)\theta = n\pi$

$\therefore\ \theta = \frac{n\pi}{p-q}$

উদা. 10. সমাধান কর : $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$ (বেনারস, 1946)

$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$

$\therefore\ \tan 3x = -(\tan x + \tan 2x)$

বা, $\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} + \tan x + \tan 2x = 0$

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(\frac{1}{1 - \tan x \tan 2x} + 1\right) = 0$

$\therefore$ হয়, $\tan x + \tan 2x = 0$ ... (i)

নতুবা, $\frac{1}{1 - \tan x + \tan 2x} + 1 = 0$ ... (ii)

(i) থেকে : $\tan x = -\tan 2x = \tan(-2x)$

$\therefore\ x = n\pi - 2x$ বা, $3x = n\pi$ $\therefore\ x = \frac{n\pi}{3}$

(ii) থেকে : $1 - \tan x \tan 2x + 1 = 0$

বা, $\tan x \tan 2x = 2$

বা, $\tan x . \dfrac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}=2$ বা, $2 \tan^2 x=1$

$\therefore \tan^2 x=\frac{1}{2}=\tan^2 \alpha$ ($\tan \alpha=1/\sqrt{2}$ ধরে) $\therefore x=n\pi \pm \alpha$

উদাহরণমালা 6

সাধারণ মানসহ সমাধান কর :

1. $2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1$
2. $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$
3. $2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0$
4. $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$
5. $\sin 5\theta-\sin 3\theta=\sin\theta$
6. $\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta$
7. $\tan x-\cot x=\operatorname{cosec} x$
8. $\tan\theta+\cot 2\theta=2$
9. $\sin p\theta+\sin q\theta=0$
10. $\sin p\theta+\cos q\theta=0$
11. $\sin 4\theta-\sin 3\theta+\sin 2\theta-\sin\theta=0$
12. $\cos\theta+\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta=0$ (কঃ বিঃ 1959,)
13. $\tan^2\theta=3\operatorname{cosec}^2\theta-1$ (কঃ বিঃ 1939)
14. $\tan^2\theta+\sec\theta=1$
15. $\cot^2\theta-1=\operatorname{cosec}\theta$
16. $\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta=3\cot\theta$ (কঃ বিঃ 1913)
17. $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$ (পাটনা, 1942)
18. $\cot x-\tan x=2$ (কঃ বিঃ 1937)
19. $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=1$
20. $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ (আগ্রা, 1952)
21. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$ (কঃ বিঃ 1944)
22. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ (বেনারস, 1946)
23. $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ (আগ্রা, 1949)
24. $3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{6}$ (বেনারস, 1949)
25. $\sin\theta+2\cos\theta=1$ (কঃ বিঃ 1933)
26. $\sqrt{3}\cos x+\sin x=1$ (কঃ বিঃ 1954)
27. $\cos x+\sin x=\cos 2x+\sin 2x$ (কঃ বিঃ 1960)
28. $\cos x-\sin x=\cos\alpha+\sin\alpha$ (বেনারস, 1938)
29. (i) $\sin 2\theta=\cos\theta$ (কঃ বিঃ 1953)
    (ii) $\sin 4\theta=\sin\theta$ (বেনারস, 1949)
30. $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$ (আগ্রা, 1950)

31. $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=\tan x \tan 2x \tan 3x$ (কঃ বিঃ 1956)

32. $\tan(\pi/4+\theta)+\tan(\pi/4-\theta)=4$ (কঃ বিঃ 1949)

33. $\cos 2x=\cos x \sin x$

34. $\sin 5x \cos 3x=\sin 9x \cos 7x$ (বেনারস, 1946)

35. $\cos^2\theta-\sin\theta-\frac{1}{4}=0$ (বেনারস, 1949)

36. $\cos 2x-\sin 2x=\cos x-\sin x-1$

37. $\sin\theta=\sqrt{2}\sin\phi$; $\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{2}\cos\phi$

38. $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{3}\operatorname{cosec}\phi$; $\cot\theta=3\cot\phi$

39. $\tan\theta+\tan 2\theta+\sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta=\sqrt{3}$ (বেনারস, 1951)

40. $\cos 3x+\cos 2x+\cos x=0$ (কঃ বিঃ, 1946)

41. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2x}+\dfrac{\cos\alpha}{\cos 2x}=2$ (কঃ বিঃ, 1958)

42. $5\cos x+2\sin x=2$ (দেওয়া আছে : $\tan 21°48'=0{\cdot}4$)

43. $2\cos\theta+3\sin\theta=2$ (দেওয়া আছে : $\tan 56°\,20'=1\frac{1}{2}$)

44. $\tan ax-\tan bx=0$; দেখাও যে, x এর মান সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

45. ব্যাখ্যা কর : একই শ্রেণীভুক্ত কোণগুলো নিম্নোক্ত সূত্রদ্বয়ে প্রকাশিত :

$$\theta+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\ \pi/6 \quad \text{এবং} \quad \theta-\frac{\pi}{4}=2\,n\pi\pm\pi/3$$

46. যদি $\sin A=\sin B$ এবং $\cos A=\cos B$ হয়, তবে দেখাও যে, হয় $A=B$ অথবা A ও B এর অন্তর চার সমকোণের কোন গুণিতক। (কঃ বিঃ, 1935)

47. সমাধান কর (সাধারণ মানের দরকার নেই)

$$\tan x+\tan y=2$$
$$2\cos x\cos y=1$$
(কঃ বিঃ, 1955)

48 সমাধান কর :

(i) $\sin 4\theta=\cos 3\theta+\sin 2\theta$ $\quad 0<\theta<\pi$ (কঃ বিঃ, 1951)

(ii) $\sin A+\sin 2A+\sin 3A=0$ $\quad 0<A<2\pi$ (পাটনা, 1944)

(iii) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$ $\quad 0<\theta<2\pi$ (কঃ বিঃ, 1936)

7

সপ্তম অধ্যায় বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক

(INVERSE CIRCULAR FUNCTIONS)

7. 1 '$\sin\theta = x$'-এ কথার অর্থঃ θ এমন একটি কোণ যার সাইন অনুপাত হল x। কখন কখন এই কথাটি সুবিধার্থে $\theta = \sin^{-1} x$ এরূপও লেখা হয়। $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1} x$ একই কথা—দুইরূপে লেখা হয়েছে মাত্র। একটি দেওয়া থাকলে, অপরটি স্বভাবতঃই লেখা যায়। অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$ এর অর্থ x এমন একটি কোণ যার কোসাইন অনুপাত x ; $\tan^{-1} y$ দ্বারা এমন একটি কোণ সূচিত হয় যার ট্যাঞ্জেন্ট অনুপাত y ; ইত্যাদি ইত্যাদি।

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}y$, $\tan^{-1} b$ ইত্যাদিকে sine, cosine ইত্যাদি থেকে পৃথক করার জন্য এদের **বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক (Inverse Circular Functions)** বলে। sine, cosine ইত্যাদি হল **বৃত্তীয় অপেক্ষক (Circular Functions)**। '$\sin^{-1} x$' কে 'সাইন ইনভার্স x' এরূপ পড়া হয়।

উপরের আলোচনা থেকে সহজেই লেখা যায় :

$y = \sin x$ হলে $\quad x = \sin^{-1} y$

$y = \cos x$ হলে $\quad x = \cos^{-1} y$; ইত্যাদি।

তেমনি $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \therefore \frac{\pi}{3} = \cos^{-1}\frac{1}{2}$

$1 = \tan\frac{\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1$; ইত্যাদি

লক্ষ্য কর : **বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলো কোণ প্রকাশক। আর বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলো এক একটি সংখ্যা।**

সমাধান। $\sin^{-1}x$ কিন্তু $(\sin x)^{-1}$ অর্থাৎ $1/\sin x$ নয় ; কারণ $\sin^{-1} x$ হল একটি কোণ এবং এক্ষেত্রে -1 কোণ বীজগণিতীয় সূচক নয় ; কিন্তু $(\sin x)^{-1}$ এর $\sin x$ একটি সংখ্যা এবং -1 একটি বীজগণিতীয় সূচক।

7. 2 মুখ্য মান (Principal Values)

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ বললে আমরা বুঝি এটি এমন একটি কোণ যার sine হল $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $\pi/6$; কিন্তু $\pi/6$ ই একমাত্র কোণ নয় যার sine$=\frac{1}{2}$। বস্তুতঃ $n\pi+(-1)^n\,\pi/6$ এই অসংখ্য কোণের প্রত্যেকটির sine $=\frac{1}{2}$। ($n=0$ বা যে কোন পূর্ণসংখ্যা – ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)।

$\therefore\ \sin^{-1}\frac{1}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ তেমনি, $\tan^{-1}1=n\pi+\frac{\pi}{4}$, ইত্যাদি।

কাজেই বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলো বহুমান বিশিষ্ট। এর মধ্যে যে কোণটির সাংখ্যমান ক্ষুদ্রতম, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, তাকে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকটির **মুখ্য মান (Principal value)** বলে। যেমন, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\pi/6$। যদি একই সাংখ্য মানের কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত (ধনাত্মক ও ঋণাত্মক) দুটি কোণ থাকে তবে ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত কোণটিকেই মুখ্যমান ধরা হয়। $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্যমান $\pi/3$, $-\pi/3$ নয়।

7. 3 $\sin\sin^{-1}x$, $\sin^{-1}\sin\theta$ ইত্যাদি রূপ
($\sin\sin^{-1}x$, $\sin^{-1}\sin\theta$ etc. forms)

(a) $\sin\theta=x$ হলে $\theta=\sin^{-1}x$

$\therefore\ \sin\sin^{-1}x=\sin(\theta)=x$

তেমনি $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$, ইত্যাদি

(b) $\sin\theta=x$ হলে $\theta=\sin^{-1}x$

$\therefore\ \sin^{-1}\sin\theta==\sin^{-1}(x)=\theta$

তেমনি $\cos^{-1}\cos\theta$, $\tan^{-1}\tan\theta=\theta$ ইত্যাদি

7. 4 প্রমাণ কর যে,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec}^{-1}x&=\sin^{-1}\frac{1}{x}\\ \sec^{-1}x&=\cos^{-1}\frac{1}{x}\\ \cot^{-1}x&=\tan^{-1}\frac{1}{x}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

ধর, $\operatorname{cosec}^{-1}=\theta\quad\operatorname{cosec}\theta=x$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{x}\qquad\theta=\sin^{-1}\frac{1}{x}\qquad\therefore\ \operatorname{cosec}^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{x}$$

অন্যান্য সম্পর্কগুলোও অনুরূপভাবে পাওয়া যায়।

7. 5 বৃত্তীয় অপেক্ষকের ন্যায় বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষকেরও যে কোনটিকে অপর একটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $\sin\theta=x$ হলে, $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ এবং $\tan\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ইত্যাদি।

$$\therefore\ \theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$ ইত্যাদি।

অবশ্য, মনে রেখ, এই সব বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলোর মুখ্য মানগুলোই শুধু পরস্পর সমান; ওদের দ্বারা প্রকাশিত অসংখ্য মানগুলো এক নয়।

7. 6 প্রমাণ কর যে,
$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2\\ \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\pi/2\\ \sec^{-1}x+\text{cosec}^{-1}x=\pi/2\end{array}\right\}\ \ldots\ldots(2)$$

ধর, $\sin^{-1}x=\theta\ \therefore\ x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore\ \cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$ $\qquad\therefore\ \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$

অন্যান্যগুলোও অনুরূপভাবে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য: এখানে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের মুখ্য মান ধরা হয়েছে। উপরের ফলগুলো x ধনাত্মক হলেই সত্যি। x ঋণাত্মক হলে প্রথম ও তৃতীয়টি সত্যি, কিন্তু দ্বিতীয়টি নয়। দ্বিতীয়টির মান সেক্ষেত্রে $-\pi/2$ হয়।

7. 7. দেখাও যে,
$$\left.\begin{array}{l}\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}\\[2ex] \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}\end{array}\right\}\ \ldots\ldots(3)$$

ধর, $\tan^{-1}x=A \qquad \therefore\ \tan A=x$

এবং $\tan^{-1}y=B \qquad \therefore\ \tan B=y$

$$\therefore\ \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=\frac{x+p}{1-xy}$$

$$\therefore\ A+B=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

বা, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$

অনুরূপে, $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}$

দ্রষ্টব্য : 1. অনুরূপভাবে অনায়াসে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cot^{-1} x \pm \cot^{-1} y = \cot^{-1} \frac{y \pm 1}{y \pm x}$$

2. 3 নং সেটের প্রথম সমীকরণে $y = x$ বসালে

$$2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} \qquad ...(4)$$

3. $\tan(\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y) = \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$

7.8 দেখাও যে, $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z$

$$= \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} \qquad ...(5)$$

ধর, $\tan^{-1} x = A$, $\tan^{-1} y = B$, $\tan^{-1} z = C$

$\therefore$ $\tan A = x$, $\tan B = y$, $\tan C = z$

এক্ষণে, $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

$$= \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

$$\therefore A+B+C = \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

$$\therefore \tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \frac{x+y+z+xyz}{1-xy-yz-zx}$$

7.9 দেখাও : $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$

$$\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\{xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\} \quad ......(6)$$

ধর, $\sin^{-1} x = A$ $\quad\therefore$ $\sin A = x$; $\cos A = \sqrt{1-x^2}$

আবার, $\sin^{-1} y = B$ (ধর) $\quad\therefore$ $\sin B = y$; $\cos B = \sqrt{1-y^2}$

এখন, $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$$= x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}$$

$\therefore \quad A \pm B = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$

বা, $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\{xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$$

দ্রষ্টব্য : যদি y এর বদলে x ব্যবহার করা হয় তবে উপরের সমীকরণগুলো থেকে সহজেই লেখা যায় :

$$\left.\begin{array}{l} 2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) \\ 2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1) \end{array}\right\} \quad \ldots(7)$$

7.10 দেখাও যে, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$$= \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} \quad \ldots(8)$$

ধর, $\tan^{-1}x = \theta \quad \therefore \tan\theta = x$

এখন, $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$\therefore \quad 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$$

বা, $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

আবার, $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$\therefore \quad 2\theta = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ বা, $2\tan^{-1}x = \cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

আবার, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore \quad 2\theta = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$ বা, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

7.11. প্রমাণ কর যে,

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

(ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii) $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

(i) ধর, $\sin^{-1}x=\theta \quad \therefore \sin\theta=x$

এখন, $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3x-4x^3$

$\therefore 3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

বা, $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$

(ii) ধর, $\cos^{-1}x=\theta \quad \therefore \cos\theta=x$

এখন, $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4x^3-3x$

$\therefore 3\theta=\cos^{-1}(4x^3-3x) \quad \therefore 3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x)$

(iii) ধর, $\tan^{-1}x=\theta \quad \therefore \tan\theta=x$

এখন $\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

$\therefore 3\theta=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$ বা, $3\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$

7.12 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. দেখাও যে, $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

ধর, $\theta=\sin^{-1}x \quad \therefore \sin\theta=x$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$; $\tan\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cot\theta=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

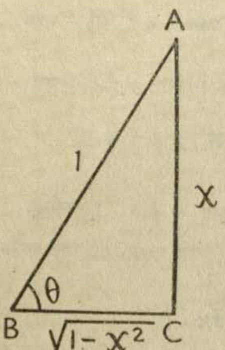
$\sec\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{x}$

$\therefore \theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ = ইত্যাদি।

চিত্রের সাহায্যে আরও সহজে করা যায় : $\sin\theta = x$

$\therefore$ পার্শ্ববর্তী চিত্রে : বিপরীত বাহু $= x$, অতিভুজ $= 1$ $\therefore$ ভূমি $\sqrt{1-x^2}$



$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\therefore \theta = \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\therefore \theta = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x}$ $\therefore \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\frac{15}{17} = \tan^{-1}\frac{8}{15}$

ধর, $\cos^{-1}\frac{15}{17} = \theta$ $\therefore \cos\theta = 15/17$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-(15/17)^2}}{15/17} = \frac{8/17}{15/17} = \frac{8}{15}$$

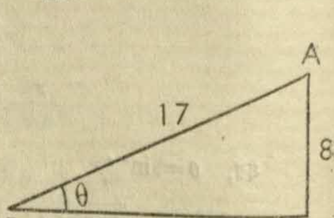
$$\therefore \cos^{-1}\frac{15}{17} = \theta = \tan^{-1}\frac{8}{15}$$

চিত্র সাহায্যে : চিত্র থেকে, স্পষ্টত

ভূমি $= 15$, অতিভুজ $= 17$

$\therefore$ বিপরীত বাহু $= \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

$\therefore \tan\theta = \frac{8}{15}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{8}{15}$



$\therefore \cos^{-1}\frac{15}{17} = \tan^{-1}\frac{8}{15}$

উদা. 3. দেখাও যে, $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \pi/2$

(ক: বি:, 1941)

ধর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\theta_1 \quad \therefore \sin\theta_1=\frac{4}{5} \quad \therefore \quad \tan\theta_1=\frac{4/5}{\sqrt{(1-(4/5)^2}}=\frac{4}{3}$

$\sin^{-1}\frac{5}{13}=\theta_2 \quad \therefore \sin\theta_2=\frac{5}{13} \quad \therefore \quad \tan\theta_2=\frac{5/13}{\sqrt{1-(5/13)^2}}=\frac{5}{12}$

$\sin^{-1}\frac{16}{65}=\theta_3 \quad \therefore \sin\theta_3=\frac{16}{65} \quad \therefore \quad \tan\theta_3=\frac{16/65}{\sqrt{1-(16/65)^2}}=\frac{16}{63}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\theta_1+\theta_2+\theta_3$

$$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{4/3+5/12}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}=\pi/2$$

উদা. 4. দেখাও যে, $\tan^{-1}5-\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{7}{9}=\pi/4$

বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{5-3}{1+5.3}+\tan^{-1}\frac{7}{9}$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{7}{9}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{9}}=\tan^{-1}1=\pi/4$$

উদা. 5. দেখাও যে, $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\pi/4$

(ক.বি. 1952)

বামপক্ষ $=\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)+\left(\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}\right)$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}+\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{4}{7}+\tan^{-1}\frac{3}{11}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}}=\tan^{-1}1=\pi/4$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{৫}=\sin^{-1}\frac{3}{৫}$

ধর, $\cos^{-1}\frac{63}{65}=\theta \quad \therefore \cos\theta=\frac{63}{65}$

$$\therefore \tan\theta=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-(63/65)^2}}{63/6৫}=\frac{16}{65}$$

$$\therefore \theta=\tan^{-1}\frac{16}{65}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{16}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}$

$$=\tan^{-1}\frac{16}{65}+\tan^{-1}\frac{2\frac{1}{5}}{1-(1/5)^2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{16}{6৫}+\tan^{-1}\frac{5}{12}$$

$$=\tan^{-1}\frac{16/65+5/12}{1-\frac{16}{65}\cdot\frac{5}{12}}$$

$$=\tan^{-1}\frac{3}{4}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}$

(কঃ বিঃ 1955)

দক্ষিণ পক্ষ $=(\tan^{-1}a-\tan^{-1}b)+(\tan^{-1}b-\tan^{-1}c)$

$=\tan^{-1}a-\tan^{-1}c=$ বামপক্ষ

উদা. 8. দেখাও যে, $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$ (বেনারস, 1954)

বামপক্ষ $=\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-(1/3)^2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}} = \tan^{-1} 1 = \pi/4$$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ (ক: বি: 1943)

ধর, $\tan^{-1}\sqrt{x} = \theta \quad \therefore \tan\theta = \sqrt{x}$

এখন $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-x}{1+x}$

$$\therefore \quad 2\theta = \cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \theta = \tan\sqrt{x}$$

উদা. 10. দেখাও যে $\sec^2(\tan^{-1} 2) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} 3) = 15$

(ক: বি: 1956)

ধর, $\tan^{-1} 2 = A \qquad \therefore \tan A = 2$

$\cot^{-1} 3 = B \qquad \therefore \cot B = 3$

বামপক্ষ $= \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 B$

$= (1+\tan^2 A) + (1+\cot^2 B)$

$= (1+2^2) + (1+3^2) = 5 + 10 = 15$

উদা. 11. দেখাও যে, $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1} x = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(উ: প্র: বো. 1950)

ধর, $\cot^{-1} x = \alpha \qquad \therefore \cot\alpha = x$

$$\therefore \quad \sin\cot^{-1} x = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \quad \tan^{-1}\sin\cot^{-1} x = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \beta \text{ (ধর)}$$

$$\therefore \quad \tan\beta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \cos \tan^{-1} \sin \cot^{-1}x = \cos\beta$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}} = \left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

উদা. 12. যদি $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \pi$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $x+y+z = xyz$. (ক: বি: 1954)

শর্তানুসারে, $\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z) = \tan\pi$

বা, $\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy} = 0$

$\therefore$ $x+y+z-xyz = 0$ বা $x+y+z = xyz$

বিকল্প পদ্ধতি : ধর $\tan^{-1} x = \alpha$, $\tan^{-1} y = \beta$, $\tan^{-1} z = \gamma$

$\therefore$ $\tan\alpha = x$, $\tan\beta = y$, $\tan\gamma = z$

শর্তানুসারে, $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

বা, $(\alpha+\beta) = \pi - \gamma$

$\therefore$ $\tan(\alpha+\beta) = \tan(\pi-\gamma) = \tan\gamma$

বা, $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -\tan\gamma$

বা, $\frac{x+y}{1-xy} = -z$ $\therefore$ $x+y+z = xyz$

উদা. 13. সমাধান কর : $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ $\tan^{-1} \frac{2x+3x}{1-6x^2} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ $\frac{2x+3x}{1-6x^2} = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

$\therefore$ $6x^2 - 5x - 1 = 0$

বা, $(6x+1)(x-1) = 0$ $\therefore$ $x = 1$ বা $-\frac{1}{6}$

$x=-\frac{1}{6}$ দ্বারা সমীকরণ সিদ্ধ হয় না, কেননা বামপক্ষস্থ দুটি কোণের মুখ্যমান ঋণাত্মক ∴ নির্ণেয় সমাধান $x=1$

উদা. 14, সমাধান কর : $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

(কঃ বিঃ 1947)

$$\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}=2\tan^{-1}a\ ;\ \sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}b$$

$$\therefore\ 2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b=2\tan^{-1}x$$

$$\therefore\ \tan^{-1}x=\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a+b}{1-ab}$$

$$\therefore\quad x=\frac{a+b}{1-ab}$$

উদাহরণমালা 7

দেখাও যে,

1. $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{5}{13}$
2. $\tan^{-1}\frac{15}{8}=\mathrm{cosec}^{-1}\frac{17}{15}$
3. $\sec(\tan^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$
4. $\tan(\sec^{-1}x)=\sqrt{x^2-1}$
5. $\tan^{-1}2+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\pi/2$
6. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=1$ (বেনারস, 1949)
7. $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\cot^{-1}\frac{24}{7}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$
8. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{5}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{11}$
9. $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}+\tan^{-1}\frac{1}{18}=\cot^{-1}3$
10. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$ (বেনারস, 1948)
11. $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$ (কঃ বিঃ 1951)
12. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{4}{5}=\pi/2$
13. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\pi/4$ (বেনারস, 1950)
14. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi=2(\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$
15. $\tan^{-1}\dfrac{1}{a+b}+\tan^{-1}\dfrac{b}{a^2+ab+1}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$ (কঃ বিঃ 1949)

16. $\tan^{-1}p - \tan^{-1}r = \tan^{-1}\dfrac{p-q}{1+pq} + \tan^{-1}\dfrac{q-r}{1+qr}$

17. $\cos^{-1}a + \cos^{-1}b = \sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2})$

18. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \sin^{-1}\dfrac{x+y}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$

19. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$ (ক: বি: 1942)

20. $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} + \cos\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

$= 2\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} = 2\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$

21. $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-b}} = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{a-b}} = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{x-b}{a-x}}$

22. $\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{a+x}{2a}} = \cos^{-1}\sqrt{\dfrac{a-x}{2a}} = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

23. $\tan(2\tan^{-1}x) = 2\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}x^3)$

24. $\sec^2(\tan^{-1}3) - \text{cosec}^2(\cot^{-1}4) = 27$

25. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \pi/2$ (ক: বি: 1941)

26. $4(\cot^{-1}3 + \text{cosec}^{-1}\sqrt{5}) = \pi$ (ক: বি: 1939)

27. $\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca} + \tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab} = 0$

28. $\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z) = \cot(\cot^{-1}x + \cot^{-1}y + \cot^{-1}z)$

29. $\cot^{-1}\dfrac{ab+1}{a-b} + \cot^{-1}\dfrac{bc+1}{b-c} + \cot\dfrac{ca+1}{c-a} = 0$

30. $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}\dfrac{c-a}{1+ca}$

$= \tan^{-1}\dfrac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} + \tan^{-1}\dfrac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1}\dfrac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$

31. $\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x) = \pi - 2x$

32. $\{\sec(\cot^{-1}x)\}^2 = \{\text{cosec}(\tan^{-1}x)\}^2$

33. $\sin\,\text{cosec}^{-1}\,\cot\,\tan^{-1}x = x$ (বেনারস. 1949)

34. $\cos \tan^{-1} \sin \cot^{-1} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{1-x^2}} = x$

35. যদি $\tan^{-1}a+\tan^{-1}b+\tan^{-1}c=\pi/2$ হয়,
দেখাও যে, $bc+ca+ab=1$

36. যদি $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ হয়,
দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ (কঃ বিঃ 1941)

37. যদি $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ হয়, তবে দেখাও যে,
$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$ (কঃ বিঃ 1944)

38. যদি $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\theta$ হয়,
প্রমাণ কর যে, $x^2-2xy\cos\theta+y^2=\sin^2\theta$.

39. যদি $u=\cot^{-1}\sqrt{\cos\alpha}-\tan^{-1}\sqrt{\cos\alpha}$ হয়, দেখাও $\sin u=\tan^2\frac{\alpha}{2}$

40. যদি $A+B+C=\pi$ হয় এবং $A=\tan^{-1}2$ ও $B=\tan^{-1}3$ হয়,
তবে দেখাও যে, $C=\pi/4$. (কঃ বিঃ 1954)

41. দেখাও যে, $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$
(কঃ বিঃ 1957)

42. সমীকরণ সমাধান কর :

(i) $\tan^{-1}(x+1)-\tan^{-1}(x-1)=\tan^{-1}2$

(ii) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}2x=\dfrac{3\pi}{4}$

(iii) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$

(iv) $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x=\cos^{-1}x\sqrt{3}$

(v) $\cot^{-1}\dfrac{x-2}{x-1}+\cot^{-1}\dfrac{x+2}{x+1}=\pi/4$

(vi) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\pi/4$ (কঃ বিঃ 1947)

(vii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+x}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\dfrac{3}{x^2}$ (আগ্রা, 1947)

(viii) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}+\cot^{-1}\dfrac{1+x^2}{2x}=\pi/3$

(ix) $\cos^{-1}\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

(x) $\cot^{-1}\frac{x^2-1}{2x}+\tan^{-1}\frac{2x}{x^2-1}+\frac{4\pi}{3}=0$

(xi) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=45^\circ$ (আগ্রা, 1949)

(xii) $\tan^{-1}3x=\tan^{-1}x-\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)$

(xiii) $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{4}$ (ক: বি: 1949)

(xiv) $\tan^{-1}\frac{x+1}{x-1}+\tan^{-1}\frac{x-1}{x}=\tan^{-1}(-7)$ (বেনারস, 1957)

(xv) $\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\frac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (আগ্রা, 1943)

(xvi) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=2\pi/3$ (ক: বি: 1940)
$\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\pi/3$

(xvii) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\beta$

(xviii) $\operatorname{cosec}^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}a+\operatorname{cosec}^{-1}b$

43. যদি $\sin[2\cos^{-1}\{\cot(2\tan^{-1}x)\}]=0$ হয়, তবে x কত ?

44. যদি $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$ হয়, দেখাও যে, $2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}$

45. যদি $\tan^{-1}x$, $\tan^{-1}y$, $\tan^{-1}z$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে x, y ও z-এর মধ্যে বীজগাণিতিক সম্বন্ধ বের কর। যদি x, y, z-ও সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, $x=y=z$.

46. মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$ (ক: বি: 1935)

(ii) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

(iii) $\operatorname{cosec}(\tan^{-1}2+\sec^{-1}3)$

(iv) $\tan(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)$

8 ত্রৈকোণমিতিক অভেদাবলী

অষ্টম অধ্যায় (TRIGONOMETRICAL IDENTITIES)

8. 1 তিন বা ততোধিক কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতভিত্তিক বহু প্রয়োজনীয় অভেদ সহজেই প্রতিষ্ঠিত করা যায়, যদি কোণগুলোর মধ্যে কোনরূপ সম্বন্ধ থাকে। এদের মধ্যে আবার যদি কোণগুলো ত্রিভুজের তিন কোণ হয়, অর্থাৎ কোণগুলো A, B, C হলে যদি $A+B+C=180°$ হয়, তবে মূল্যবান অভেদাবলীর সন্ধান পাওয়া যায়। এই অভেদগুলি প্রতিষ্ঠিত করার সময় পূরক ও সম্পূরক কোণের ধর্মগুলো স্মরণ রাখতে হবে। যেমন:

যদি $A+B+C=180°$ হয়, তবে $\sin(B+C)=\sin A$;

$\tan(C+A)=-\tan B$; $\sin C=\sin(A+B)$; $\cos(A+B)=-\cos C$;

$\cos B=-\cos(C+A)$ ইত্যাদি।

অনুরূপভাবে, যদি $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°$ হয়, তবে

$$\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}; \qquad \sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}; \qquad \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{C+A}{2}=\cos\frac{B}{2}; \qquad \tan\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}$$ ইত্যাদি।

নিচে এই জাতীয় প্রয়োজনীয় কতকগুলো অভেদ প্রতিষ্ঠিত করা হল।

8. 2 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, তবে দেখাও

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$ (কঃ বিঃ 1953)

বামপক্ষ $=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C \qquad (\because A+B+C=\pi)$

$=2\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$ $\qquad (\because A+B+C=\pi)$

$= 2\sin C.\ 2\sin A\sin B$

$= 4\sin A\sin B\sin C$

উদা. 2. $A+B+C=\pi$ হলে, দেখাও

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1$$

বামপক্ষ $= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$

$= -2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$ $\qquad (\because A+B+C=\pi)$

$= -2\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}-1$

$= -2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$ $\qquad (\because A+B+C=\pi)$

$= -2\cos C.\ 2\cos A.\cos B-1$

$= -4\cos A\cos B\cos C-1$

উদা. 3. $A+B+C=\pi$; দেখাও যে,

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$ (কঃ বিঃ)

বামপক্ষ $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ $\qquad \left(\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right\}$

$= 2\cos\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right\}$ $\qquad \left(\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2\cos\frac{C}{2}.\ 2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$

$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

উদা. 4. $A+B+C=\pi$ হলে, দেখাও যে,

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(কঃ বিঃ 1952)

বামপক্ষ $= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+1-2\sin^2\frac{C}{2}$

$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}+1$ $\qquad \left(\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}+1$$

$$=2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}+1\quad\left(\because\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C}{2}.\ 2\sin\frac{A}{2}.\ \sin\frac{B}{2}+1$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

উদা. 5. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ (বেনারস, 1955)

$\because\ A+B+C=\pi \quad \therefore\ A+B=\pi-C$

$\therefore\ \tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

বা, $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

বজ্রগুণন ক'রে : $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

দ্রষ্টব্য: $\tan(A+B+C)$-এর সূত্র প্রয়োগ করেও অভেদটি প্রতিষ্ঠিত করা যায়।

উদা. 6. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$ (বেনারস, 1956)

$\because\ A+B+C=\pi \quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

$\therefore\ \tan\frac{A+B}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$

$\therefore\ \tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}=1$

বা, $\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}\tan\frac{C}{2}=1$

বজ্রগুণন ক'রে এবং সাজিয়ে :

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$$

দ্রষ্টব্য : $\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$ সূত্র প্রয়োগ করেও এটি করা যায়।

উদা. 7. $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+C}{4}$$

(পাটনা, 1939)

$$\text{দক্ষিণ পক্ষ}=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{2\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\right\}$$

$$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}\right\}$$

$$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\left\{\cos\frac{B-C}{4}-\cos\frac{\pi+A}{4}\right\}$$

$$(\because\ 2\pi-\overline{B+C}=\pi+\pi-\overline{B+C}=\pi+A)$$

$$=1+2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}-2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}.$$

$$=1+2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}-\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=1+\left(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)-1+\sin\frac{A}{2}$$

$$=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

উদা. 8. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$$

(বেনারস, 1951 ; পাটনা, 1944)

দক্ষিণ পক্ষ $= 2\cos\frac{\pi - A}{4}\left\{\cos\frac{2\pi - (B+C)}{4} + \cos\frac{B-C}{4}\right\}$

$= 2\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{\pi + A}{4} + 2\cos\frac{\pi - A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$

$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{A}{2}\right) + 2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$

$= \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

উদা. 9. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$
(পাটনা, 1945)

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}(1-\cos 2A) + \frac{1}{2}(1-\cos 2B) + 1 - \cos^2 C$

$= 2 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C$

$= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C$

$= 2 + \cos C\cos(A-B) - \cos^2 C$

$= 2 + \cos C\{\cos(A-B) - \cos C\}$

$= 2 + \cos C\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$

$= 2 + \cos C . 2\cos A\cos B$

$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

উদা. 10. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$
(কঃ বিঃ 1959)

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}(1+\cos 2A) + \frac{1}{2}(1+\cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\{\cos(A-B) - \cos C\}$

$= 1 - \cos C\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$

$= 1 - \cos C . 2\cos A\cos B$

$= 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

উদা, 11. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$ (আগ্রা, 1955)

বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(1-\cos A)+\frac{1}{2}(1-\cos B)+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1-\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$=1-\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right\}$

$=1-\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right\}$

$=1-\sin\frac{C}{2}.2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$

$=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

উদা. 12. যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$ (কঃ বিঃ 1955,)

$\because\ A+B=\pi-C$

$\therefore\ \cot(A+B)=-\cot C$

বা, $\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}=-\cot C.$

বজ্রগুণন ক'রে এবং সাজিয়ে,

$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$

উদা. 13. $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$ (কঃ বিঃ 1949)

বামপক্ষ $= \dfrac{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$

$= \dfrac{1}{2} \dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A \sin B \sin C}$

$= \dfrac{1}{2} \dfrac{4 \sin A \sin B \sin C}{\sin A \sin B \sin C} = 2$ [উদা 1. দেখ]

উদা. 14. যদি $\alpha + + \gamma = \frac{\pi}{2}$, প্রমাণ কর যে,

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - 2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. (কঃ বিঃ 1943)

(উদা. 11 যদি $A = 2\alpha$, $B = 2\beta$, $C = 2\gamma$)

উদা. 15. যদি $\alpha + \beta = \gamma$, দেখাও যে,

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

বামপক্ষ $= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos\gamma \cos(\alpha - \beta) + \cos^2\gamma$ $(\because \alpha + \beta = \gamma)$

$= 1 + \cos\gamma \{\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma\}$

$= 1 + \cos\gamma \{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\}$

$= 1 + \cos\gamma . 2 \cos\alpha \cos\beta$

$= 1 + 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

উদা. 16. যদি $x + y + z = xyz$, দেখাও যে,

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

ধর, $x = \tan A$, $y = \tan B$, $z = \tan C$;

$\therefore$ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\therefore$ $\tan(A + B + C) = 0$

$\therefore$ $A + B + C = n\pi$, n একটি পূর্ণসংখ্যা

$\therefore$ $\tan(3A + 3B + 3C) = 0$

$$\therefore \quad \tan 3A + \tan 3B + \tan 3C = \tan 3A \tan 3B \tan 3C$$

কিন্তু, $\tan 3A = \dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. ইত্যাদি।

উদাহরণমালা ৪

যদি $A+B+C=\pi$, দেখাও যে,

1. $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$
2. $\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = -4 \sin A \cos B \cos C$
3. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C$
4. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
5. $\sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ (আগ্রা, 1951)
6. $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - 1$
7. $\dfrac{\sin B + \sin C - \sin A}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$
8. $\dfrac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$
9. (i) $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$
   (ii) $\tan 3A \tan 2A \tan A = \tan 3A - \tan 2A - \tan A$ (বেনারস, 1957)
10. $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B)$
    $= \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$
11. $\dfrac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \dfrac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \dfrac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1$
12. $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ (কঃ বিঃ 1957)
13. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$ (কঃ বিঃ 1960)

14. $\dfrac{\tan B+\tan B+\tan C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\dfrac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}$

15. (i) $\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C$

(বেনারস, 1949)

16. $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

17. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

$=4\sin A\sin B\sin C$ (আগ্রা, 1953)

18. $\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$

$=4\sin\frac{B-C}{4}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ (বেনারস, 1950)

19. $\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan A}\cdot\dfrac{\tan C+\tan A}{\tan B}\cdot\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan C}$

$=\sec A\sec B\sec C$

20. $\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C+A}{2}$

$=4\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}$

21. $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

22. $\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$

$+\sin C\cos A\cos B=\sin A\sin B\sin C$

23. $(\tan A+\tan B+\tan C)(\cot A+\cot B\cot C)$

$=1+\sec A\sec B\sec C$

24. যদি $A+B+C=\pi$, এবং $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$ হয়,

তবে দেখাও যে, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$

যদি $A+B+C=\frac{\pi}{2}$, হয় তবে দেখাও যে,

25. $\tan B \tan C+\tan C \tan A+\tan A \tan B=1$

26. $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C}=\cot A \cot B$

27. $\dfrac{\tan B+\tan C}{\cot B+\cot C}+\dfrac{\tan C+\tan A}{\cot C+\cot A}+\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=1$

28. (i) $\sin A+\sin B+\sin C=1+4 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2} \sin \frac{A+B}{2}$

(ii) $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A \cot B \cot C$ (পাটনা, 1943)

29. $\sin A \sin (B-C)+\sin B \sin (C-A)+\sin C \sin (A-B)=0$

30. যদি $\alpha=\beta+\gamma$, দেখাও যে, $\sin (\alpha+\beta+\gamma)+\sin (\alpha+\beta-\gamma)$
$+\sin (\alpha-\beta+\gamma)=4 \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$

31. যদি A, B, C, D একটি চতুর্ভুজের কোণ চতুষ্টয় হয় তবে, দেখাও যে,

(i) $\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\cot A+\cot B+\cot C+\cot D}=\tan A \tan B \tan C \tan D.$

(ii) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=4 \cos \frac{A+B}{2}.$

$\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}.$

32. যদি $\cos (\alpha+\beta) \sin (\gamma+\delta)=\cos (\alpha-\beta) \sin (\gamma-\delta)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cot \alpha \cot \beta \cot \gamma=\cot \delta$

33. যদি $A+B+C=2S$ হয়, দেখাও যে,

(i) $\sin S \sin (S-A)+\sin (S-B) \sin (S-C)=\sin B \sin C$

(ii) $\sin (S-A)+\sin (S-B)+\sin (S-C)-\sin S$
$=4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(iii) $\cos^2 S+\cos^2 (S-A)+\cos^2 (S-B)+\cos^2 (S-C)$
$=2+2 \cos A \cos B \cos C$ (আগ্রা. 1956)

34. যদি $A+B+C=0$, দেখাও যে,
$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=(1+\cos A+\cos B+\cos C)$$

35. যদি $\sin A+\sin B+\sin C=0$, দেখাও যে,
$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-12\sin A\sin B\sin C$$

36. যদি $\cos A+\cos B+\cos C=0$, দেখাও যে,
$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cos B\cos C$$
(উদা. 35 এবং 36-এ $\sin 3A$ এবং $\cos 3A$ সূত্র প্রয়োগ কর)

37. যদি $\cos(A+B)\sin(C+D)=\cos(A-B)\sin(C-D)$,
দেখাও যে, $\cot A\cot B\cot C=\cot D$

38. দেখাও যে, $\tan(\beta-\gamma)+\tan(\gamma-\alpha)+\tan(\alpha-\beta)$
$$=\tan(\beta-\gamma)\tan(\gamma-\alpha)\tan(\alpha-\beta)$$

39. দেখাও যে, $\cos^2(\beta-\gamma)+\cos^2(\gamma-\alpha)+\cos^2(\alpha-\beta)$
$$=1+2\cos(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta)$$

40. যদি $x+y+z=xyz$, দেখাও যে,
$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

41. যদি $A+B+C=\pi$, প্রমাণ কর যে,
$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$
(পাটনা, 1942)

42. যদি $\alpha+\beta+\gamma=n\pi$, দেখাও যে,
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$$

43. যদি $A+B+C=n\pi$ ($n=0$ বা একটি পূর্ণসংখ্যা),
দেখাও যে, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

9
নবম অধ্যায়
ত্রিভুজের গুণাবলী
(PROPERTIES OF TRIANGLES)

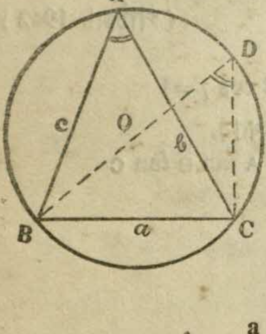
9.1 এই অধ্যায়ে ত্রিভুজের কোণ তিনটিকে আমরা A, B ও C দ্বারা এবং ঐ সকল কোণের বিপরীত বাহুগুলোকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা প্রকাশ কর।

9.2 ত্রিভুজের বাহুগুলো স্ব স্ব বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী (In a triangle the sides are proportional to sines of opposite angles)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

ধরি, ABC যে কোন একটি ত্রিভুজ ; এর পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্ধ R ; ABC ত্রিভুজ সূক্ষ্মকোণী, সবগুলো কোণই সূক্ষ্মকোণ।

BD ব্যাস এঁকে DC যুক্ত কর। $\angle BCD$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = 1 সমকোণ এবং $BD=2R$।



$\angle BDC=\angle BAC=\angle A$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলে)

$\therefore \sin A=\sin BDC=BC/BD=a/2R$

একইভাবে AE ব্যাস এঁকে CE যোগ করে দেখান যায় যে, $\sin B=b/2R$।

আবার BE যোগ করে দেখান যায় যে,

$\sin C=c/2R$

$$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad ...(1)$$

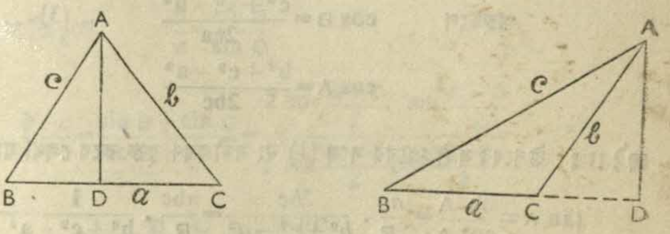
দ্রষ্টব্য : এখানে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সম্পর্কটি প্রমাণ করা হল। কিন্তু এটি যে কোন ত্রিভুজের পক্ষেই সত্যি। ছাত্রছাত্রীরা স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত করবে।

9.3 দেখাও যে, যে কোন ত্রিভুজে

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}\cos C + \mathbf{c}\cos B$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{c}\cos A + \mathbf{a}\cos C$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\cos B + \mathbf{b}\cos A$$

ধর, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রথম চিত্রে, ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী; দ্বিতীয় চিত্রে, ত্রিভুজটি স্থূলকোণী, $\angle C$ কোণ স্থূলকোণ।

BC-র উপর (প্রয়োজনে বাড়িয়ে) AD লম্ব টান।



চিত্র

প্রথম চিত্র থেকে: $BC = BD + CD = AB\cos ABD + AC\cos ACD$

$$\therefore \quad a = c\cos B + b\cos C$$

দ্বিতীয় চিত্র থেকে: $BC = BD - CD = AB\cos ABD - AC\cos ACD$

$$\therefore \quad a = c\cos B - b\cos(\pi - C)$$
$$= c\cos B + b\cos C$$

$\therefore$ উভয় ক্ষেত্রেই $\mathbf{a} = \mathbf{b}\cos C + \mathbf{c}\cos B$

অনুরূপভাবে, $\mathbf{b} = \mathbf{c}\cos A + \mathbf{a}\cos C$

$\mathbf{c} = \mathbf{a}\cos B + \mathbf{b}\cos A$ ...(2)

9.4 ত্রিভুজের যে কোন কোণের কোসাইনকে বাহু দ্বারা প্রকাশ করা:

$$\cos A = \frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{a}^2}{2\mathbf{bc}}$$

$$\cos B = \frac{\mathbf{c}^2 + \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2}{2\mathbf{ca}}$$

$$\cos C = \frac{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{c}^2}{2\mathbf{ab}}$$

পূর্ব অনুচ্ছেদের চিত্রানুযায়ী, একটি জ্যামিতিক উপপাদ্য প্রয়োগ করে, লেখা যায় :

প্রথম চিত্র থেকে : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

বা $c^2 = b^2 + a^2 - 2a.\ b\cos C$

দ্বিতীয় চিত্র থেকে : $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$

$= b^2 + a^2 + 2a.b\cos(\pi - C)$

বা $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

∴ উভয় ক্ষেত্রেই $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

অনুরূপে
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \qquad \ldots (3)$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

দ্রষ্টব্য : উপরের সমীকরণের সঙ্গে (1) নং সমীকরণ যুক্ত করে লেখা যায় :

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{2R} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$$

$$\tan B = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}; \quad \tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

9.5 1 নং, 2 নং 3 নং সেটের সমীকরণগুলো নিরপেক্ষ নয় ; এবং $A + B + C = \pi$ এই ধর্ম ব্যবহার করে একটি সেটের সূত্র থেকে সহজেই অন্য দু-সেট সূত্র পাওয়া যায়। যেমন :

$$\sin A = \sin(\pi - \overline{B + C}) = \sin(B + C)$$

$$= \sin B\cos C + \cos B\sin C$$

$$\therefore \quad 1 = \frac{\sin B}{\sin A}\cos C + \cos B.\frac{\sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{b}{a}\cos C + \frac{c}{a}\cos B$$

$$\therefore \quad a = b\cos C + c\cos B;$$

অনুরূপভাবে $b = c\cos A + a\cos C$

$c = a\cos B + b\cos A$

সমীকরণ তিনটিকে যথাক্রমে a, b ও c দিয়ে গুণ করে

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$$

$\therefore \quad \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ইত্যাদি।

9.6 যে কোন ত্রিভুজের পক্ষে প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

যে কোন ত্রিভুজে, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$

$$\therefore \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\ \sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$= \tan\frac{B-C}{2}.\ \cot\frac{B+C}{2}$$

$$= \tan\frac{B-C}{2}.\ \tan\frac{A}{2} \qquad \left[\because \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad \tan\frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c}.\ \cot\frac{A}{2} \\ \text{অনুরূপে,}\quad \tan\frac{C-A}{2} &= \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2} \\ \tan\frac{A-B}{2} &= \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(4)$$

9.7 ত্রিভুজের অর্ধ-কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে বাহুর দ্বারা প্রকাশ করা : (Trigonometrical ratios of half-angles in terms of sides).

আমরা জানি, $2\sin^2\dfrac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$$

ত্রিভুজের পরিসীমাকে $2s$ দ্বারা প্রকাশ করলে $\quad s=\dfrac{a+b+c}{2}$

$$\therefore \quad a-b+c=2s-2b=2\,(s-b)$$

$$a+b-c=2s-2c=2\,(s-c)$$

$$\therefore \quad 2\sin^2 A/2=\frac{2(s-b).\,2(s-c)}{2bc}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{অনুরূপে,}\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-c)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\ \ldots (5)$$

($A/2$ সর্বদা সূক্ষ্মকোণ, $\sin A/2$ ধনাত্মক)

আবার, $$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=2\frac{s.2(s-a)}{2bc}\qquad\left[\because\ s=\frac{a+b+c}{2}\right]$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \text{অনুরূপে,}\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\ \ldots (6)$$

(শুধু ধনাত্মক মান নেওয়া হল কেননা $A/2$ সর্বদাই সূক্ষ্মকোণ)

আবার, $$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A/2}{\cos A/2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \text{অনুরূপে}\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\ \ldots (7)$$

9.8 ত্রিভুজের কোণের সাইনকে বাহুগুলোর দ্বারা প্রকাশ করা : (To express sine of an angle in terms of the sides)

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin A &= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \text{অনুরূপে}\quad \sin B &= \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \sin C &= \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}\right\} \quad \dots (8)$$

বিকল্প পদ্ধতি : $\sin^2 A = 1-\cos^2 A = (1+\cos A)(1-\cos A)$

$$= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}$$

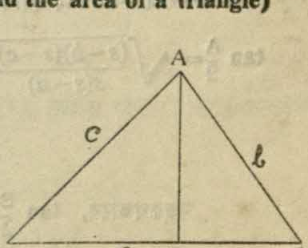
$$= \frac{2s\,.\,2(s-a)\,.\,2(s-c)\,.\,2(s-b)}{4b^2c^2}$$

$$\therefore\quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{ইত্যাদি}$$

9.9 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (To find the area of a triangle)

ধর, ABC একটি ত্রিভুজ। এর ক্ষেত্রফল বের করতে হবে।

ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A থেকে বিপরীত বাহু BC-এর উপর AD লম্ব টান।



চিত্র

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$\triangle = \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা

$= \frac{1}{2}BC\,.\,AD = \frac{1}{2}BC\,.\,AB\sin B = \frac{1}{2}AC\sin B$

$$\therefore \triangle = \tfrac{1}{2}\,ca \sin B$$

অনুরূপভাবে,
$$\left.\begin{aligned} \triangle &= \tfrac{1}{2}\,ab \sin C \\ \triangle &= \tfrac{1}{2}\,bc \sin A \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9)$$

অর্থাৎ **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × দুই বাহুর গুণফল × অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন**

আবার, $\triangle = \frac{1}{2}\,bc \sin A$

$$= \tfrac{1}{2}\,bc \cdot \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

[8নং সমীকরণ ব্যবহার করে]

$$\therefore \quad \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \ldots (10)$$

অর্ধ-পরিসীমা $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ উপরের সমীকরণে বসিয়ে

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

বা
$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4} \quad \ldots (11)$$

আবার, পরিব্যাসার্ধ R হলে,

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\,bc \sin A = \tfrac{1}{2}\,bc \cdot \frac{a}{2R} \quad (\because \; a/\sin A = 2R)$$

$$\therefore \quad \triangle = \frac{abc}{4R} \quad \ldots (12)$$

দ্রষ্টব্য : $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 8নং সমীকরণ সেটে বসিয়ে

$$\sin A = 2\triangle/bc\,;\quad \sin B = 2\triangle/ca\,;\quad \sin C = 2\triangle/ab \quad \ldots (12)$$

$\triangle$-ব্যবহার করে 7নং সমীকরণ সেটকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়।

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\cdot\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$= \frac{(s-b)(s-c)}{\triangle}$$

অনুরূপভাবে,
$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{B}{2} &= \frac{(s-c)(s-a)}{\triangle} \\ \tan\frac{C}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)}{\triangle} \end{aligned}\right. \quad \ldots (13)$$

অনুরূপে,
$$\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\triangle};\quad \cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\triangle};\quad \cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\triangle} \quad \ldots (14)$$

9.10 ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ (Circum-radius of a triangle)

প্রথম অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়েছি যে, R পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ হলে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\therefore\quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\triangle}\qquad\ldots(15)$$

দ্রষ্টব্য : 12 নং সমীকরণ থেকে সরাসরি লেখা যায় : $R=abc/4\triangle$.

9.11 ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius of a triangle)

ধরি, I হল ABC ত্রিভুজের অন্তর্কেন্দ্র। r হল অন্তর্ব্যাসার্ধ। D, E ও F বিন্দুতে যথাক্রমে অন্তর্বৃত্তটি ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুকে স্পর্শ করেছে, কাজেই ID, IE ও IF যথাক্রমে বাহুগুলোর উপর লম্ব এবং প্রত্যেকে অন্তর্ব্যাসার্ধ r. IA, IB ও IC যুক্ত কর।

এখন $\triangle ABC$

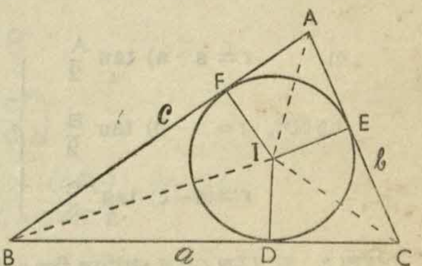
$=\triangle BIC+\triangle CIA+\triangle AIB$

$=\frac{1}{2}BC.ID+\frac{1}{2}CA.IE+\frac{1}{2}AB.IF$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs$

$\therefore\quad \triangle=rs$ বা $r=\frac{\triangle}{s}$ ...(16)



চিত্র

অন্তর্ব্যাসার্ধকে একটি বাহু এবং অর্ধকোণের বৃত্তীয় অনুপাতেও প্রকাশ করা যায়।

I অন্তর্কেন্দ্র বলে, $\angle IBD=B/2$, $\angle ICD=C/2$

$$\therefore\quad BD=r\cot\frac{B}{2};\quad CD=r\cot\frac{C}{2}$$

$$\therefore\quad a=BC=BD+DC$$

$$=r\left(\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{C}{2}\right)$$

$$=r\left(\frac{\cos B/2}{\sin B/2}+\frac{\cos C/2}{\sin C/2}\right)$$

$$=r\ \frac{\cos B/2 . \sin C/2+\sin B/2 \cos C/2}{\sin B/2 \sin C/2}$$

$$=r\ \frac{\sin (B+C)/2}{\sin B/2 \sin C/2}\quad \left(\because\ \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

$$=r\frac{\cos A/2}{\sin B/2 \sin C/2}\quad \therefore\quad r=\frac{a \sin B/2 \sin C/2}{\cos A/2}$$

কিন্তু $a=2R \sin A=4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$

$$\therefore\quad r=4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \qquad \ldots (17)$$

আবার, চিত্র থেকে, $AE=AF$; $BD=BF$; $CD=CE$

$\therefore\quad BD+CD+AF=\frac{1}{2}(a+b+c)=s$

$\therefore\quad AF=s-(BD+CD)=s-a$; কিন্তু $\frac{IF}{AF}=\tan A/2$

বা $\quad r=(s-a) \tan \frac{A}{2}$

অনুরূপে, $r=(s-b) \tan \frac{B}{2}$ $\quad \ldots (18)$

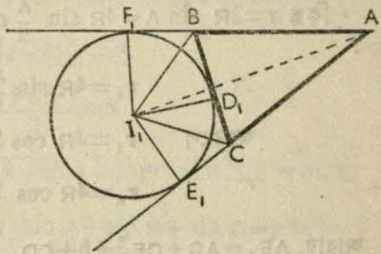
$\quad r=(s-c) \tan \frac{C}{2}$

দ্রষ্টব্য ঃ অন্তর্কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুগুলোর দুরত্ব হল IA, IB, IC.

এখন $IA=r \operatorname{cosec} A/2$; $IB=r \operatorname{cosec} B/2$; $IC=r \operatorname{cosec} C/2$

9.12 ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধগুলো নির্ণয় করা ঃ
(To find the ex-radii of a tiangle)

ধর, ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তটির (অর্থাৎ BC বাহুকে এবং বর্ধিত AB ও AC বাহুকে যে বহির্বৃত্তটি স্পর্শ করেছে তার) কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্ধ r_1. D_1, E_1, এবং F_1 হল স্পর্শ বিন্দু। অতএব I_1D_1, I_1E_1, I_1F_1, যথাক্রমে BC এবং বর্ধিত AC ও AB বাহুর উপর লম্ব।



এক্ষণে, Δ = ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

= ক্ষেত্র ABI_1C − ক্ষেত্র BI_1C

= (ক্ষেত্র BI_1A + ক্ষেত্র CI_1A) − ক্ষেত্র BI_1C

$= \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br_1 - \frac{1}{2}ar_1$

$= \frac{1}{2}r_1(c+b-a)$

$= \frac{1}{2}r_1 . 2(s-a) = (s-a)r_1$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$$

অনুরূপভাবে,
$$r_2 = \frac{\Delta}{s-b} \qquad \ldots(19)$$
$$r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$$

আবার যেহেতু I_1 বিন্দুটি $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদ বিন্দু

$\therefore \quad \angle I_1BD_1 = 90^\circ - \frac{B}{2}$; $\angle I_1CD_1 = 90^\circ - \frac{C}{2}$

$\therefore \quad a = BC = BD_1 + CD_1$

$$= r_1 \tan\frac{B}{2} + r_1 \tan\frac{C}{2}$$

$$= r_1\left(\frac{\sin B/2}{\cos B/2} + \frac{\sin C/2}{\cos C/2}\right)$$

$$= r_1 \frac{\sin B/2 . \cos C/2 + \cos B/2 . \sin C/2}{\cos B/2 \cos C/2}$$

$$= r_1 \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= r_1 \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \quad \left(\because \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2} = 90^\circ\right)$$

$$\therefore \quad r_1 = a\frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}};$$

কিন্তু $a=2R\sin A=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad & r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ \text{অনুরূপে}\quad & r_1=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\ & r_3=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (20)$$

আবার, $AE_1=AC+CE_1=b+CD_1$ $\quad(\because\ CE_1=CD_1)$

এবং $AF_1=AB+BF_1=c+BD_1$ $\quad(\because\ BF_1=BD_1)$

কিন্তু $AE_1=AF_1$

$\therefore$ যোগ করে $2AE_1=b+c+BD_1+CD_1=b+c+BC=b+c+a=2s$

$$\therefore\ AE_1=s$$

এক্ষণে, $\triangle AI_1E_1$ থেকে, $I_1E_1=AE_1\tan I_1AE_1$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad & r_1=s\tan\frac{A}{2} \\ \text{অনুরূপে,}\quad & r_2=s\tan\frac{B}{2} \\ & r_3=s\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (21)$$

দ্রষ্টব্য : বহির্কেন্দ্র থেকে কৌণিক বিন্দুগুলোর দূরত্ব হল

$$I_1A=r_1\ \text{coses}\frac{A}{2}=4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$I_1B=r_1\sec\frac{B}{2};\ I_1C=r_1\sec\frac{C}{2}$$

একই ভাবে I_2, I_3 থেকে কৌণিক বিন্দুগুলোর দূরত্বও বের করা যায়।

9.13 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative Examples)

উদা. 1. $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ এবং $A=30^\circ$ হলে, B-এর মান বের কর।

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\quad\therefore\ \sin B=\frac{b}{a}\sin A$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{3}\sin 30^\circ=\sqrt{3}.\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ A=60^0\ \text{বা}\ 120^\circ$$

উদা. 2. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি 5, 6, 7 হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত ?

ক্ষেত্রফল $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

এখানে $s=\frac{5+6+7}{2}=9$

$$\therefore \quad \Delta=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9.4.3.2}=6\sqrt{6}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজে $\sin A+\sin B+\sin C=s/R$

$$\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\therefore \quad \sin A=a/2R, \ \sin B=b/2R, \ \sin C=c/2R$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{2R}(a+b+c)$$

$$=\frac{2s}{2R}=\frac{s}{R} \quad (\because \ 2s=a+b+c=\text{পরিসীমা})$$

উদা. 4. দেখাও যে, কোন ত্রিভুজে

$$a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$$

$$\because \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad \therefore \quad 2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$$

অনুরূপভাবে, $2ca\cos B=c^2+a^2-b^2$; $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$

$\therefore$ দক্ষিণপক্ষ $=(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$

$=a^2+b^2+c^2$ = বামপক্ষ।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, যে কোন ত্রিভুজে

$$(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(b+c+a-2a)\tan\frac{A}{2}$$

$$=2(s-a)\tan\frac{A}{2}$$

$$=2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=2\sqrt{\frac{(s-a(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$=\frac{2}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{2\Delta}{s}=2r$$

অনুরূপে দেখান যায় : $(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=2r$; $(a+b-c)\tan\frac{C}{2}=2r$

বিকল্প প্রমাণ : $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=2(s-a)\tan\frac{A}{2}$

$=2r\ \ [\because\ r=(s-a)\tan A/2]$

= ইত্যাদি

উদা. 6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে x^2+x+1, $2x+1$ এবং x^2-1; বৃহত্তম কোণের পরিমাণ কত? (কঃ বিঃ 1910)

ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণই বৃহত্তম। কাজেই প্রথমে বৃহত্তম বাহু ঠিক করতে হবে।

ত্রিভুজের বাহু ধনাত্মক। $\therefore\ x^2-1$ ধনাত্মক $\therefore\ x>1$

$x>1$ হলে, $(x^2+x+1)-(2x+1)\ =\ x^2-x>0$

$(x^2+x+1)-(x^2-1)\ =\ x+2>0$

$\therefore\ x^2+x+1$ বৃহত্তম বাহু এবং এর বিপরীত কোণ বৃহত্তম কোণ, θ (ধর)

$$\cos\theta=\frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\tfrac{1}{2}\ \ \therefore\ \ \theta=120^\circ$$

উদা. 7. যদি $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ হয়, তবে দেখাও যে ত্রিভুজের বাহুগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

$$\therefore\ 2a\cos^2\frac{C}{2}+2c\cos^2\frac{A}{2}=3b$$

$$\therefore\ a(1+\cos C)+c(1+\cos A)=3b$$

বা, $a+c+(a\cos C+c\cos A)=3b$

বা $a+c+b=3b\ \ \ \therefore\ a+c=2b$

$\therefore$ **a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।**

উদা. 8. দেখাও যে, $\frac{bc - r_2 r_3}{r_1} = \frac{ca - r_3 r_1}{r_1} = \frac{ab - r_1 r_2}{r_3}$

$$r_2 r_3 = \frac{\triangle}{s-b} \cdot \frac{\triangle}{s-c} = \frac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)} = s(s-a)$$

$$[\because \ \triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,]$$

$$\therefore \ bc - r_2 r_3 = \tfrac{1}{4}[4bc - 2s.(2s-2a)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[4bc - (a+b+c)(b+c-a)]$$

$$= \tfrac{1}{4}[4bc + a^2 - (b+c)^2]$$

$$= \tfrac{1}{4}[a^2 - (b-c)^2]$$

$$= \tfrac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= (s-b)(s-c)$$

$$\therefore \ \frac{bc - r_2 r_3}{r_1} = \frac{(s-b)(s-c)}{r_1} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\triangle} = \frac{\triangle}{s} = r$$

$$[\because \ \triangle/(s-a) = r_1]$$

অনুরূপে, অন্য দুটির অনুপাতও r-এর সমান দেখানো যায়।

উদা. 9. দেখাও যে, কোন ত্রিভুজে

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$$

(আগ্রা, 1956)

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A = \frac{b^2-c^2}{a^2}.\,2\sin A\cos A = \frac{b^2-c^2}{a^2}.2.\frac{a}{2R}.\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2abc\,R}$$

অনুরূপে, $\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B = \frac{(c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2abc\,R}$

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2abc\,R}$$

$$\therefore \text{ বামপক্ষ} = \frac{1}{2abc\,R}[(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) + (c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$
$$+ (a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)].$$

$$=\frac{1}{2abc\,R}[(b^4-c^4)-a^2(b^2-c^2)+(c^4-a^4)-$$
$$b^2(c^2-a^2)+(a^4-b^4)-c^2(a^2-b^2)]$$
$$=\frac{1}{2abc\,R}\times 0=0=\text{দক্ষিণপক্ষ}$$

উদা. 10. যদি $\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

(আগ্রা, 1953)

শর্তানুসারে, $\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{a/2R}{2c/2R}$

বা, $\frac{c^2+a^2-b^2}{a}=a$

বা, $c^2+a^2-b^2=a^2 \quad \therefore\ c^2-b^2=0 \quad \therefore\ c=b$

∴ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 11. কোন ত্রিভুজে $\cot A/2$, $\cot B/2$, $\cot C/2$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে, দেখাও যে, a b, c-ও সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

প্রশ্নানুসারে, $\cot A/2-\cot B/2=\cot B/2-\cot C/2$

বা, $\frac{s(s-a)}{\triangle}-\frac{s(s-b)}{\triangle}=\frac{s(s-b)}{\triangle}-\frac{s(s-c)}{\triangle}$

বা, $s(b-a)=s(c-b)$

বা, $b-a=c-b$

∴ a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

উদা. 12. দেখাও যে, কোন ত্রিভুজে $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}=0$

(বেনারস, 1955)

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{\triangle}+\frac{s-b}{\triangle}+\frac{s-c}{\triangle}$$
$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\triangle}=\frac{3s-2s}{\triangle}=\frac{s}{\triangle}=\frac{1}{r}$$
$$\therefore\ \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r}=0.$$

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, যে কোন ত্রিভুজে

(i) $r\, r_1\, r_2\, r_3 = \Delta^2$ এবং (ii) $s^2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1$

(কঃ বিঃ 1954)

(i) $$r\, r_1\, r_2\, r_3 = \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{\Delta}{s-a} \cdot \frac{\Delta}{s-b} \cdot \frac{\Delta}{s-c}$$

$$= \frac{\Delta^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\Delta^4}{\Delta^2} = \Delta^2$$

(ii) $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1$

$$= \frac{\Delta}{s-a} \cdot \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-b} \cdot \frac{\Delta}{s-c} + \frac{\Delta}{s-c} \cdot \frac{\Delta}{s-a}$$

$$= \Delta^2 \left\{ \frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} \right\}$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c) \times \left\{ \frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)} \right\}$$

$$= s(s-c) + s(s-a) + s(s-b)$$

$$= s(s-c+s-a+s-b)$$

$$= s(3s - \overline{a+b+c}) = s(3s-2s) = s.s = s^2$$

উদা. 14. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজে $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

$\because$ $A+B+C=\pi$, অতএব নিম্নোক্ত অভেদটি সত্যি।

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

কিন্তু $r = 4R \sin A/2 \sin B/2 \sin C/2$

$$\therefore \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin C/2$$

$$\therefore \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

উদা. 15. প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right)$

$$= \frac{4R}{r^2 s^2} = \frac{16R}{r^2 (a+b+c)^2}$$ (আগ্রা, 1938)

$$\text{বামপক্ষ}=\left(\frac{s}{\triangle}-\frac{s-a}{\triangle}\right)\left(\frac{s}{\triangle}-\frac{s-b}{\triangle}\right)\left(\frac{s}{\triangle}-\frac{s-c}{\triangle}\right)$$

$$=\frac{a}{\triangle}\cdot\frac{b}{\triangle}\cdot\frac{c}{\triangle}=\frac{abc}{\triangle}\cdot\frac{1}{\triangle^2}=4\text{R}\cdot\frac{1}{r^2s^2}$$

$(\because \triangle=abc/4\text{R}$ এবং $r=\triangle/s)$

$$=\frac{16\text{R}}{r^2\cdot(2s)^2}=\frac{16\text{R}}{r^2(a+b+c)^2}=\text{দক্ষিণপক্ষ}$$

উদাহরণমালা 9

1. $a=4\sqrt{3}, b=12, \text{A}=30^\circ$; ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ ও C কোণ নিরূপণ কর।

2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো যথাক্রমে 7, 5 ও 8 ; কোণগুলোর মান নির্ণয় কর।

3. কোন ত্রিভুজে $a=8$, $b=10$ এবং $c=14$; $\tan \text{A}/2$, $\tan \text{B}/2$ ও $\tan \text{C}/2$ কত ?

4. 2নং প্রশ্নের ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ? বৃহত্তম কোণটির সাইন কত ?

প্রমাণ কর যে, যে কোন ত্রিভুজে

5. $b(-c)\cos\frac{\text{A}}{2}=a\sin\frac{\text{B}-\text{C}}{2}$ (পাটনা, 1942)

6. $(b+c)\sin\frac{\text{A}}{2}=a\sin\left(\frac{\text{A}}{2}+\text{B}\right)$ (পাটনা, 1940)

7. $a(\sin\text{B}-\sin\text{C})+b(\sin\text{C}-\sin\text{A})+c(\sin\text{A}-\sin\text{B})=0$

8. $a(b\cos\text{C}-c\cos\text{B})=b^2-c^2$

9. $(b+c)\cos\text{A}+(c+a)\cos\text{B}+(a+b)\cos\text{C}=2s$

10. $(b+c)\sin\frac{\text{A}}{2}=a\cos\frac{\text{B}-\text{C}}{2}$

11. $a\sin(\text{B}-\text{C})+b\sin(\text{C}-\text{A})+c\sin(\text{A}-\text{B})=0$ (বেনারস, 1956)

12. $(b-c)\cot\frac{\text{A}}{2}+(c-a)\cot\frac{\text{B}}{2}+(a-b)\cot\frac{\text{C}}{2}=0$ (পাটনা, 1944)

13. $a\cos\text{A}+b\cos\text{B}+c\cos\text{C}=abc/2\text{R}^2=4\text{R}\sin\text{A}\sin\text{B}\sin\text{C}$

14. $a\sin\text{A}-b\sin\text{B}=c\sin(\text{A}-\text{B})$

15. $a^2(\sin^2\text{B}-\sin^2\text{C})+b^2(\sin^2\text{C}-\sin^2\text{A})+c^2(\sin^2\text{A}-\sin^2\text{B})=0$

16. $(b^2+c^2-a^2)\tan A=(c^2+a^2-b^2)\tan B=(a^2+b^2-c^2)\tan C$

17. $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

18. $a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)$

$$=8R\sin A\sin B\sin C$$

19. $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$

20. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\triangle/R$

21. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$

(পাটনা, 1945)

22. $\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}=\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}$

23. $b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}=c\cos^2\dfrac{A}{2}+a\cos^2\dfrac{C}{2}$

$$=a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}$$

24. $c^2=(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}$

25. $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}$

26. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(বেনারস, 1945)

27. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

(বেনারস, 1957)

28. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0$

29. $\tan A=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$

30. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

(পাটনা, 1943)

31. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=2$

32. $(b+c+a)\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)=2a\cot\frac{A}{2}$ (পাটনা, 1940)

33. $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$ (আগ্রা, 1954)

34. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$

35. $b^2\sin 2c+c^2\sin 2B=4\triangle$

36. $2R^2\sin A\sin B\sin C=\triangle$

37. $\cot A+\cot B+\cot C=(a^2+b^2+c^2)/4\triangle$

38. $\frac{a^2-b^2}{2}\ \frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\triangle$

39. $\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}+\frac{\cos A\cos B}{ab}=\frac{1}{4R^2}$

40. $a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C=4\triangle$

41. দেখাও যে, $2b=a+c$ হলে $2\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}$ (পাটনা, 1942)

42. $C=120^\circ$ হলে দেখাও যে, $2c\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{3}\,(a+b)$

43. $A=60^\circ$ হলে দেখাও যে, $2a\cos\frac{B-C}{2}=b+c$

44. $C=60^\circ$ হলে দেখাও যে, $2a-b=2c\cos B$ (বেনারস, 1949)

45. $A=90^\circ$ হলে দেখাও যে, $b+c=\sqrt{2}a\cos\frac{B-C}{2}$

46. যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমানুপাতী হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

47. যদি কোন ত্রিভুজের দুটি কোণের কোসাইন তাদের বিপরীত বাহুর ব্যস্ত অনুপাতী হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমকোণী, নতুবা সমদ্বিবাহু।

(কঃ বিঃ 1923)

48. যদি $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ হয়, তবে দেখাও যে, $C=60^\circ$

49. যদি $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু, নতুবা সমকোণী।

50. যদি $b \tan B + c \tan C = (b+c) \tan \frac{B+C}{2}$ হয় তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

51. যদি $a^4 + b^4 + c^4 = 2b^2 (a^2 + c^2) - c^2 a^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $B = 60°$ বা $120°$.

52. যদি $\cos A + 2 \cos C : \cos A + 2 \cos B = \sin B : \sin C$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু, নতুবা সমকোণী।

53. যদি $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয় তবে দেখাও যে, a^2, b^2, c^2-ও সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। (পাটনা, 1944)

54. a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হলে দেখাও যে,

$$4 (1 - \cos A) (1 - \cos C) = \cos A + \cos C$$

55. $\sin A : \sin C = \sin (A - B) : \sin (B - C)$ হয়, দেখাও যে, a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

56. যদি $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজের সব কটি কোণই সমান।

57. যদি a^2, b^2, c^2 সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, $\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ অনোন্যক-সমান্তর (H.P.) শ্রেণীভুক্ত। (আগ্রা, 1952)

58. যদি $\tan A/2$, $\tan B/2$, $\tan C/2$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়, তবে দেখাও যে, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$-ও সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। (কঃ বিঃ 1954)

যে কোন ত্রিভুজে প্রমাণ কর যে,

59. $r_1 + r_2 = c \cot \frac{C}{2}$ (আগ্রা, 1946)

60. $\frac{r r_1}{r_2 r_3} = \tan^2 \frac{A}{2}$ (আগ্রা, 1947)

61. $\triangle = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cot A}$

62. $\triangle = r r_1 \cot \frac{A}{2}$

63. $\triangle = 4R\, r \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

64. $\frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r^2} + \frac{a-b}{r^3} = 0$

65. $\triangle = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

66. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2\triangle}{R}$

67. $4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{s}{R}$

68. $(r_1 + r_2) \tan \frac{C}{2} = (r_3 - r) \cot \frac{C}{2} = c$ (আগ্রা, 1953)

69. $\triangle = \sqrt{r r_1 r_2 r_3} = r^2 \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ (আগ্রা, 1951)

70. $r_1 r_2 r_3 = r^3 \cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}$ (আগ্রা, 1956)

71. $(r_2 + r_3) \sqrt{\frac{r r_1}{r_2 r_3}} = a$

72 $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2$ (ক: বি: 1943)

73. $a(r r_1 + r_2 r_3) = b(r r_2 + r_1 r_3) = c(r r_3 + r_1 r_2)$

74. $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$ (আগ্রা, 1955)

75. $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$ (আগ্রা, 1949)

76. $(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)(r_1 + r_2) = 4Rs^2$

77. $\frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)}{r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2} = 4R$ (বেনারস, 1954)

78. $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{\triangle^2}$ (আগ্রা, 1952)

79. $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$

80. $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2Rr}$ (বেনারস, 1956)

81. $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ (আগ্রা, 1957)

82. $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r)$

83. যদি $R = r_1$ হয় তবে দেখাও যে, $\cos A = \cos B + \cos C$

84. যদি $r_1 - r = r_2 + r_3$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

85. যদি কোন ত্রিভুজের বহির্ব্যাস পরিসীমার সমান হয় তবে দেখাও যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

86. যদি $(1-r_1/r_2)(1-r_1/r_3)=2$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।
(বেনারস, 1954)

87. যদি $8R^2=a^2+b^2+c^2$ হয়, তবে দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।
(আগ্রা, 1953)

88. $R=2r$. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমবাহু। (কঃ বিঃ 1940)

89. a, b, c সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। দেখাও যে, r_1, r_2, r_3 অন্যোন্যক সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

90. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে A, B, C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে x, y, z; দেখাও যে,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}$$

91. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র থেকে A, B, C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হলে, প্রমাণ কর যে, $rabc=sxyz$.

92. যদি p_1, p_2, p_3 একটি ত্রিভুজের তিনটি উচ্চতা হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$ (ii) $8R^3=\frac{a^2b^2c^2}{p_1p_2p_3}$

93. অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল S এবং বহির্বৃত্তগুলোর ক্ষেত্রফল S_1, S_2, S_3 হলে দেখাও যে,

$$\frac{1}{\sqrt{S}}=\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}$$

94. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তর্কেন্দ্রের দূরত্বের বর্গ R^2-2Rr। যদি পরিকেন্দ্র অন্তর্কেন্দ্রের উপর অবস্থিত হয় তবে দেখাও যে,

$\cos A+\cos B+\cos C=\sqrt{2}$ (আগ্রা, 1949)

95. ABC ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দুগামী যে বৃত্ত BC এর মধ্যবিন্দুকে স্পর্শ করে, তার ব্যাসার্ধ

$$\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{8b \sin C}.$$

96. কোন ত্রিভুজের $a=13, b=14, c=15$; r এবং R-এর মান কত?

97. যে কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ কর যে, অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল : $\triangle$ $= \pi$: $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

98. যে কোন ত্রিভুজে দেখাও যে,

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a \sin A+b \sin B+c \sin C}{4\triangle}$$

99, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত: লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p_1, p_2, p_3 ; দেখাও যে,

$$\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$

10 ত্রিভুজের সমাধান

দশম অধ্যায় (SOLUTION OF TRIANGLES)

10. 1. ত্রিভুজের সমাধান (Solution of triangles)

যে কোন ত্রিভুজের ছ'টি অঙ্গ—তিনটি বাহু, তিনটি কোণ। কিন্তু এগুলো অনপেক্ষ নয়; পরস্পরের মধ্যে কোন-না-কোন সম্পর্ক আছে। অঙ্গগুলোর যে কোন তিনটি দেওয়া থাকলে (অবশ্যই তাদের একটা বাহু হওয়া চাই), বাকী তিনটি বের করা যায়। নির্ণয় কাজে আগের অধ্যায়ের সম্পর্কগুলো ব্যবহার করা হয়। প্রদত্ত অঙ্গগুলো থেকে অবশিষ্ট অঙ্গ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে **ত্রিভুজের সমাধান** বলে।

নিম্নোক্ত চারভাবে অঙ্গগুলো দেওয়া থাকতে পারে।

(i) তিনটি বাহু

(ii) দুটি কোণ এবং একটি বাহু

(iii) দুটি বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ

(iv) দুটি বাহু এবং ওদের একটির বিপরীত কোণ।

তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজের যথাযথ সমাধান সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে কেবল-মাত্র বাহুগুলোর অনুপাত পাওয়া যায়, সঠিক দৈর্ঘ্য জানা যায় না।

10· 2 লগারিদম (Logarithms)

বীজগণিতেই লগারিদমের আলোচনা করা হয়। কিন্তু ত্রিভুজের সমাধানের ক্ষেত্রে সরলীকরণের কাজে লগারিদমের ব্যবহার খুব প্রয়োজনীয়। তাই লগারিদমের ধর্ম সম্পর্কে দু-চার কথা এখানে বলা হল।

যদি $x=a^m$ হয়, তবে m কে a-ভূমি সাপেক্ষে x এর লগারিদম বলে। লেখার রীতি হল: $m=\log_a x$। আরও সহজভাবে লেখা হয় $m=\log x$, ভূমি a-উহ্য থাকে। কাজেই, কোন ভূমি সাপেক্ষে কোন সংখ্যার লগারিদম বলতে ভূমিকে যে ঘাত ওঠালে ঐ সংখ্যার সমান হয় সেই ঘাতকে বুঝায়। ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ভূমি প্রায়শঃই 10 ধরা হয়।

10. 3, লগারিদমের ধর্ম (Properties of logarithms)

যেহেতু, লগারিদম হল সূচক বা ঘাত (index) এবং যেহেতু, $a^m = x$ এবং $m = \log_a x$ সমার্থক, কাজেই সূচকের নিয়ম থেকে আমরা লগারিদমের ধর্মগুলো পাই।

লগারিদমের প্রধান ধর্মগুলো নীচে দেওয়া হল :

(i) $\log_a mnp\ldots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots$

(ii) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

(iii) $\log_a m^r = r \log_a m$

কথায় প্রকাশ করলে :

(i) একাধিক সংখ্যার গুণফলের লগারিদম, সংখ্যাগুলোর পৃথক পৃথক লগারিদমের সমষ্টির সমান।

(ii) দুটি সংখ্যার ভাগফলের লগারিদম, ভাজ্য ও ভাজকের পৃথক পৃথক লগারিদমের অন্তর ফলের সমান।

(iii) কোন ঘাতযুক্ত সংখ্যার লগারিদম, ঐ ঘাত ও সংখ্যার লগারিদমের গুণফলের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত : $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$। অর্থাৎ সংখ্যার সমান মানবিশিষ্ট ভূমির সাপেক্ষে সংখ্যাটির লগারিদম 1 এবং যে কোন ভূমির সাপেক্ষে 1-এর লগারিদম শূন্য।

10 4. ক্যারেকটারিস্টিক ও ম্যান্টিসা (Characteristic and Mantissa)

লগারিদমের আলোচনায় দেখা যায়, কোন কোনটির মান ধনাত্মক, কোনটির বা ঋণাত্মক। তাই, সব ক্ষেত্রেই, লেখার রীতি এমন যে, দশমিক অংশ ধনাত্মক হয় ; পূর্ণ অংশটি লগারিদমের উপর নির্ভর ক'রে ধনাত্মক বা ঋনাত্মক দুই-ই হতে পারে। একটা উদাহরণ ধরা যাক। মনে কর, লগারিদম হল $-3{\cdot}72388$। এটি হল $-4+1-0{\cdot}72388 = -4+{\cdot}27612$; লেখা হয় এইভাবে : $\bar{4}{\cdot}27612$।

ধনাত্মক অংশকে বলে 'ম্যান্টিসা' এবং ঋণাত্মক অংশকে 'ক্যারেকটারিস্টিক'। উপরের উদাহরণে $\bar{4}$ বা -4 হল ক্যারেকটারিস্টিক এবং ${\cdot}27612$ হল ম্যান্টিসা।

নিচের নিয়ম থেকে সংখ্যাটি দেখে যে কোন সংখ্যার সাধারণ লগারিদম সহজেই স্থির করা যায়।

(a) 1 এর চেয়ে বড় সংখ্যার লগারিদমের ক্যারেকটারিষ্টিক হল সংখ্যাটির পূর্ণ-অংশে যতগুলো অঙ্ক আছে তার চেয়ে এক কম এবং ধনাত্মক। যেমন log 643·2 এর ক্যারেকটারিষ্টিক হল 2।

(b) 1 এর চেয়ে ছোট সংখ্যার লগারিদমের ক্যারেকটারিষ্টিক ঋণাত্মক এবং দশমিক বিন্দুর ঠিক পরে যতগুলো শূন্য আছে তার চেয়ে এক বেশি। যেমন log ·3476 এর ক্যারেকটারিষ্টিক হল −1 এবং log ·0006 এর ক্যারেকটারিষ্টিক হল −5।

লগারিদমের ম্যান্টিসা অংশ লগারিদম্ তালিকায় দেওয়া থাকে। দুটি সংখ্যার স্থানীয় অঙ্কগুলো যদি একই হয়, তবে তাদের ম্যান্টিসা সমান, পার্থক্য শুধু ক্যারেকটারিষ্টিকে।

10. 5. ত্রৈকোণমিতিক তালিকা (Trigonometrical tables)

ত্রিভুজের সমাধানে প্রায়ই আমাদের ত্রৈকোণমিতিক তালিকা দেখতে হবে। এই তালিকা দু'রকম। এক, natural sine, cosine ইত্যাদির তালিকা। এতে কোণগুলোর sine, cosine ইত্যাদির মান দশমিকের পর কয়েক ঘর অবধি দেওয়া থাকে। আরেকটি হল লগারিদমীয় sine, cosine ইত্যাদির তালিকা। এতে সাইন, কোসাইন ইত্যাদির লগারিদম দেওয়া থাকে।

অনেক ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের মান 1 এর চেয়ে কম। কাজেই তাদের লগারিদম ঋণাত্মক। ঋণাত্মক মান এড়াতে ওদের মান 10 বাড়িয়ে নেওয়া হয় এবং L sin A, L cos A ইত্যাদি রূপে লেখা হয়। কাজেই,

$$L \sin A = 10 + \log \sin A$$
$$L \tan \theta = 10 + \log \tan \theta$$

বইয়ের শেষে ত্রৈকোণমিতিক তালিকা দেওয়া আছে। Natural sine ও cosine তালিকায় 1′ অন্তর 0° থেকে 90° পর্যন্ত কোণগুলোর sine এবং cosine দুই-ই দেওয়া আছে। কোন কোণের সাইন তার পূরক কোণের কোসাইন। তালিকার সজ্জায় এই ধর্মটি ব্যবহার করা হয়েছে। ফলে একই তালিকা থেকে দুটি অনুপাতের মানই জানা যায়। sine-এর কোণগুলো উপরের বাঁ দিক থেকে ক্রমে ডান দিকে এবং নীচের দিকে বেড়ে গেছে। আর cosine-এর কোণগুলো নীচের ডান দিক থেকে উপরের বাঁ দিকে বেড়ে গেছে। তালিকার উপরে লেখা Natural sine এবং নীচে লেখা Natural cosine।

তালিকার প্রধান অংশে 10′ অন্তর অন্তর কোণের sine এবং cosine দেওয়া আছে। পাশে mean difference (গড় পার্থক্য) অংশের সাহায্যে 1′ অন্তর অন্তর

কোণের sine এবং cosine পাওয়া যায়। 0° থেকে 90° পর্যন্ত কোণ যত বেড়ে চলে sine-এর মানও ক্রমে তত বাড়ে, কিন্তু cosine-এর মান কমে। তাই sine নির্ণয়ের সময় mean difference স্তম্ভের মান যোগ করতে হয়, cosine নির্ণয়ের সময় বিয়োগ করতে হয়।

অনুরূপভাবে, natural tangents এবং cotangents তালিকায়ও 1′ অন্তর 0° থেকে 90° পর্যন্ত কোণগুলোর tangent এবং cotangents জানা যায়। ট্যাঞ্জেন্টের ক্ষেত্রে গড় পার্থক্য যোগ করতে হয়, কোট্যানজেন্টের বেলায় বিয়োগ করতে হয়।

লগারিদ্‌মিক sine এবং cosine তালিকায় mean difference স্তম্ভের সাহায্যে 1′ অন্তর, 0° থেকে আরম্ভ করে 90° পর্যন্ত কোণগুলোর লগারিদ্‌মিক sine ও cosine নির্ণয় করা যায়। ব্যবহার পদ্ধতি sine ও cosine তালিকার মতো। L sin θ-এর সময় mean difference যোগ করতে হয়, L cos θ-এর সময় বিয়োগ করতে হয়।

লগারিদমিক tangents এবং cotangents তালিকায়ও তেমনি 1′ অন্তর অন্তর 0° থেকে 90° পর্যন্ত লগারিদমিক tangents এবং cotangents-এর মান দেওয়া থাকে। ব্যবহার-পদ্ধতি আগের তালিকার মতো। ট্যানজেন্টের ক্ষেত্রে mean difference যোগ করতে হয়, cotangents-এর ক্ষেত্রে বিয়োগ করতে হয়।

10. 6. সমানুপাতী অংশ-বিধি (Principle of proportional parts)

কখন কখন তালিকায় সরাসরি দেওয়া নেই এমন কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত বা তাদের লগারিদমের মান বের করার প্রয়োজন হয়। যেমন ধর 34°23′ 20″। তালিকায় কেবল 34° 23′ এর মান এবং 34° 24′ এর মান দেওয়া আছে।

এ সব ক্ষেত্রে, সমানুপাতী অংশ-বিধি প্রয়োগ করে মান বের করতে হয়। বিনা প্রমাণে, বিধিটি নিচে উল্লেখ করা হল।

কোন চলরাশির মানের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য ওর অপেক্ষকের মানের যে পরিবর্তন হয় তা চলরাশিটির মানের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের সমানুপাতী।

sin θ, tan θ, L sin θ ইত্যাদি সকলেই চলরাশি θ-র অপেক্ষক।

10. 7. ত্রিভুজের সমাধানে যে যে বিভিন্ন ক্ষেত্রের উদ্ভব ঘটে আমরা এখন সেগুলি একে একে আলোচনা করব।

প্রথম ক্ষেত্র : তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া আছে।

এক্ষেত্রে কোণগুলো সাধারণত নিম্নোক্ত সেটের সূত্রের সাহায্যে বের করা হয়।

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \text{ ইত্যাদি}$$

$$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=10+\tfrac{1}{2}\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

কাজেই তালিকা থেকে $\frac{A}{2}$ জানা যায়। অতএব A নিরূপিত হল। অনুরূপভাবে, B-ও নির্ণয় করা যায়। আর C বের করা হয় $C=180°-A-B$ সূত্র থেকে।

নিম্নোক্ত সেট-সমীকরণের সাহায্যেও ত্রিভুজটি সমাধান করা যেত।

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \text{ইত্যাদি}$$

$$\text{বা}\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \text{ ইত্যাদি}$$

এবং এক্ষেত্রে আমরা L cos A/2 বা L sin A/2 নিয়ে তালিকা ব্যবহার করতাম। কিন্তু tan সূত্রে আমাদের প্রয়োজন চারটি লগারিদমের, $s, s-a, s-b, s-c$; sine বা cosine সূত্রে প্রয়োজন ছটি লগারিদমের $s, s-a, s-b, a, b, c$। কাজেই, **tan** সূত্রই ভাল। তা ছাড়া, কোন কোণের বিভিন্ন তালিকা থেকে প্রাপ্ত আসন্ন মানগুলোর মধ্যে লগারিদমীয় tangent তালিকার মানই সবচেয়ে শুদ্ধ। এর গাণিতিক প্রমাণ দেওয়া যায়।

আমরা, $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ইত্যাদি সূত্র থেকেও কোণ বের করতে পারতাম; কিন্তু লগারিদমিক গণনা কার্যে এই সূত্রগুলি সুবিধাজনক নয়।

এ সব কারণে, কার্যক্ষেত্রে **tangent সূত্রই** ব্যবহার করা হয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : দুটি কোণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে।

ধরি, BC এবং *a* দেওয়া আছে। $\therefore\ A=180°-B-C$; অজ্ঞাত বাহু দুটি বের করতে নিচের সূত্র ব্যবহার করা হয় :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore \quad b = a\,\frac{\sin B}{\sin A}\,;\; c = a\,\frac{\sin C}{\sin A}$$

লগারিদম নিয়ে, $\log b = \log a + L \sin B - L \sin A$

$$\log c = \log a + L \sin C - L \sin A$$

তৃতীয় ক্ষেত্র : দুই বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে।

ধর, b, c এবং A দেওয়া আছে এবং $b > c$। $\therefore$ B>C হবে।

$$\therefore \quad B + C = 180° - A \qquad \therefore \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

আবার $\quad \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

$$\therefore \quad L \tan \frac{B-C}{2} = 10 + \log \left(\frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}\right)$$

$$= \log (b-c) - \log (b+c) + L \cot A/2$$

b, c ও A জানা থাকায় $L \tan \frac{B-C}{2}$ পাওয়া যাবে এবং তা থেকে $\frac{B-C}{2}$ বের হবে। $\frac{B+C}{2}$ এবং $\frac{B-C}{2}$ এর মান জানা যাওয়ায় B ও C বেরিয়ে যাবে। কাজেই কোণ তিনটি জানা গেল।

অজ্ঞাত বাহু a বের করতে $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

অর্থাৎ $\quad \log a = \log b + L \sin A - L \sin B$

বা, $\quad = \log c + L \sin A - L \sin C$

চতুর্থ ক্ষেত্র : দুটি বাহু এবং বাহুদ্বয়ের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া।

ধর, a, b এবং a-বাহুর বিপরীত কোণ A দেওয়া আছে।

যেহেতু $a/\sin A = b/\sin B \qquad \therefore \quad \sin B = \frac{b}{a} \sin A \quad \ldots$ (i)

$$\therefore \quad L \sin B = \log b - \log a + L \sin A \qquad \ldots \text{(ii)}$$

এই সমীকরণ থেকে B কোণের মান জানা গেল।

$\therefore \quad C = 180° - A - B \qquad \therefore$ C কোণের মানও জানা গেল।

এখন, c বাহুটি $c=\frac{a}{\sin A} \cdot \sin C$

বা, $\log c=\log a+\text{L} \sin C-\text{L} \sin A$ ... (iii)

থেকে জানা যাবে।

কিন্তু (i) সমীকরণ থেকে ত্রিভুজ সম্পর্কে প্রদত্ত উপাত্ত বিষয়ে **তিনটি সম্ভাবনা দেখা দিচ্ছে।**

(a) যদি $b \sin A>a$ হয় তবে $\sin B>1$; ইহা অসম্ভব। এরূপ কোণের অস্তিত্ব সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে, **ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব নয়** অর্থাৎ **ত্রিভুজের সমাধান নেই।**

(b) যদি $b \sin A=a$ হয়, তবে $\sin B=1$; $\therefore$ $B=90°$। এক্ষেত্রে, **একটি মাত্র সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব** এবং তা-ও যদি $b>a$ হয়। কিন্তু $b=a$ হলে **কোন ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব নয় অর্থাৎ সমাধান নেই।**

(c) যদি $b \sin A<a$ হয়, তবে $\sin B<1$। কিন্তু $\sin(\pi-B)=\sin B$ হওয়ায় এক্ষেত্রে B-এর দুটি মান সম্ভব—একটি সূক্ষ্মকোণ, একটি স্থূলকোণ।

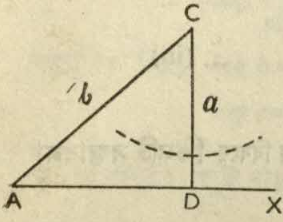
যদি $b<a$ হয়, তবে $B<A$ হবে। $\therefore$ B অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ। আবার $b=a$ হলে $B=A$ হবে। এক্ষেত্রে B কে সূক্ষ্মকোণ হতে হবে। কাজেই $b\leq a$ হলে B এর মান 90° চেয়ে কম হতে হবে। **এক্ষেত্রে একটি মাত্র ত্রিভুজ আঁকাই সম্ভব।**

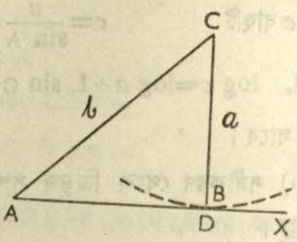
কিন্তু যদি $b>a$ হয়, তবে $B>A$ হবে। এক্ষেত্রে, B সূক্ষ্মকোণ হতে পারে, স্থূলকোণও হতে পারে। এক্ষেত্রে **দুটি ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব।** কাজেই $a>b \sin A$ এবং $B>A$ সম্ভাবনাকে দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র (ambiguous case) বলে। যে ক্ষেত্রে দুটি বাহু ও ছোট বাহুটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে সেটিই দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

10 8 দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical discussion of ambiguous case)

AX একটি সরলরেখা নাও। X বরাবর রেখাটি সীমাহীন। ধর, $\angle XAC=A$ এবং $AC=b$। CD কে AX এর উপর লম্ব টান। $\therefore$ $CD=b \sin A$; C কে কেন্দ্র করে a-ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁক।

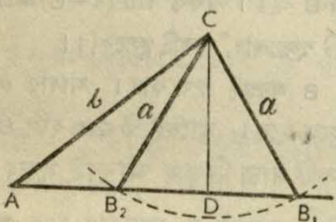
(a) $a<b \sin A$ হলে, বৃত্তটি AX রেখাকে আদৌ ছেদ করবে না। কাজেই এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভব নয়।

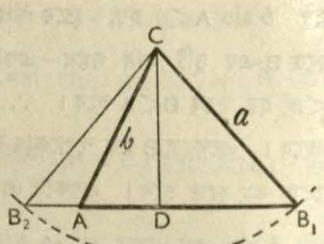




(b) $a=b\sin A$ হলে, বৃত্তটি AX রেখাকে D বিন্দুতে স্পর্শ করছে। কাজেই এক্ষেত্রে একটি মাত্র সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভব।

(c) $a>b\sin A$ হলে এবং $a<b$ হলে, বৃত্তটি AX রেখাকে B_1, B_2 দুটি বিন্দুতে ছেদ করছে। বিন্দু দুটি A এর একই পাশে হচ্ছে এবং $\triangle AB_1C$ এবং $\triangle AB_2C$ দুটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হচ্ছে। এই হল দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।





যখন $a>b$ তখন B_1 ও B_2 বিন্দুদ্বয় A এর দুই পাশে হবে। এক্ষেত্রে একটি মাত্রসমাধান। যেহেতু $\angle CAB_2=180°-A$, $\triangle AB_2C$ প্রদত্ত উপাত্তের সঙ্গে সংগতিপূর্ণ নয়।

যখন $a=b$, তখন B_1 বিন্দু A-এর সঙ্গে মিলে যায়। এক্ষেত্রে তাই সমাধান নেই।

10.9 ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া আছে
(Three angles of a triangle are given)

ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজের সমাধান সম্ভব নয়। কেননা, প্রদত্ত উপাত্তের সঙ্গে সংগতি রেখে এক্ষেত্রে অসংখ্য সমানকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়।

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ সূত্র থেকে আমরা বাহুগুলোর অনুপাত বের করতে পারি মাত্র ; ওদের সঠিক দৈর্ঘ্য জানা সম্ভব নয়।

10.10 কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলো 5, 7, 9 ; ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটির পরিমাণ কত? দেওয়া আছে : $\log 2 = \cdot 3010300$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $L \cos 47°53' = 9\cdot 8264910$ এবং 60″ এর অন্তর = 1397.

ধর, $a=5$, $b=7$, $c=9$; ∴ C বৃহত্তম কোণ।

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}=\sqrt{\frac{21}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{5\times 7}} \quad \left(\because s=\frac{5+7+9}{2}=\frac{21}{2}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{9}{20}}$$

$$\therefore L\cos\frac{C}{2}=10+\tfrac{1}{2}(2\log 3-\log 2-1)$$

$$=10+\tfrac{1}{2}(\cdot 9542426-\cdot 3010300-1)$$

$$=10+\tfrac{1}{2}\times\bar{1}\cdot 6532126$$

$$=10+\bar{1}\cdot 8266063=9\cdot 8266063$$

কিন্তু, $L\cos 47°53' \quad = 9\cdot 8264910$

অন্তর : 1153.

$$\therefore \text{ আনুপাতিক হ্রাস}=\frac{1153}{1397}\times 60''=49\cdot 5''$$

$$\therefore \frac{C}{2}=47°52'\ 10\cdot 5''$$

উদা. 2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 323, 481 এবং 642। কোণগুলো নির্ণয় কর। ত্রৈকোণমিতিক তালিকা ব্যবহার কর।

ধর, $a=323$, $b=481$ এবং $c=642$

$$\therefore s=\frac{323+481+642}{2}=723$$

$$\therefore \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{242\times 81}{723\times 400}}$$

$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=10+\frac{1}{2}(\log 242+\log 81-\log 723-\log 400$

$=10+\frac{1}{2}(2{\cdot}38382+1{\cdot}90849-2{\cdot}85914-2{\cdot}60206)$

$=9{\cdot}41556$ (পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

তালিকা থেকে : $L\tan 14°36'=9{\cdot}41579$

$L\tan 14°35'=9{\cdot}41527$

$60''$ এর অন্তর $=\ \ 52$

$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=9{\cdot}41556$

এবং $L\tan 14°35=9{\cdot}41527$

$\therefore$ অন্তর $=\ \ 29$

$\therefore$ আনুপাতিক বৃদ্ধি $=\frac{29}{25}\times 60''=33{\cdot}5''$

$\therefore\ \frac{A}{2}=14°35'\ 33{\cdot}5''$ $\qquad\therefore\ A=29°11'7''$

আবার, $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{81\times 400}{723\times 242}}$

$\therefore\ L\tan\frac{B}{2}=10+\frac{1}{2}(\log 81+\log 400-\log 723-\log 242)$

$=10+\frac{1}{2}(1{\cdot}90849+2{\cdot}60206-2{\cdot}85914-2{\cdot}38382)$

$=9{\cdot}63380$

কিন্তু, $L\tan 23°18'=9\ 63377$

অন্তর $=\ \ 3$

তালিকা থেকে $60''$ এর অন্তর $=35$ $\qquad\therefore$ আনুপাতিক বৃদ্ধি $=\frac{3}{35}\times 60''=52''$

$\therefore\ \frac{B}{2}=23°18'5{\cdot}2''$ $\qquad\therefore\ B=46°36'10{\cdot}4''$

$\therefore\ C=180°-(A-B)$ $\qquad$ বা $C=104°42'72{\cdot}6''$

উদা. 3. ABC ত্রিভুজে, $B=60°$, $A=38°20'$, $b=64$ ফুট।
a এর মান নির্ণয় কর।

$C=180°-(A+B)=180°-(60+38°20')=81°40'$

এখন, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ থেকে $a=b\frac{\sin A}{\sin B}=64.\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin 81°\ 40'$

$\therefore\ \log a=7\log 2-\frac{1}{2}\log 3+L\sin 81°40'-10$

$=7\times{\cdot}30103-\frac{1}{2}\times{\cdot}47712+9{\cdot}99539-10$

$=2{\cdot}10721-{\cdot}23856+9{\cdot}99539-10$

$=1{\cdot}86404$

$\therefore$ অ্যান্টি-লগারিদম তালিকা থেকে, $a=73{\cdot}12$ ফুট

উদা. 4. দেওয়া আছে $b=5$, $c=3$ এবং $A=120°$, B ও C কত ? (কঃ বিঃ 19

$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

$=\frac{5-3}{5+3}\cot 60°=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{48}}$

$\therefore\ L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log 1-\frac{1}{2}\log 48=9{\cdot}1593794$

তালিকা থেকে : $L\tan 8°12'=9{\cdot}1586706$ এবং

$1'$ এর অন্তর $=8940$

এখানে, $L\tan\frac{B-C}{2}=9{\cdot}1593794$

এবং $L\tan 8°12'=9{\cdot}1586706$

অন্তর $=\ \ 7088$

$\therefore$ আনুপাতিক বৃদ্ধি $=\frac{7088}{8940}\times 60''=48''$

$\therefore\ \frac{B-C}{2}=8°12'48''$ ......(i)

কিন্তু $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=90°-60°=30°$ ......(ii)

(i) ও (ii) থেকে : $B=38°12'48''$; $C=21°47'12''$

উদা. 5. যদি $b=63$, $c=36$, $C=29°23'15''$ হয় তবে B কত ?

দেওয়া আছে : $\log 2={\cdot}3010300$; $\qquad\log 7={\cdot}8450980$

$L\sin 29°23'=9{\cdot}6907721$, $\qquad 1'$ এর অন্তর $=2243$

$L\sin 59°10'=9{\cdot}9338000$, $\qquad 1'$ এর অন্তর $=755$

এটি কি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র ?

$$\sin B = \frac{b}{c}\sin C = \frac{63}{36}\sin C = \frac{7}{4}\sin 29°23'15''$$

$\therefore$ L sin B = log 7 − 2 log 2 + L sin 29°23′15″

= ·8450980 − ·6020600 + 9·6908282

($\because$ 60″ এর অন্তর = 2243)

= 9·9338662

কিন্তু L sin 59°10′ = 9·9338022

অন্তর = 440

$\therefore$ আনুপাতিক বৃদ্ধি $= \frac{440}{755} \times 60'' = 35''$ $\therefore$ B = 59°10′35″

আবার, যেহেতু $c<b$, B-এর আরও একটি মান রয়েছে। সেটি পূর্ব মানের সম্পূরক। $\therefore$ B = 120°49′25″-ও বটে। কাজেই এটি একটি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

উদা. 6. ABC ত্রিভুজে $b=16$, $c=25$ এবং B = 33°15′। A ও C-এর মান কত? দেওয়া আছে log 2 = ·30103, L sin 33°15′ = 9·7390129

L sin 58°56′ = 9·9327616 এবং L sin 58°57′ = 9·9328376

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ থেকে } \sin C = \frac{c \sin B}{b}$$

$\therefore$ L sin C = log c − log$b$ + L sin B

= log 25 − log 16 + L sin 33°15′

= (log 100 − 2 log 2) − 4 log 2 + L sin 33°15′

= 2 − 6 × ·30103 + 9·7390129

= 2 − 1·80618 + 9·7390129

= 9·9328329

কিন্তু L sin 58°57′ = 9·9328376

এবং L sin 58°56′ = 9·9327616

$\therefore$ 1′ এর অন্তর = 760

কিন্তু L sin C − L sin 58°56 = 9·7328329 − 9·7327616 = ·0000713

$\therefore$ আনুপাতিক বৃদ্ধি $= \frac{713}{760} \times 60'' = 56{\cdot}3''$

$\therefore$ C = 58°56′56·3″

$\therefore$ A = 180° − (33°15′ + 58°56·3″) = 87°48′3·7″

$\because$ $c>b$ $\therefore$ C > B ; কাজেই C-এর আরও একটি মান C′ আছে এবং সেটি নির্ণীত মানের সম্পূরক।

$\therefore$ C′ = 180° − C = 180° − 58°56′56·3″ = 121°3′3·7″

$\therefore$ A′ = 180° − (33°15′ + 121°3′3·7″) = 25°41′56·3″

উদা. 7. একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 2 : 3 : 7 দেখাও যে, বাহুগুলোর অনুপাত $\sqrt{2} : 2 : \sqrt{3}+1$

A : B : C = 2 : 3 : 7

$\therefore$ A = 2θ, B = 3θ, C = 7θ (ধর)

$\therefore$ 180° = A + B + C = $2\theta + 3\theta + 7\theta = 12\theta$ $\therefore$ $\theta = 15°$

$\therefore$ A = 30°, B = 45°, C = 105°

$\therefore$ $a : b : c$ = sin A : sin B : sin C

= sin 30° : sin 45° : sin 105°

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} : 2 : \sqrt{3}+1$$

উদাহরণমালা 10

1. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 5, 8 এবং 11 ; সবচেয়ে বড় কোণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে : log 7 = ·8450980 L sin 56°47′ = 9·9225205 L sin 56·48′ = 9·9226032.

2. ত্রিভুজের বাহুগুলো 4, 5, 6। B কোণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে : log 2 = ·3010300, L cos 27°53′ = 9·9464040, 1″ এর অন্তর = ·0000669.

3. ত্রিভুজের তিনটি বাহু 2, 3, 4। সবচেয়ে বড় কোণ বের কর। দেওয়া আছে : log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213, L tan 52°14′ = 10·1108395, L tan 52°15′ = 10·1111004 (বেনারস, 1952)

4. ত্রিভুজের বাহু তিনটি 9, 10, 11 ; যে বাহুর দৈর্ঘ্য 10 তার বিপরীত কোণ কত ? দেওয়া আছে : log 2=·30103, L tan 29°30′=9·7526420 এবং L tan 29°29′=9·7523472. (কঃ বিঃ 1943)

5. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি 15, 19, 24 ; ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটি কত ? log 5·7=·75587, L cos 88°59′=8·24903 ; 1′ এর অন্তর=718. (কঃ বিঃ 1936)

6. ত্রিভুজের বাহু তিনটি 7, 8, 9 । ত্রিভুজটি সমাধান কর। ত্রৈকোণমিতিক তালিকার সাহায্য নাও। (কঃ বিঃ 1938)

7. যদি $a=74$, $b=26$, $c=60$ হয়, তবে L A=কত ? log 9=·9542425, log 13=1·1139434, L sin 56°19′=9·9201896 এবং 1′ এর অন্তর=842।

8. যে ত্রিভুজের বাহুগুলো 12, 15 16 তার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর (লগারিদম তালিকার সাহায্যে)। (কঃ বিঃ 1957)

9. যে ত্রিভুজের বাহুগুলো 32, 40, 66 তার বৃহত্তম কোণ কত ? log 207= 2·3159703, log 1073=3·0305999 L cos 66°18′=9·6424342, 1′ এর অন্তর=3431। (কঃ বিঃ 1955)

10. ত্রিভুজের বাহুগুলো 5, 6, 7। বৃহত্তম কোণ নির্ণয় কর। log 6= ·7781514, L cos 39°14′=9·8890644, 1′ এর জন্য অন্তর=1032। (পাটনা, 1933)

11. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলো 4, 5, 6 ; 5 বাহুর বিপরীত কোণ নির্ণয় কর। log 2=·30103, L cos 27°53′=9·9464040, 1′ এর জন্য অন্তর=669। (কঃ বিঃ 1941)

12. কোন ত্রিভুজের $a=39$, A=81°35′, B=27°55′ ; ত্রিভুজটি সমাধান কর। (কঃ বিঃ 1935)

13. যদি $b=1000$, A=45°, C=68°17′40″ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম বাহুটি নির্ণয় কর। log 2=·3010300, log 7·6986=·88·64118, 1′ এর অন্তর = 57, L sin 66°42′=9·9630538, 1′ এর অন্তর=544।

14. ABC ত্রিভুজে B=60°, C=65°26′ এবং $b=162$, a-এর মান নির্ণয় কর। তালিকা ব্যবহার কর।

15. ABC ত্রিভুজে A=38°20′; B=45° এবং $b=64$ ফুট, C এর মান নির্ণয় কর। log 2=·30103, L sin 83°20′=9·99705 এবং log ·089896=$\bar{2}$·95374

16. যদি B=45°, C=10° এবং a=200 ফুট, b-এর মান কত ? log 2=·30103, L sin 55°=9·9133645, log 1726·4=3·2371414, log 1726·5=3·2371666। (কঃ বিঃ 1947)

17. যদি ABC ত্রিভুজে a=19, A=52°28′ এবং C=93°40′ হয় তবে b এর মান বের কর। log 19=1·2787536, log 27037=4·4319585, log 27038=4·4319746, L sin 52°28′=9·8992727, L sin 33°52′=9·7460595। (পাটনা, 1936)

18. যদি A=44°, C=70°, b=1006·62। a এবং C-এর মান কত ? L sin 44°=9·8417713, log 100662=5·0028656, L sin 66°=9·9607302, log 103543=5·0151212, L sin 70°=9·9729858, log 7654321=6·8839067।

19. কোন ত্রিভুজে b=2·25, c=1·75, A=54°। B ও C নির্ণয় কর। log 2=·301030, L tan 63°=10·292834, L tan 13°47′=9·389724, L tan 13°48′=9·390270। (কঃ বিঃ 1931)

20. দেওয়া আছে : b=643, c=365 এবং A=144°48′। তালিকা ব্যবহার ক'রে B ও C-এর মান নির্ণয় কর।

21. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু 3 সে. মি. ও 5 সে. মি. এবং তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 120° ; অন্যান্য কোণগুলো নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 48=1·6812412, L tan 8°12′=9·1586706 এবং 1′ জন্য অন্তর=8940। (কঃ বিঃ, 1949)

22. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু 80 সে. মি. ও 100 সে. মি. এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণটি 60° ; অন্যান্য কোণগুলো নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 3=·47712 এবং L tan 10°53′36″=9·28432। (কঃ বিঃ, 1946)

23. দেওয়া আছে : a=70, b=35, c=36°52′12″, log 3=·4771213, L cot 18°26′6″=10·4771213। A ও B-এর মান কত ? (কঃ বিঃ 1937)

24. যদি $b=\sqrt{3}$, c=1 এবং A=30° হয়, তবে ত্রিভুজটির সমাধান কর। (কঃ বিঃ 1951)

25. একটি ত্রিভুজের a ও b বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 7 : 3 এবং ওদের অন্তর্ভুক্ত কোণ C=60° ; A ও B নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 2=·3010300,

log 3 = ·4771213, L tan 34°42′ = 9·8403776, 1′ এর জন্য অন্তর = 2699 ।

(পাটনা, 1940)

26. একটি সমতল ত্রিভুজের দুই বাহু 14 এবং 11 এবং এদের অন্তর্ভূত কোণ 60° ; অবশিষ্ট কোণগুলো নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 2 = ·3010300, log 3 = ·4771213, L tan 11°44′ = 9·3174299, L tan 11°45′ = 9·3180640 ।

(আগ্রা, 1955)

27. $b = 540$, $c = 420$ এবং A = 52°6′ ; B এবং C নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, L tan 26°3′ = 9·6891430, L tan 14°20′ = 9·4074189, L tan 14°21′ = 9·4079543 ।

(পাটনা, 1950)

28. একটি ত্রিভুজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য 18 সে. মি. এবং 2 সে. মি. এবং ওদের অন্তর্ভূত কোণ 55° ; অবশিষ্ট কোণগুলো নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 2 = ·3010300, L cot 27°30′ = 10·2835233, L tan 56°46′ = 10·1863769 এবং 1′ এর জন্য অন্তর = 2763 ।

(কঃ বিঃ 1942)

29. ABC ত্রিভুজে $b = 324$, $c = 562$ এবং B = 32°20′ ; A এবং C-এর মান কত? a-এর মান কত? তালিকা ব্যবহার কর।

30. $a = 5$, $b = 7$ এবং A = 30°, B-এর মান ডিগ্রি ও মিনিটে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, sin 44° = ·6947, sin 45° = ·7077 ।

(কঃ বিঃ 1929)

31. একটি ত্রিভুজে যদি $a = 5$, $b = 4$ এবং A = 45° হয়, তবে অপর কোণগুলো নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 2 = ·30103, L sin 34°26′ = 9·7523919, L sin 34°27′ = 9·7525761 ।

(বেনারস, 1951)

32. একটি ত্রিভুজে $a = 73·4$, $b = 64·9$ এবং B = 48°13′25″ ; A নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 734 = 2·8656961, log 649 = 2·8122447, L sin 48°13′25″ = 9·8725936, L sin 57°30″ = 9·9260292 (1′ এর অন্তর = 804) । এটি কি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র?

33. যদি $a = 5$ মিটার, $b = 8$ মিটার, A = 35° ; C-এর ক্ষুদ্রতর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 2 = ·30103, log 456706 = 5·659637, L sin 31°35′43″ = 9·719261, L sin 35° = 9·758591, L sin 65°35′ = 9·962672, L sin 66°36′ = 9·962727 ।

(আগ্রা, 1913)

34. যদি $a=145$, $b=178$, $B=41°40'$, A-এর মান নির্ণয় কর। $\log 178 = 2{\cdot}2504200$, $L \sin 41°10' = 9{\cdot}8183919$, $\log 145 = 2{\cdot}1613680$, $L \sin 32°45'35'' = 9{\cdot}7293399$ ।

35. কোন ত্রিভুজের সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত উপাত্ত দেওয়া আছে। ক্ষেত্রগুলির কোন্‌টি দ্ব্যর্থক, কোন্‌টি দ্ব্যর্থক নয় নির্দেশ কর:

(i) $A=30°$, $a=125$ ফুট, $c=250$ ফুট

(ii) $A=30°$, $a=200$ ফুট, $c=250$ ফুট

(iii) $A=30°$, $a=200$ ফুট, $c=125$ ফুট

দেওয়া আছে: $\log 6{\cdot}0389 = {\cdot}7809578$ $L \sin 38°41' = 9{\cdot}7958800$

$\log 6{\cdot}0390 = {\cdot}7809650$ $L \sin 8°41' = 9{\cdot}1789001$

36. ABC ত্রিভুজের a, b এবং A দেওয়া আছে। দেখাও যে, দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে C-এর দুটি মানের অন্তর $2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$ । আগ্রা, 1952)

37. a, b, A দেওয়া আছে; দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে তৃতীয় বাহুর মান c_1, c_2 হলে দেখাও যে, যদি $c_1 > c_2$ হয়, তবে

(i) $c_1 - c_2 = 2a \cos B$ (বেনারস, 1928)

(ii) $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos 2A = 4a^2 \cos^2 A$ (পাটনা, 1946)

38. প্রমাণ কর যে, দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে C-এর দুটি মানের দ্বারাই নিম্নোক্ত সমীকরণটি সিদ্ধ:

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}$$ (বেনারস, 1942)

39. একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 1 : 2 : 3; বাহুগুলোর অনুপাত নির্ণয় কর।

40. কোন ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 7 : 3 : 2; দেখাও যে, বাহুগুলোর অনুপাত $\sqrt{3}+1 : 2 : \sqrt{2}$.

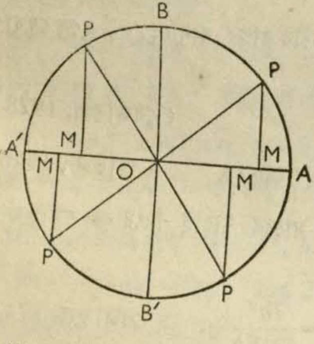
11

একাদশ অধ্যায়

লেখ এবং লৈখিক সমাধান
(GRAPHS & GRAPHICAL SOLUTION)

11.1 কোণের পরিমাণ-বৃদ্ধির সঙ্গে Sine-এর মানের পরিবর্তন (Variations in sine as angle increases)

ধর, কোন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা OP ($=r$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট) ওর প্রাথমিক অবস্থান OA থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে O-এর চারদিকে ঘুরে r ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তটি উৎপন্ন করল। পরিধির উপর যে কোন বিন্দু P নাও এবং OA (বা বর্ধিত করে)-এর উপর PM লম্ব টান। যদি OP θ-কোণ উৎপন্ন করে তবে



$$\sin\,\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{r}$$

P বিন্দুটি A থেকে B-এর মধ্যে যতই ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকে ততই MP বাড়তে থাকে; B থেকে A′-এর মধ্যে MP কমতে থাকে, A′ থেকে B′-এর মধ্যে MP ঋণাত্মক, তবে ঋণাত্মকমান বাড়তে থাকে; B′ থেকে A-এর মধ্যেও MP ঋণাত্মক এবং ঋণাত্মক মান কমতে থাকে। যেহেতু r-এর মান এবং চিহ্ন পরিবর্তিত হয় না, কাজেই বৃত্তের চারপাশে P-এর পরিক্রমণ কালে MP পরিবর্তনই শুধু ধর্তব্য। MP-র সর্বোচ্চ মান OB=OB′$=r$ এবং সর্বনিম্ন মান শূন্য এবং তখন P বিন্দু A বিন্দু ও A′ বিন্দুর সঙ্গে মিশে যায়। অতএব দেখা গেল:

(i) **প্রথম পাদে,** θ যখন 0° থেকে 90° পর্যন্ত বাড়ে তখন **sin** θ **ধনাত্মক** এবং এর **মান 0 থেকে 1 পর্যন্ত বাড়ে।**

(ii) **দ্বিতীয় পাদে,** θ যখন 90° থেকে 180° পর্যন্ত বাড়ে তখনও **sin** θ **ধনাত্মক** এবং এর **মান 1 থেকে কমে 0** (শূন্য)-তে **আসে।**

(iii) **তৃতীয় পাদে,** θ যখন $180°$ থেকে $270°$ পর্যন্ত বাড়ে তখন $\sin\theta$ ঋণাত্মক এবং এর **মান 0 থেকে কমতে কমতে -1 হয়।**

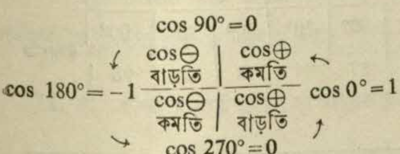
(iv) **চতুর্থ পাদে,** θ যখন $270°$ থেকে $360°$ পর্যন্ত বাড়ে তখনও $\sin\theta$ ঋণাত্মক এবং এর **মান -1 থেকে বাড়তে বাড়তে 0 (শূন্য) হয়।**

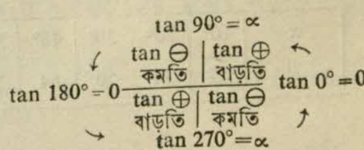
OP যখন 2π কোণ পরিক্রমণ করে (একবার পূর্ণ আবর্তন) তখন প্রাথমিক অবস্থান OA ফিরে পায় এবং পুনরায় পূর্ব পথে পরিক্রমণ শুরু হয়। কাজেই θ যখন 2π এবং $2\frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যে তখন $\sin\theta$-এর মানের পরিবর্তন, θ-এর 0 এবং $\pi/2$-এর মধ্যে থাকাকালীনের অনুরূপ। তেমনি $2\frac{1}{2}\pi \to 3\pi$-এর মধ্যের পরিবর্তন $\pi/2 \to \pi$ এর অনুরূপ, ইত্যাদি ইত্যাদি। θ-র প্রতি 2π-বৃদ্ধিতে অনুরূপ চক্রীয় পরিবর্তন ক্রমাগত অনির্দিষ্টভাবে ঘটতে থাকে।

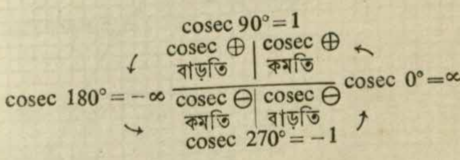
এই তথ্যটি এরূপে বলা হয়: $\sin\theta$ **হল θ-র পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক (periodic function) এবং পর্যায় (period) হল** 2π।

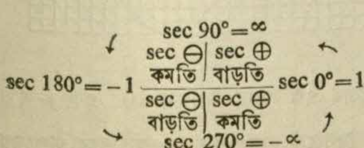
দ্রষ্টব্য: অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তনও অনুরূপভাবে পরীক্ষা করা চলে এবং এদের প্রত্যেকেই তাদের কোণের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, পর্যায় 2π।

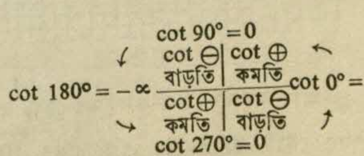
নীচে সারনীর আকারে অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পরিবর্তন দেখান হল।











11. 2 ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ
(Graphs of Trigonometrical Function)

বীজগণিতের মতো ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকেরও (sin x, cos x ইত্যাদি) লেখ অঙ্কন করা যায়। অঙ্কন পদ্ধতিও বীজগণিতের অনুরূপ।

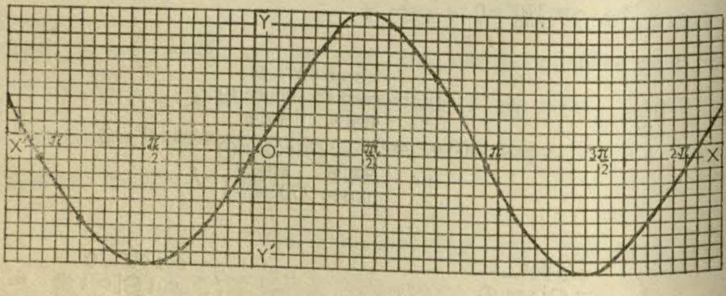
দুটি পরস্পরছেদী সরল রেখাকে XOX′ এবং YOY′-অক্ষ হিসাবে নেওয়া হয়। x-অক্ষ বরাবর কোণের মান এবং y-অক্ষ বরাবর ঐ কোণের অনুরূপ ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান বসানো হয়। লেখ-কাগজে নির্দিষ্ট এককে মানগুলো সন্নিবেশ করা হয়। এভাবে কোণ ও তাদের ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক প্রকাশক বিভিন্ন বিন্দু পাওয়া যায়। বিন্দুগুলোকে একটি সন্তত (continous) রেখা দ্বারা যোগ করলে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ পাওয়া যায়।

11. 3. Sin x এর লেখ (sine graph)

ধর, $y = \sin x$; scine তালিকা থেকে 10° অন্তর x এর বিভিন্ন মাপের জন্য y-এর মানগুলো নিয়ে নিচের ছক তৈরি করা হল।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
$y=\sin x$	−1	−·98	−·94	−·87	−·77	−·64	–	−·34	−·17	0

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	
$y=\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	·1	·98	ইত্যাদি



x-অক্ষ বরাবর ছক-কাগজের ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 10 গুণ দৈর্ঘ্যকে sine-সূচক একক ধরে উপরের

বিন্দুগুলো স্থাপন করা হল। একটি সন্তত রেখা দিয়ে বিন্দুগুলো যোগ করা হলে যে রেখা পাওয়া গেল তা-ই sin x-এর লেখ।

দ্রষ্টব্য: Sine তালিকায় 0-90° কোনের মাপ পাওয়া যায়; অন্যান্য মানের কোণের জন্য $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\sin(180 \pm \theta) = \pm \sin\theta$ ইত্যাদি সূত্রের সাহায্য নিতে হয়।

sin x-এর লেখ-র বৈশিষ্ট্য (Peculiarities of sine graph)

I. লেখটি সন্তত এবং আকারে ঢেউ খেলানো

II. Sin x-এর চরম ও অবম মান যথাক্রমে +1 এবং −1; x-এর মান যখন $\pi/2$-এর বিজোড় গুণিতক তখনই ঐ দুই মান পাওয়া যায়।

III. $\sin(2n\pi + x) = \sin x$; কাজেই 0° − 360° এর মধ্যে লেখ-র যে অংশ তাই প্রতি 360—ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মান—পর পর ক্রমাগত পুনরাবর্তিত হয়। sin x কে এজন্য 4 সমকোণের পর্যায় যুক্ত পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলে।

IV 0° − 180°-এর মধ্যে লেখর অংশটি 90°-তে অঙ্কিত ভুজ (ordinate) বরাবর প্রতিসম।

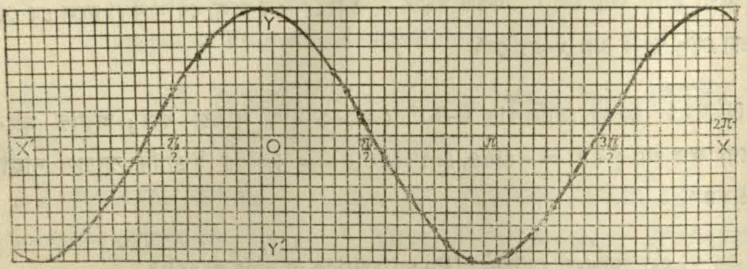
V. 180°-360°-এর মধ্যে লেখ-র অংশ 0° − 180° এর মধ্যের অংশের হুবহু অনুরূপ, তবে অবস্থিতি x-অক্ষের নীচে।

11. 4. Cos x-এর লেখ (cosine graph)

ধর, $y = \cos x$; cosine-তালিকা থেকে 10° অন্তর x-এর বিভিন্ন মানের জন্য y-এর মানগুলো নিয়ে নিচের ছক তৈরি করা হল।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
$y = \cos x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	ইত্যাদি
y	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	−·17	−·34	



x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুন দৈর্ঘ্যকে cosine সূচক একক ধরে ওপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করা হল। একটি সন্তত রেখায় বিন্দুগুলো যোগ করে যে রেখা পাওয়া গেল তাই cos x এর লেখ।

Cos x-এর লেখ-র বৈশিষ্ট্য (Peculiarities of cosine graph)

I. Sine-লেখকে 90° পরিমাণ বাঁ-দিকে সরালে যা হয় তা cos-লেখ-র সমতুল।

II. লেখটি সন্তত এবং প্রতি 360° অন্তর পর্যায়ক্রমে আবর্তিত হয়।

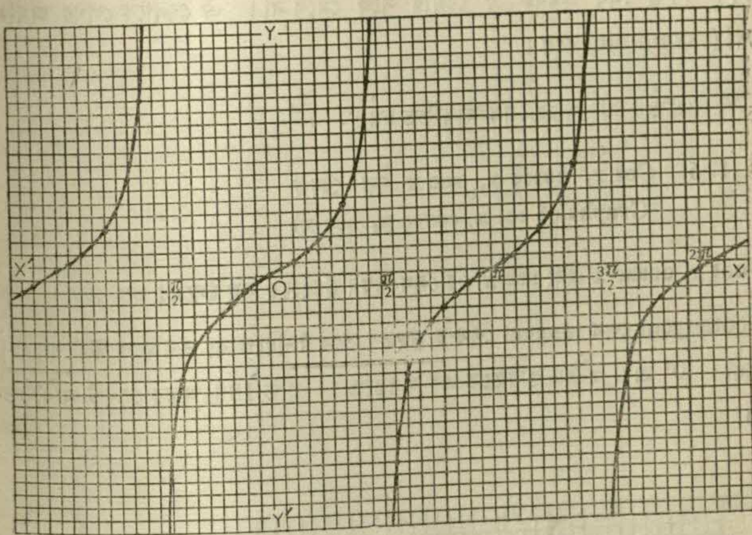
III. Cos x-এর চরম ও অবম মান যথাক্রমে +1 এবং −1 ; 0° এবং 90°-এর জোড় গুণিতক মানে ঐ মান দুটি পাওয়া যায়।

11. 5. Tan x-এর লেখ (tangent graph)

ধর $y=\tan x$; tangent তালিকা থেকে 10° অন্তর x এর বিভিন্ন মানে y এর মানগুলো নিয়ে নিচের তালিকা প্রস্তুত করা হল।

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$y=\tan x$	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5 67	∝

x	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	ইত্যাদি
$y=\tan x$	−5·67	−2·75	−1·73	−1·19	−·84	−·55	−·36	−·18	0	ইত্যাদি



x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণ দৈর্ঘ্যকে tan-সূচক একক ধরে উপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করা হল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা ওদের যোগ করা হল। প্রাপ্ত রেখাটিই tan x এর লেখ।

tan x–এর লেখ-র বৈশিষ্ট্য (Peculiarities of tangent graph)

I. লেখ একটি মাত্র সন্তত রেখা নয়; অনুরূপ আকৃতির অসংখ্যবিচ্ছিন্ন অংশ নিয়ে গঠিত। x এর মান যখন $\pi/2$ বা তার কোন বিজোড় গুণিতক হয় তখনই অসন্ততি (discontinuity) দেখা দেয়।

II. 0° – 90° এর মধ্যে লেখ-র অংশ x-অক্ষের উপরে অবস্থিত 90° – 180° এর মধ্যে অবস্থান x-অক্ষের নিচে।

III. যত 90° কাছাকাছি যাওয়া যায়, tangent এর মান ততই অতিবৃহৎ ধনাত্মক মান হয়ে পড়ে এবং 90°-তে ঐ মান $+\infty$। 90° অতিক্রান্ত হলে tangent এর মান অতি বৃহৎ ধনাত্মক মান থেকে সহসা অতি বৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিণত হয়।

IV. x এর মান $\pi/2$ তার বিজোড় গুণিতকের যত কাছে আসে, লেখটিও সেই বিন্দু ($\pi/2$ বা তার বিজোড় গুণিতক) দিয়ে y রেখার সমান্তরাল রেখার তত কাছে চলে।

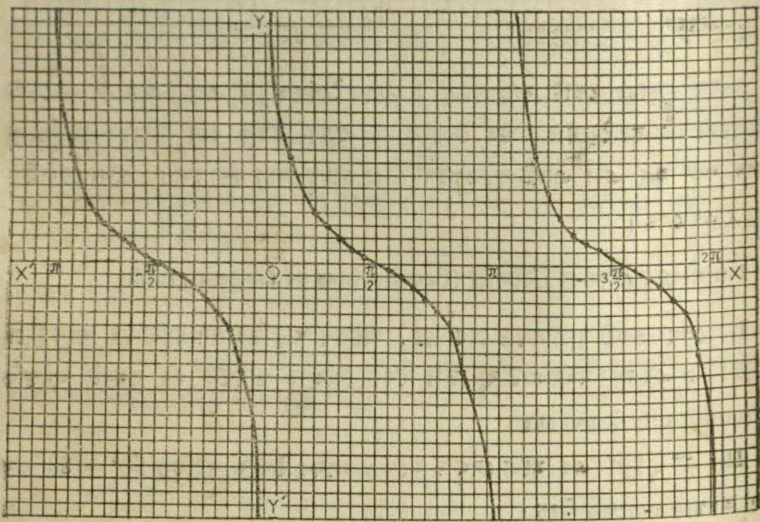
আসে। কিন্তু লেখ কখনই ঐ রেখার সঙ্গে মেলে না। ঐ রেখাকে লেখর অসীম রেখা (asymptote) বলে।

V. প্রতি 180° অন্তর লেখ আবর্তিত হয়।

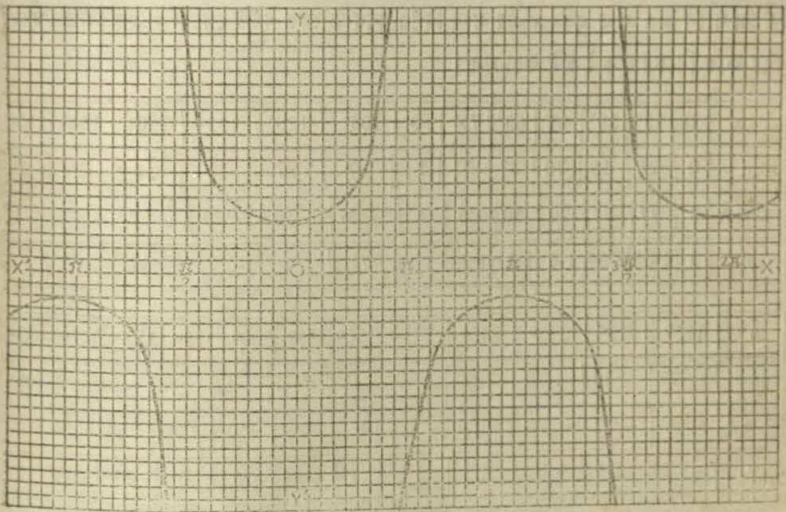
11.6. Cot x, cosec x, sec x-এর লেখ (Graphs of cot x, cosec x, sec x)

cot x, cosec x এবং sec x এর লেখ অঙ্কন ছাত্রদের অনুশীলনের জন্য রইল।

cotangent লেখ tangent লেখ-র অনুরূপ তবে বাঁ-দিকে বা ডানদিকে 90° পরিমাণ সরানো। 0° এবং π-এর গুণিতকে এর অসন্ততি। প্রতি 180 অন্তর লেখটি আবর্তিত হয়।



Cosecant লেখ কতকগুলো বিচ্ছিন্ন অংশ নিয়ে গঠিত। $x=0$ এবং $x=n\pi$-এর অসন্ততি। $x=n\pi$ দ্বারা সূচিত রেখাগুলো লেখ-র অসীম রেখা। 0° – 180° এর মধ্যে লেখ x-অক্ষের উপরে এবং 180° – 360° এর মধ্যে x-অক্ষের নিচে। প্রতি 360° অন্তর লেখটি আবর্তিত হয়।



Secant লেখ cosecant লেখকে বাঁ দিকে 90° সরালে যা হয় ঠিক তাই। উপরে secant লেখর নমুনা এঁকে দেখান হল।

11. 7. অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ (Graphs of other trigonometric functions)

একইভাবে অন্যান্য ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করা যায়। কখন কখন, সরাসরি প্রদত্ত রাশি নিয়ে না এগিয়ে, তাদের সম্ভব স্থলে সরলীকরণ করে নিয়ে এগুনো সঙ্গত। কষে দেওয়া উদাহরণ থেকে পদ্ধতির ইঙ্গিত পাওয়া যাবে।

11. 8. সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Graphical solutions of equations)

বীজগাণিতিক সমীকরণের মতো ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণও লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। কষে দেওয়া উদাহরণ থেকে বিষয়টি বোঝা যাবে।

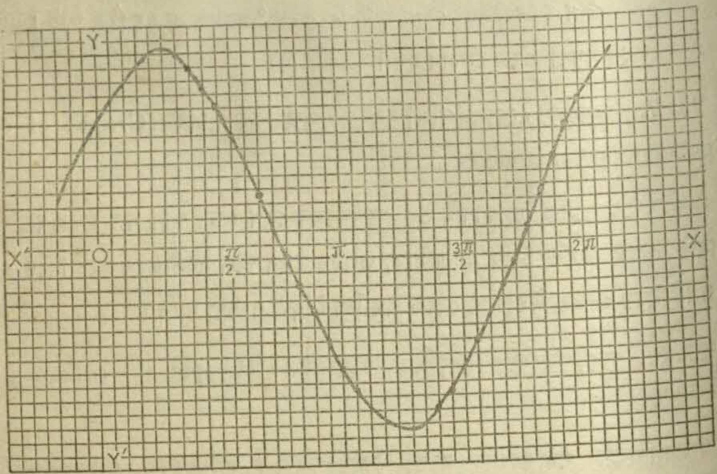
11. 9. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা 1. $y=\sin x+\cos x$ এর লেখ অঙ্কন কর ; x-এর মান 0 থেকে 2π-এর মধ্যে। (কঃ বিঃ 1934 ; পাটনা, 1943)

ধর, $y = \sin x + \cos x$; sine এবং cosine তালিকা থেকে 15° অন্তর x-এর বিভিন্ন মানে $\sin x$ ও $\cos x$-এর মান নির্ণয় করে তাদের সমষ্টি থেকে y-এর বিভিন্ন মান বের করে নিচের ছক তৈরি করা হল।

x	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\sin x$	0	·26	·50	·70	·87	·97	1	·97	·87	·70	·50	·26	0
$\cos x$	1	·97	·87	·70	·50	·26	0	−·26	−·50	−·70	−·87	−·97	−1
y	1	1·23	1 37	1·4	1·37	1·23	1	·71	·37	0	−·37	−·71	−1

x	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
$\sin x$	−·26	−·50	−·70	−·87	−·97	−1	−·97	−·87	−·70	−·50	−·26	0
$\cos x$	−·97	−·87	−·70	−·50	−·26	0	·26	·50	·70	87	·97	1
y	−1·23	−1·37	−1·4	−1·37	−1·23	−1	−·71	−·37	0	·37	·71	1



x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 150° এবং y-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 10 গুণ দৈর্ঘ্যকে sine এবং cosine এর সমষ্টি সূচক একক ধরে উপরের বিন্দুগুলো স্থাপন করা হল। একটি সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলো যোগ করলেই উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাবে।

উদা. 2. উদা 1 এর লেখ থেকে যখন $y=0$, $y=$চরম, $y=$অবম হয় তখন x-এর মান নির্ণয় কর। (কঃ বিঃ 1938)

উপরের লেখ থেকে, যখন $y=0$, তখন $x=3\pi/4$ এবং $7\pi/4$

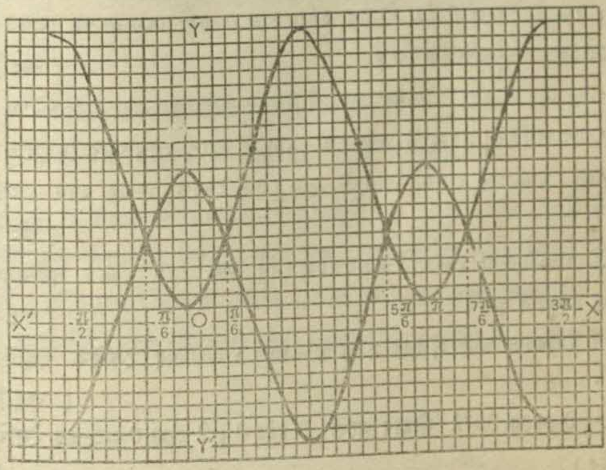
যখন $y=$ চরম, তখন $x=\pi/4$

যখন $y=$অবম, তখন $x=5\pi/4$

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমীকরণটি লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর: $2\sin^2 x=\cos 2x$; $-\pi/2$ এবং $\frac{3\pi}{2}$-এর মধ্যবর্তী x-এর মানগুলোই কেবল নির্ণয় কর।

(কঃ বিঃ 1946, '48)

$y=2\sin^2 x=(1-\cos 2x)$ এবং $y=\cos 2x$ এই দুটি লেখ একই ছক কাগজে, একই অক্ষযুগ্মের মধ্যে এবং একই এককে পৃথক পৃথক আঁক। অঙ্কনকালে cosine



তালিকা থেকে x-এর $-\pi/2$ থেকে $\frac{3\pi}{2}$ এর মধ্যবর্তী 15° অন্তর বিভিন্ন মানে y-এর মান নির্ণয় করে নাও।

দেখা গেল, লেখ দুটি পরস্পর চারটি বিন্দুতে ছেদ করছে। ছেদবিন্দু চারটির ভুজ $-\pi/6, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$.

$\therefore$ **নির্ণেয় সমাধান** $x=-\pi/6, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$

উদাহরণমালা 11

1. নিম্নলিখিত ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকগুলোর লেখ অঙ্কন কর।
(i) $\sin 2x$, (ii) $\cos 2x$, (iii) $\sin x-\cos x$

লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর :

2. $\tan x=2x$, যখন $x=0$ এবং $x=\pi/2$-এর মধ্যবর্তী।

3. $\cos 2x=\sin x$, $0\rightarrow\pi/2$-এর মধ্যবর্তী।

4. $\tan 2x=\tan x$, $0\rightarrow\pi/2$-এর মধ্যবর্তী।

5. $\cos x=x$, $0\rightarrow\pi/2$-এর মধ্যবর্তী।

6. $\cos x=\sqrt{3}\sin x$, $-\pi/2\rightarrow\pi/2$-এর মধ্যবর্তী।

7. $\sin x=\sin 2x$, $0\rightarrow 2\pi$-এর মধ্যবর্তী।

8. $\cot\theta-\tan\theta=2$, $0\rightarrow\pi$-এর মধ্যবর্তী।

9. $\theta=0^\circ$ থেকে $\theta=\pi$ সীমার মধ্যে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর লেখ অঙ্কন কর। লেখদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগুলি কি কি? (কঃ বিঃ 1946)

10. x-এর 0 এবং $\pi/2$-এর মধ্যবর্তী মানের জন্য tan এবং $\cos x$-এর লেখ আঁক। y-এর মানের তালিকা মধ্যবর্তী অঞ্চলকে সমান 9 অংশে ভাগ করে দেখাতে হবে।

যদি $\tan x=\cot x$ হয়, তবে ঐ দুই লেখ থেকে x-এর মান (আসন্ন) নির্ণয় কর। (কঃ বিঃ 1943)

11. $x=0$ এবং $x=\pi/2$ মধ্যবর্তী মানের জন্য $\tan x=1$ সমীকরণটি লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর। (কঃ বিঃ 1937)

12. 0 থেকে $\pi/2$ সীমার মধ্যে $x-\tan x=0$-এর লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান কর। (কঃ বিঃ 1954)

13. 0 থেকে $3\pi/2$ সীমার মধ্যে $5\sin\theta+2\cos\theta=5$-এর লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। (কঃ বিঃ 1947)

14. 0 থেকে π সীমার মধ্যে $\cot\theta-\tan\theta=2$-এর লৈখিক সমাধান নির্ণয় কর। (কঃ বিঃ 1949)

15. A যখন 0 থেকে 2π-এ ক্রমে পরিবর্তিত হয়, তখন $\cos A-\sin A$-এর চিহ্ন এবং মানের যে পরিবর্তন ঘটে তা লেখ-এর সাহায্যে দেখাও। (আগ্রা, 1951)

16. $y=\sin x$-এর লেখ আঁক ($x=0$ থেকে $x=\pi$) এবং লেখ থেকে যে কোণের sine-এর মান 0·7 সেগুলো নির্ণয় কর। (পাটনা, 1945)

12 উচ্চতা ও দূরত্ব

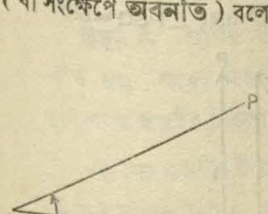
দ্বাদশ অধ্যায় (HEIGHTS AND DISTANCE)

A. উচ্চতা ও দূরত্ব সংক্রান্ত সহজ প্রশ্নাবলী
(Easy problems of heights and distances)

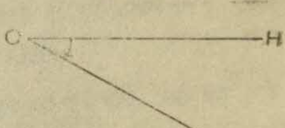
12. A1. ত্রিকোণমিতি গণিত শাস্ত্রের একটি প্রয়োগ শাখা। এই অধ্যায়ে আমরা দেখাব কি করে ত্রিকোণমিতিলব্ধ জ্ঞানকে বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ে ব্যবহার করা হয়। এজন্য উচ্চতা ও দূরত্ব সরাসরি না মেপে কয়েকটি প্রয়োজনীয় কোণের পরিমাপ করতে হয়। **সেকস্ট্যান্ট** ও **থিওডোলাইট** নামে দুটি সার্ভে যন্ত্র একাজে ব্যবহৃত হয়।

12-A2. উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ
(Angle of elevation and angle of depression)

যদি কোন বস্তু দ্রষ্টার চোখের চেয়ে উঁচুতে অবস্থিত হয় তবে দ্রষ্টার চোখ ও বস্তুর সংযোজক সরলরেখা অনুভূমিক রেখার সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ বস্তুর **উন্নতি কোণ** (বা সংক্ষেপে উন্নতি) বলে। ঐ একই কোণকে **অবনতি কোণ** (বা সংক্ষেপে অবনতি) বলে যদি বস্তুটি দ্রষ্টার চোখের চেয়ে **নীচুতে** অবস্থিত হয়।



প্রথম চিত্র



দ্বিতীয় চিত্র

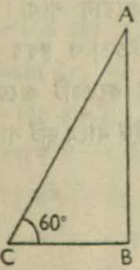
ধর, P একটি বস্তু, O দ্রষ্টার চোখ এবং OH হল O বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখা। তাহলে ∠POH কোণ, প্রথম চিত্রে, উন্নতি কোণ এবং, দ্বিতীয় চিত্রে অবনতি কোণ।

12-A3. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrated Examples)

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলো থেকে প্রয়োগ পদ্ধতি ও গাণিতিক কৌশল জানা যাবে।

উদা. 1. একটি অনুভূমিক তলে একটি পতাকাদণ্ড দাঁড়িয়ে আছে। দণ্ডের পাদবিন্দু থেকে 40 ফুট দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে দেখলে দণ্ডশীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। পতাকাদণ্ডের উচ্চতা নির্ণয় কর।

ধর, AB পতাকাদণ্ড; C পর্যবেক্ষণ বিন্দু। অতএব BC = 40 ফুট। AB-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।



এখন, $\triangle$ABC সমকোণী, $\angle$B = সমকোণ।

$\therefore$ AB = BC tan 60°

= $40\sqrt{3}$

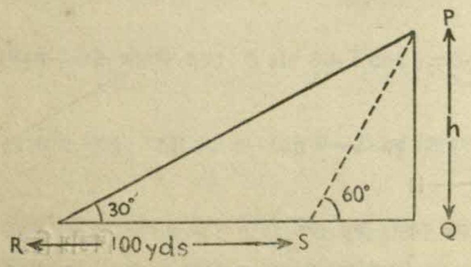
= 40 × 1·732

= 69·28 ফুট

$\therefore$ পতাকাদণ্ডের উচ্চতা = 69·28 ফুট

উদা. 2. কোন স্তম্ভের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 30°; স্তম্ভ বরাবর 100 গজ এগিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 60° হয়। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

ধর, PQ আলোচ্য স্তম্ভ। এর উচ্চতা h। প্রথম পর্যবেক্ষণ বিন্দু R এবং দ্বিতীয় পর্যবেক্ষণ বিন্দু S। $\therefore$ RS = 100 গজ; $\angle$PRQ = 30° এবং $\angle$PSQ = 60°



এখন, $\frac{h}{RQ} = \tan 30°$ এবং $\frac{h}{SQ} = \tan 60°$

$\therefore$ $RQ = h \cot 30°$; $SQ = h \cot 60°$

$\therefore$ $RQ - SQ = h (\cot 30° - \cot 60°)$

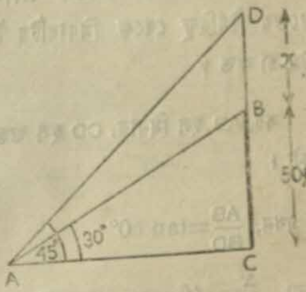
বা $100 = h(\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}) = \frac{h(3-1)}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $h = \frac{100\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} = 50 \times 1{\cdot}732 = 86{\cdot}60$ গজ

উদা. 3. 50 ফুট উচু একটি স্তম্ভের শীর্ষে একটি দণ্ড বসানো আছে। কোন এক দ্রষ্টার চোখে স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি কোণ 30°, দণ্ডশীর্ষের উন্নতি কোণ 45°। দণ্ডের দৈর্ঘ্য এবং স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে দ্রষ্টার দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধর, BD দণ্ডটির দৈর্ঘ্য $= x$; BC হল আলোচ্য স্তম্ভ এবং A পর্যবেক্ষণ বিন্দু।

$\therefore$ $\angle DAC = 45°$, $\angle BAC = 30°$, $BD = 50$ ফুট



এক্ষণে, $\frac{x + 50}{AC} = \tan 45° = 1$

$\therefore$ $x + 50 = AC$......(i)

আবার, $\frac{50}{AC} = \tan 30° = 1/\sqrt{3}$

$\therefore$ $50\sqrt{3} = AC$......(ii)

(i) ও (ii) থেকে $x + 50 = 50\sqrt{3}$

$\therefore$ $x = 50\sqrt{3} - 50$

$= 36{\cdot}6$ ফুট (প্রায়)

স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে দ্রষ্টার দূরত্ব $= AC = 50\sqrt{3} = 86{\cdot}6$ ফুট (প্রায়)

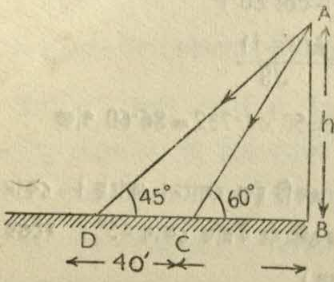
উদা. 4. সূর্যের উন্নতি 60° হলে একটি সমতল ক্ষেত্রে দণ্ডায়মান স্তম্ভের ছায়া যত দীর্ঘ হয়, সূর্যের উন্নতি কোণ 45°-তে তার চেয়ে 40 ফুট বেশি হয়। দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর। ($\sqrt{3} = 1{\cdot}7320$)

ধর, AB স্তম্ভটির উচ্চতা h। 45° উন্নতি কোণে AD সূর্য রশ্মি, BD হল সেই সময় স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য। AC হল 60° উন্নতি-কোণে সূর্যরশ্মি। BC হল সেই সময় স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য।

শর্তানুসারে, $DC = 40$ ফুট

এখন, $\frac{h}{BD} = \tan 45° = 1$ $\therefore$ $BD = h$

আবার, $\frac{h}{BC}=\tan 60° = \sqrt{3}$ $\therefore$ $BC=h/\sqrt{3}$



$\therefore$ $BD-BC=h-\frac{h}{\sqrt{3}}$

বা, $40=h(1-\frac{1}{\sqrt{3}})=h\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ $h=\frac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{40\times1\cdot732}{0\cdot732}$

$=96\cdot64$ ফুট

উদা. 5. কোন স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে একটি মিনারের উন্নতি কোণ 60° ; ঐ স্তম্ভের শীর্ষবিন্দু থেকে মিনারটির উন্নতি 30°। স্তম্ভের উচ্চতা 50 ফুট হলে, মিনারের উচ্চতা কত ?

ধর, AB হল মিনার, CD হল স্তম্ভ। CE ∥ BD টান। ধর, AB = x ফুট, BD = y ফুট।

এখন, $\frac{AB}{BD}=\tan 60°$

বা, $\frac{x}{y}=\sqrt{3}$, $\therefore$ $x=\sqrt{3}y$......(i)

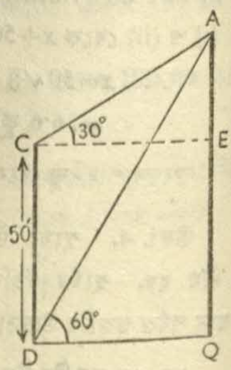
আবার, $\frac{AE}{EC}=\tan 30°$

বা, $\frac{x-50}{y}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\therefore$ $y=\sqrt{3}(x-50)$......(ii)

(i) ও (ii) থেকে $x=3(x-50)$

বা $x=75$

$\therefore$ মিনারের উচ্চতা = 75 ফুট



উদা. 6. কোন একটি স্তম্ভের শীর্ষ ও পাদবিন্দু থেকে 100 ফুট উঁচু দ্বিতীয় একটি স্তম্ভের অবনতি কোণ ও উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° এবং 25°। প্রথম স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর (দেওয়া আছে : cot 25° = 2·144)।

ধর, AB স্তম্ভটির উচ্চতা 100 ফুট ; অপর স্তম্ভটি PQ। PX রেখা BQ-এর সমান্তরাল একটি অনুভূমিক রেখা।

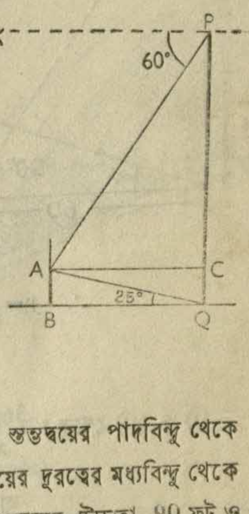
$\therefore$ $\angle APX = 60°$ এবং $AQB = 25°$

এখন $QB = AB \cot 25° \ldots\ldots$(i)

$PC = CA \tan 60°$

$= QB \tan 60°$

$= AB \cot 25° \tan 60°$ (QB-এর মান (1) নং সমীকরণ থেকে বসিয়ে)



$\therefore$ $PQ = PC + CQ$

$= PC + AB$

$= AB(\cot 25° \tan 60° + 1)$

$= 100(2{\cdot}144 \times \sqrt{3} + 1)$

$= 214{\cdot}4\sqrt{3} + 100$

$= 214{\cdot}4 \times 1{\cdot}732 + 100$

$= 371{\cdot}34 + 100 = 471{\cdot}34$ ফুট

উদা. 7. 120 ফুট ব্যবধানে ছুটি ঋজু স্তম্ভ অবস্থিত। স্তম্ভদ্বয়ের পাদবিন্দু থেকে দেখলে একের উন্নতি কোণ অপরের দ্বিগুণ। কিন্তু স্তম্ভদ্বয়ের দূরত্বের মধ্যবিন্দু থেকে দেখলে ওদের উন্নতি কোণ পরস্পর পূরক। দেখাও যে, স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতা 90 ফুট ও 40 ফুট। **(পাটনা, 1939)**

ধর, একটি স্তম্ভ AB, উচ্চতা y ফুট ; অন্যটি CD, উচ্চতা x ফুট। AB-এর পাদবিন্দু B থেকে CD-এর শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ α ; তা হলে, CD-এর পাদবিন্দু D থেকে AB-এর শীর্ষের উন্নতি কোণ 2α।

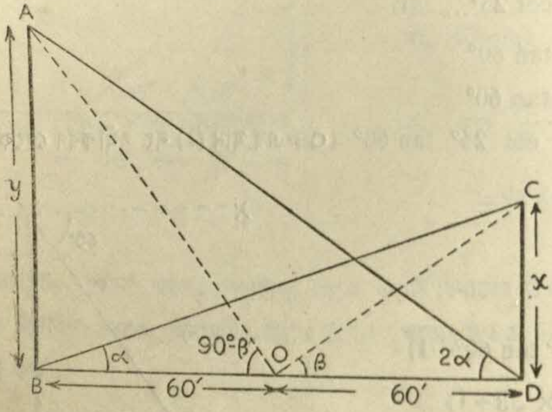
ছুই স্তম্ভের দূরত্বের মধ্যবিন্দু O থেকে C এবং A-র উন্নতি কোণ যথাক্রমে β এবং $90° - \beta$।

এখন $CD = BD \tan \alpha$ $\therefore$ $x = 120 \tan \alpha$

$AB = BD \tan 2\alpha$ $\therefore$ $y = 120 \tan 2\alpha$

$$\therefore \quad y=\frac{120\,.\,2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2x}{1-(x/120)^2} \quad \ldots \text{(i)}$$

$$\left(\because \quad \tan\alpha=\frac{x}{120}\right)$$



আবার, $CD=OD\tan\beta$

$\therefore \quad x=60\tan\beta$

এবং $AB=BO\tan(90°-\beta)$

$\therefore \quad y=60\cot\beta$

$$\therefore \quad y=\frac{60}{\tan\beta}=\frac{60}{x/60}=\frac{3600}{x} \quad \ldots \text{(ii)}$$

$$\left(\because \quad \tan\beta=\frac{x}{60}\right)$$

(i) ও (ii) থেকে : $\dfrac{3600}{x}=\dfrac{2x}{1-x^2/14400}$

বা, $\dfrac{3600}{x}=\dfrac{2x.14400}{14400-x^2}$

বা, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{8x}{14400-x^2}$

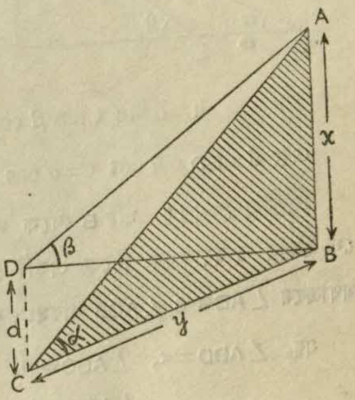
বা, $9x^2=14400$

$\therefore \quad x=40$ ফুট

$\therefore$ (ii) থেকে $y=90$ ফুট

উদা. 8. কোন একটি স্তম্ভের পাদবিন্দু থেকে সিধে দক্ষিণে অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ α ; আবার ঐ বিন্দুর সিধে পশ্চিমে d দূরত্বে অবস্থিত অপর একটি বিন্দু থেকে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ β ; দেখাও যে, স্তম্ভটির উচ্চতা হল— $d/\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}$ ।

ধর, AB স্তম্ভটির উচ্চতা x ; C হল AB-র ঠিক দক্ষিণে প্রথম পর্যবেক্ষণ বিন্দু।
$\therefore$ $\triangle$ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ধর, BC$=y$। D হল C-র পশ্চিমে C থেকে d দূরত্বে অবস্থিত দ্বিতীয় পর্যবেক্ষণ বিন্দু। কাজেই $\triangle$ABD-ও একটি সমকোণী ত্রিভুজ। DC যুক্ত কর। তাহলে, $\triangle$DCB-ও সমকোণী, DB ওর অতিভুজ। $\angle$ADB$=\beta$; $\angle$ACB$=\alpha$।



এখন, জ্যামিতি থেকে, $DB^2=DC^2+BC^2$

$$=d^2+y^2 \quad \ldots \text{(i)}$$

$\triangle$ABC থেকে : $\cot\alpha=y/x \quad \ldots$ (ii)

$\triangle$ADB থেকে : $\cot\beta=DB/x \quad \ldots$ (iii)

(2) ও (3) কে বর্গ করে এবং (1) কে ব্যবহার করে

$$\cot^2\beta-\cot^2\alpha=\frac{d^2+y^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}=\frac{d^2}{x^2}$$

$$\therefore \quad x^2=\frac{d^2}{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}$$

$$\therefore \quad x=\frac{d}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$$

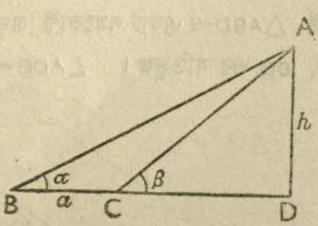
B. উচ্চতা ও দূরত্ব সংক্রান্ত কঠিনতর প্রশ্নাবলী
(Higher problems of heights and distances)

12. B1. আগের উপ-অধ্যায়ে উচ্চতা ও দূরত্ব সংক্রান্ত সহজ প্রশ্নাবলীর আলোচনা করা হয়েছে। ঐ সমস্যাগুলোর সমাধানে সমকোণী ত্রিভুজ ভিত্তিক ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত সম্বন্ধাবলীই যথেষ্ট ছিল। বর্তমান উপ-অধ্যায়ে জটিলতর সমস্যাবলী আলোচিত হবে। এক্ষেত্রে, প্রয়োজন হবে ত্রিভুজের সাধারণ ধর্মের জ্ঞান এবং আনুষঙ্গিক জ্যামিতিক প্রয়োগনৈপুণ্য।

12. B2. **একটি অনুভূমিক তলে অবস্থিত অগম্য দূরস্থ বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় (Height and distance of an inaccessible object on a horizontal plane).**

ধর, অনুভূমিক তলে উল্লম্বভাবে দণ্ডায়মান বস্তুটি AD। ঐ অনুভূমিক তলে অবস্থিত B বিন্দু দ্রষ্টার অবস্থান সূচিত করছে। AD ও BD নির্ণয় করতে হবে।

প্রথম ক্ষেত্র : B থেকে বস্তুর দিকে একটি অনুভূমিক রেখা BC নাও। B ও C বিন্দু থেকে A বিন্দুর উন্নতি যথাক্রমে α ও β এবং BC$=a$। ধর, AD$=h$ এবং BD$=d$।



এক্ষণে, $a = \text{BD} - \text{CD}$

$$= h \cot \alpha - h \cot \beta$$

$$= h \left[\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right]$$

$$= \frac{h \sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

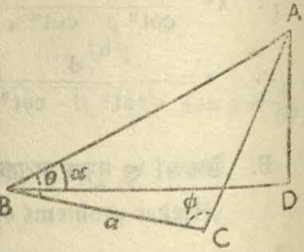
$\therefore$ $\mathbf{h} = a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$

এবং $\mathbf{d} = \text{BD} = h \cot \alpha = a \cos \alpha \sin \beta \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$ ... **(I)**

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : যদি B থেকে সরাসরি বস্তুর দিকে যাওয়া সম্ভব না হয়, সেক্ষেত্রে যে কোন সুবিধাজনক দিকে একটি দৈর্ঘ্য BC $(=a)$ মেপে নাও। B ও C থেকে যথাক্রমে $\angle$ABC ও $\angle$ACB পরিমাপ কর।

ধর, $\angle \text{ABD} = \alpha$, $\angle \text{ABC} = \theta$,

$\angle \text{ACB} = \phi$



$\triangle$ABC থেকে

$$\frac{\text{AB}}{\text{BC}} = \frac{\sin \phi}{\sin \text{BAC}} = \frac{\sin \phi}{\sin (180^\circ - \overline{\theta + \phi})}$$

$\therefore$ $\text{AB} = \text{BC} \sin \phi \operatorname{cosec} (180^\circ - \overline{\theta + \phi})$

$= a \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$

$\therefore$ $\mathbf{h} = \text{AB} \sin \alpha = a \sin \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$

এবং $\mathbf{d} = \text{BD} = \text{AB} \cos \alpha = a \cos \alpha \sin \phi \operatorname{cosec} (\theta + \phi)$ ... **(II)**

দ্রষ্টব্য 1 : (I) ও (II) রাশিমালা থেকে সহজেই লগারিদমের সাহায্যে h ও d বের করা যায়। যেমন, (I) থেকে

$$\log h = \log a + \log \sin \alpha + \log \sin \beta + \log \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$$

$$\log d = \log a + \log \cos \alpha + \log \sin \beta + \log \operatorname{cosec} (\beta - \alpha)$$

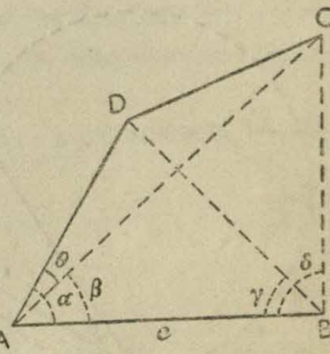
দ্রষ্টব্য 2 : দ্রষ্টার উচ্চতাকে উপেক্ষা করা হয়েছে। অনুভূমিক তল থেকেই উন্নতি কোণ মাপা হয়েছে।

12. B3. দুটি দৃশ্যমান কিন্তু অগম্য বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় **(Distance between two visible but inaccessible objects)**

ধর, C ও D দুটি দৃশ্যমান কিন্তু অগম্য বস্তু। ওদের মধ্যবর্তী দূরত্ব CD নির্ণয় করতে হবে।

ধর, একই অনুভূমিক তলে A ও B দুটি সুবিধাজনক ও সুগম বিন্দু এবং ওদের মধ্যবর্তী দূরত্ব AB $= c$।

A বিন্দুতে $\angle$DAB, $\angle$CAB এবং $\angle$DAC মাপ এবং ধর ওগুলো যথাক্রমে α, β ও θ। B বিন্দুতে $\angle$DBA এবং $\angle$CBA মাপ এবং γ ও δ দিয়ে যথাক্রমে ওদের সূচিত কর।



এক্ষণে, $\triangle$DAB থেকে

$$\frac{DA}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \overline{\alpha+\gamma})} = \frac{c}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

$$\therefore \quad DA = c\sin\gamma\,\text{cosec}\,(\alpha+\gamma) \qquad \dots \text{(i)}$$

অনুরূপে, $\triangle$CAB থেকে $CA = c\sin\delta\,\text{cosec}\,(\beta+\delta) \qquad \dots$ (ii)

আবার, $\triangle$DAC থেকে, $CD^2 = DA^2 + CA^2 - 2DA.CA\cos\theta$। কাজেই (i) ও (ii) থেকে DA ও CA-এর মান বসিয়ে CD নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য : যদি D, A, B, C বিন্দুগুলো একই সমতলে অবস্থিত হয় তবে $\angle$DAB কোণ নিরূপণ নিরর্থক ; কেননা, তাহলে

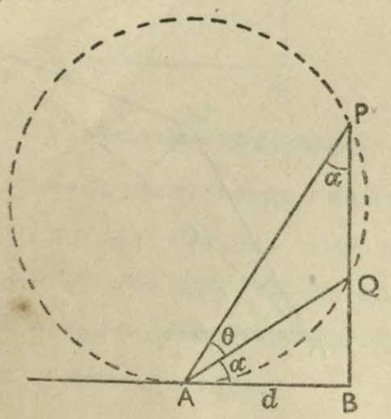
$$\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB = \theta + \beta$$

12. B4. কষে দেওয়া উদাহরণ **(Illustrated examples)**

উদা. **1.** পতাকাদণ্ডযুক্ত একটি অট্টালিকার দিকে অগ্রসরমান এক ব্যক্তি দেখলেন যে, অট্টালিকার পাদদেশ থেকে d দূরত্বে পতাকাদণ্ডটি বৃহত্তম কোণ উৎপন্ন করে। এই বৃহত্তম কোণের পরিমাণ θ হলে, অট্টালিকার উচ্চতা ও পতাকাদণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(পাটনা, 1941)

ধর, QB একটি অট্টালিকা, PQ ওর উপরস্থ পতাকাদণ্ড। QB থেকে d দূরত্বে A একটি বিন্দু। শর্তানুসারে A বিন্দুতে PQ এর সম্মুখকোণ বৃহত্তম। PQ এবং QB-এর মাননির্ণয় করতে হবে। জ্যামিতি থেকে জানা যায় যে, P, Q ও A বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তটি যদি ABকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবেই AB-র উপর A বিন্দুতে PQ-র সম্মুখকোণ বৃহত্তম হবে।



ধর, $\angle QAB\ (=\angle APQ)=\alpha$

$\because\ \angle PAB+\angle APB=90^\circ,$

$\theta+2\alpha=90^\circ$

এক্ষণে, $PQ=PB-QB$

$=d\tan(\theta+\alpha)-d\tan\alpha$

$=d\left[\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right]$

$=d\,\dfrac{\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}$

$=\dfrac{2d\sin\theta}{\cos(\theta+2\alpha)+\cos\theta}$

$(\because\ \theta+2\alpha=90^\circ)$

$=2d\tan\theta$

এবং $QB=d\tan\alpha=d\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

উদা. 2. r ফুট ব্যাসার্ধের একটি গোলাকার বেলুন যখন কোন দ্রষ্টার চোখে α কোণ উৎপন্ন করে, তখন এর কেন্দ্রের উন্নতি কোণ β। বেলুনের কেন্দ্রের উচ্চতা কত?

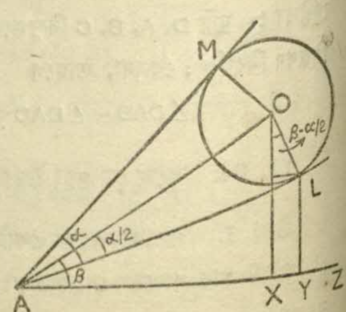
ধর, A দর্শকের চোখ, AZ হল A বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখা, O বেলুনের কেন্দ্র।

$\therefore\ \angle OAZ=\beta$

A থেকে AM ও AL বেলুনে স্পর্শক টান। অতএব $\angle MAL=\alpha$

$\therefore\ \angle LAO=\frac{1}{2}\angle MAL=\frac{1}{2}\alpha$।

AZ এর উপর LY ও OX এবং OX-এর উপর LR লম্ব টান।



$\therefore$ বেলুনের কেন্দ্রের উচ্চতা

$=OL\cos LOR+AL\sin LAY$

$=r\cos(\beta-\alpha/2)+OL\cot OAL.\ \sin LAY$

$$= r\cos(\beta-\alpha/2) + r\cot\alpha/2 . \sin(\beta-\alpha/2)$$

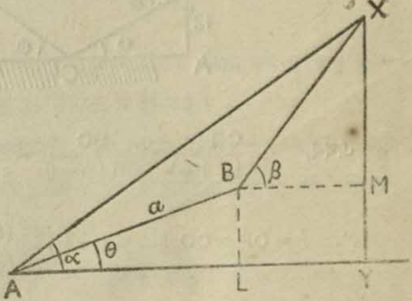
$$= \frac{r}{\sin\alpha/2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\beta-\alpha/2)+\cos\alpha/2 . \sin(\beta-\alpha/2)\right]$$

$$= \frac{r\sin\beta}{\sin\alpha/2}$$

উদা. 3. কোন একটি বিন্দু A থেকে একটি পর্বতশীর্ষের উন্নতি কোণ α। অনুভূমিক তলের সঙ্গে θ পরিমাণ ঢালযুক্ত পর্বতঢালে শীর্ষ অভিমুখে a দূরত্ব এগিয়ে দেখা গেল, উন্নতি কোণ β। পর্বতের উচ্চতা কত ?

ধর, XY আলোচ্য পর্বত, X হল পর্বতশীর্ষ। A ও B যথাক্রমে দুই দর্শন-বিন্দু। ধর $XY = x$

$\therefore AB = a$, $\angle XAY = \alpha$, $\angle BAY = \theta$, $\angle XBM = \beta$। BM হল B বিন্দুগামী অনুভূমিক রেখা। AY-র উপর BL লম্ব টান।



এক্ষণে, $XM = XY - YM = x - BL = x - a\sin\theta$

এবং $BM = LY = AY - AL = x\cot\alpha - a\cos\theta$

$$\therefore \tan\beta = \frac{XM}{BM} = \frac{x - a\sin\theta}{x\cot\alpha - a\cos\theta}$$

$$\therefore x = \frac{a\sin\alpha\sin(\beta-\theta)}{\sin(\beta-\alpha)} \quad \text{(সরলীকরণ করে)}$$

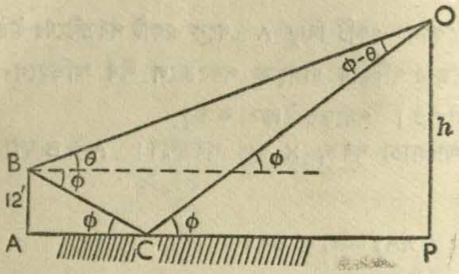
উদা. 4. একটি লেকের 12 ফুট উপরস্থ কোন বিন্দু থেকে দেখা গেল দূরস্থিত কোন স্তম্ভশীর্ষে একটি আলোকবর্তিকার উন্নতি কোণ 24°55′। আর লেকের জলে ঐ বর্তিকার প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ 35°5′। দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত ঐ স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর। দেওয়া আছে : $\log 2 = 0{\cdot}30103$, $\log 3 = 0{\cdot}47712$, $\log 588 = 2{\cdot}76938$, $\log 589 = 2{\cdot}77012$, $L\sin 10°10' = 9{\cdot}24677$।

ধর, O হল OP স্তম্ভশীর্ষস্থ আলোকবিন্দু ; B দ্রষ্টা। OC আলোকরশ্মি। C বিন্দুতে লেকের জলে আপতিত হয়েছে, CB প্রতিফলিত রশ্মি। ধর $OP = h$ ফুট। শর্তানুসারে, $AB = 12$ ফুট।

এক্ষণে, প্রতিফলনের সূত্রানুসারে $\angle BCA = \angle OCP = \phi$ (ধর)

$\therefore \quad \phi = 35°5'$ (অবনতি কোণ)

যদি B থেকে O বিন্দুর উন্নতি কোণ θ হয়, তবে $\theta = 24°55'$



এখন, $\dfrac{CO}{\sin(\theta+\phi)} = \dfrac{BC}{\sin(\phi-\theta)} = \dfrac{12}{\sin\phi\,\sin(\phi-\theta)}$ ফুট

$$\therefore \quad h = OP = CO\,\sin\phi = 12\,\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\phi-\theta)} = 12\,\frac{\sin 60°}{\sin 10°10'}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{\sin 10°10'} = \frac{2\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{\sin 10°10'}$$

$\therefore \quad \log h = \log 2 + \frac{3}{2}\log 3 + 10 - L\sin 10°10'$

$= 0{\cdot}30103 + \frac{3}{2}\times(0{\cdot}47712) + 10 - 9{\cdot}24677$

$= 1{\cdot}76994$

$\therefore \quad \log h$-এর মান $\log 58{\cdot}8$ এবং $\log 58{\cdot}9$-এর মধ্যবর্তী ।

ধর, $h = 58{\cdot}8 + x$

$0{\cdot}1$-এর জন্য পার্থক্য $= 1{\cdot}77012 - 1{\cdot}76938 = 0{\cdot}00074$

$\therefore \quad x$-এর জন্য পার্থক্য $= 1{\cdot}76994 - 1{\cdot}76938 = 0{\cdot}00056$

$$\therefore \quad \frac{x}{0{\cdot}1} = \frac{56}{74} = 0{\cdot}75$$

$\therefore \quad x = 0{\cdot}075 = 0{\cdot}08$ (প্রায়)

$\therefore \quad h = 58{\cdot}88$ ফুট

উদাহরণমালা 12

A. সহজ সমস্যাবলী

1. একটি তালগাছের পাদবিন্দুর 40 ফুট দূর থেকে জনৈক দ্রষ্টা বৃক্ষশীর্ষের উন্নতি কোণ 60° দেখলেন। গাছটির উচ্চতা কত ?

2. বৃত্তাকার একটি পুকুরের কেন্দ্র থেকে উল্লম্বভাবে একটি দণ্ড দাঁড়িয়ে আছে। জলের উপরে দণ্ডের দৈর্ঘ্য 150 ফুট। বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে দণ্ডকর্তৃক উৎপন্ন কোণ 60°। পুকুরের ব্যাসার্ধ কত ?

3. 200 ফুট লম্বা একটি স্তম্ভের ছায়ার দৈর্ঘ্য $200\sqrt{3}$ ফুট। সূর্যের উন্নতি নির্ণয় কর।

4. এক ব্যক্তি দেখলেন একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ 30°; 300 ফুট স্তম্ভের দিকে এগিয়ে দেখলেন নতুন উন্নতি কোণ 60°; স্তম্ভের উচ্চতা নির্ণয় কর।

5. 45 ফুট লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের শীর্ষদেশকে ঠিক স্পর্শ করে। যদি দেওয়ালের সঙ্গে মইটি 60° কোণ উৎপন্ন করে তা হলে দেওয়ালের উচ্চতা এবং মই-এর পাদবিন্দু থেকে দেওয়ালের দূরত্ব বের কর।

6. একটি চিম্‌নী আর একটির চেয়ে 30 ফুট বেশি উঁচু। নীচু চিম্‌নী থেকে 100 ফুট দূরে দাঁড়িয়ে দেখা গেল যে, চিম্‌নী দুটির শীর্ষবিন্দু অনুভূমিক রেখার সঙ্গে 27°2′ কোণে অবস্থিত একটি রেখায় রয়েছে। চিম্‌নী দুটির উচ্চতা নির্ণয় কর; দেওয়া আছে,

[$\tan 27°2' = 0{\cdot}51$]

7. কোন পাহাড়ের ঠিক পূর্বে অবস্থিত কোন বিন্দু থেকে পাহাড়ের উন্নতি 45°। এই বিন্দুর ঠিক দক্ষিণস্থ দ্বিতীয় আর একটি বিন্দু থেকে উন্নতি 30°। যদি দুই পর্যবেক্ষণ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 400 গজ হয়, তবে পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

8. কোন চূড়ার ঠিক দক্ষিণস্থ কোন বিন্দু থেকে চূড়ার উন্নতি 45°। এই বিন্দুর ঠিক পশ্চিমের আর একটি বিন্দু থেকে উন্নতি 30°। যদি দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব a হয়, তবে চূড়ার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

9. সমতলে অবস্থিত কোন ঋজু স্তম্ভের উন্নতি কোণ যখন 45° তখন স্তম্ভটির ছায়া 30° উন্নতি-কোণ-কালীন ছায়ার তুলনায় 100 ফুট বেশি দীর্ঘ। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?

10. একটি সোজা রাস্তা বরাবর হেঁটে এক ব্যক্তি একটি মাইলস্তম্ভে একটি বাড়ী রাস্তার সঙ্গে 30° কোণে অবস্থিত দেখলেন। দ্বিতীয় মাইলস্তম্ভে দেখলেন রাস্তার সঙ্গে 60° কোণে। রাস্তা থেকে বাড়ীর দূরত্ব নির্ণয় কর।

11. গঙ্গাতীরে কোন এক স্থান থেকে এক ব্যক্তি সরাসরি অপর তীরের একটি গাছের উন্নতি কোণ 60° দেখলেন। দর্শনকালে তাঁর চোখ মাটির সঙ্গে একই লেভেলে ছিল। তারপর 100 ফুট সরে গিয়ে তিনি দেখলেন উন্নতি কোণ 45°। গাছের উচ্চতা ও ঐ স্থানে গঙ্গার বিস্তার নির্ণয় কর।

12. 150 ফুট উঁচু একটি পাহাড়ের চূড়া থেকে এক ব্যক্তি তাঁর ঠিক দক্ষিণে অবস্থিত দুটি নৌকোর অবনতি কোণ 15° এবং 75° দেখলেন। $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$, $\cot 75^\circ = 2-\sqrt{3}$ হলে দুই নৌকোর ব্যবধান কত?

13. 196 ফুট উঁচু কোন মনুমেন্ট থেকে কোন স্তম্ভের শীর্ষ এবং পাদবিন্দুর অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° দেখা গেল। স্তম্ভের উচ্চতা কত?

14. একটি অট্টালিকার শীর্ষে একটি দণ্ড দণ্ডায়মান। 60 ফুট দূর থেকে দণ্ডের শীর্ষবিন্দু এবং অট্টালিকার শীর্ষের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30° দেখা গেল। দণ্ডের দৈর্ঘ্য কত?

15. কোন পর্বতের পাদদেশে কোন স্থানে পর্বতশীর্ষের উন্নতি 45° দেখা গেল; পর্বতের দিকে 30° ঢাল বেয়ে 2 মাইল উঠে উন্নতি কোণ 60° দেখা গেল। পর্বতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

16. A স্টেশনের ঠিক উত্তরে একটি টাওয়ারের উন্নতি θ; A স্টেশনের পশ্চিমে অবস্থিত B স্টেশন থেকে ঐ টাওয়ারের উন্নতি কোণ ϕ। দেখাও যে, টাওয়ারটির উচ্চতা

$$\frac{AB \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\phi}}$$

17. l-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক ব্রীজ দিয়ে একটি উপত্যকার দুই ধার যুক্ত। উপত্যকার পার্শ্বদ্বয় অনুভূমির সঙ্গে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, উপত্যকার নিম্নদেশ থেকে ব্রীজের উচ্চতা h হলে

$$h = \frac{1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

18. প্রজ্বলিত একটি মোমবাতির উচ্চতা 6 ইঞ্চি এবং এর প্রস্থচ্ছেদের ব্যাসার্ধ $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি। মোমবাতির ছায়ার ব্যাসার্ধ $5\frac{1}{4}$ ইঞ্চি। অগ্নিশিখার উচ্চতা কত? শিখার শীর্ষবিন্দু এবং ছায়ার সীমারেখার উপর একটি বিন্দুর সংযোজক রেখা যদি অনুভূমির সঙ্গে α কোণ উৎপন্ন করে তবে দেখাও যে, $\tan\alpha = 4/3$।

B কঠিনতর সমস্যাবলী (Harder problems)

19. একই উচ্চতায় কিন্তু 6,000 ফুট ব্যবধানে অবস্থিত দুটি বিন্দু A ও B থেকে একটি পর্বতের উচ্চতা পরিমাপের জন্য পর্যবেক্ষণ চালান হল। A-তে পর্বতশীর্ষের উন্নতি 75°, B-তে 60°। পর্বতের উচ্চতা কত ?

20. সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুতে একটি মঞ্চ α কোণ উৎপন্ন করে, আর মঞ্চস্থিত b ফুট উঁচু এক ব্যক্তি ঐ বিন্দুতে ϵ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, মঞ্চের উচ্চতা

$$\frac{b \sin \alpha \cos (\alpha+\epsilon)}{\sin \epsilon}$$

21. একটি সোজা রাস্তা বরাবর হেঁটে এক ব্যক্তি পরপর দুটি মাইলস্তম্ভে তাঁর সামনের কোন একটি পর্বতের উন্নতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 75° দেখতে পেল। পর্বতটির উচ্চতা কত ?

22. সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুতে একটি টাওয়ার α কোণ উৎপন্ন করে। আর ঐ টাওয়ার শীর্ষে c ফুট একটি পতাকাদণ্ড ঐ বিন্দুতে β কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা

$$c \sin \alpha \operatorname{cosec} \beta \cos (\alpha+\beta)$$

23. কোন পাহাড়ের উন্নতি 47° ; 32° ঢালের পথ বেয়ে ওর দিকে 1,000 ফুট এগুলে উন্নতি 77° হয়। প্রথম পর্যবেক্ষণ বিন্দু থেকে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে sin 47° = 0·731.

24. অনুভূমিক তলে দণ্ডায়মান কোন দেওয়ালের শীর্ষে একটি পতাকা প্রোথিত আছে। ঐ অনুভূমিক তলে দাঁড়ানো কোন দ্রষ্টার চোখে দেওয়াল ও পতাকা যথাক্রমে α ও β কোণ উৎপন্ন করে। দ্রষ্টা তারপর দেওয়ালের দিকে সোজা c দূরত্ব এগিয়ে গিয়ে দেখলেন যে, পতাকা সেই β কোণ-ই উৎপন্ন করছে। দেওয়াল ও পতাকার উচ্চতা কত ?

26. একটি মঞ্চশীর্ষে পতাকা বসানো আছে। সরলরৈখিক রাস্তা বরাবর মঞ্চের অভিমুখে ভ্রাম্যমাণ কোন ব্যক্তি দেখলেন যে, পতাকার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ β ; রাস্তা বরাবর আরও a দূরত্ব হেঁটে ঐ ব্যক্তি দেখেন যে, পতাকা চরম কোণ α উৎপন্ন

করছে; দেখাও যে, পতাকার উচ্চতা

$$\frac{2a \sin\alpha \sin\beta}{\cos\beta + \sin(\alpha - \beta)}$$

26. কোন মঞ্চ CD থেকে সোজা দক্ষিণে কোন বিন্দু A-তে মঞ্চটি 30° উন্নতি কোণ উৎপন্ন করে; A থেকে সোজা পশ্চিমে B বিন্দুতে ঐ মঞ্চের উন্নতি কোণ 18°। যদি AB $= a$ হয়। তবে দেখাও যে মঞ্চের উচ্চতা $a/\{\sqrt{2+2\sqrt{5}}\}$

27. দুটি উল্লম্ব দণ্ডের উচ্চতা a ও b; ওদের পাদ বিন্দুর সংযোগ রেখার উপর কোন বিন্দুতে দণ্ডদ্বয় একই কোণ α উৎপন্ন করে। অনুভূমিক তলের যে বিন্দুতে ঐ সংযোজক রেখা 90° কোণ উৎপন্ন করে সেই বিন্দুতে দণ্ডদ্বয় যথাক্রমে β এবং γ কোণ উৎপন্ন করলে দেখাও যে,

$$(a+b)^2 \cot^2 \alpha = a^2 \cot^2 \beta + b^2 \cot^2 \gamma$$

28. কোন স্তম্ভের সোজা পূবে P স্টেশন থেকে স্তম্ভের উন্নতি কোণ θ; আর P স্টেশনের সোজা উত্তরে Q স্টেশন থেকে উন্নতি কোণ ϕ; দেখাও যে, স্তম্ভের উচ্চতা

$$\frac{PQ \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{\sin(\theta+\phi)\sin(\theta-\phi)}}$$ (বেনারস 1953)

29. $2a$ দৈর্ঘ্যযুক্ত কোন ভূমিক রেখার (base line), উভয় প্রান্ত থেকেই কোন পর্বতশীর্ষের কৌণিক উচ্চতা θ; আর ঐ রেখার মধ্যবিন্দু থেকে কৌণিক উচ্চতা ϕ; দেখাও যে, অনুভূমিক তল থেকে পর্বতশীর্ষের উচ্চতা

$$\frac{a \sin\theta \sin\phi}{\sqrt{\sin(\theta+\phi)\sin(\phi-\theta)}}$$ (এলাহাবাদ 1955)

30. h ফুট-উচ্চতার একটি দেওয়ালে দাঁড়িয়ে এক ব্যক্তি দেখলেন যে, একটি টেলিগ্রাফ পোস্টের উন্নতি α; তারপর দেওয়াল থেকে নেমে লক্ষ্য করলেন উন্নতি β; দেখাও যে, পোস্টের উচ্চতা ঐ ব্যক্তির চেয়ে $\dfrac{h \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ ফুট বেশি।

31. α কোণে হেলানো কোন পাহাড়ের পাদদেশ থেকে a দূরত্বে একটি টাওয়ার অনুভূমিক তলে দণ্ডায়মান। পাহাড়ের মাথায় দাঁড়ানো কোন এক ব্যক্তি টাওয়ারের থেকে b দূরত্বের একটি পুষ্করিণীকে টাওয়ারের উপর দিয়ে ঠিক দেখতে পায়। যদি পাহাড়ের পাদদেশ থেকে দ্রষ্টার দূরত্ব c হয় তবে দেখাও যে, টাওয়ারের উচ্চতা

$$\frac{bc \sin\alpha}{a+b+c \cos\alpha}$$

32. পরস্পর ঠিক উত্তর-দক্ষিণে অবস্থিত দুটি পথচিহ্ন একটি নদীর দ্বারা বিচ্ছিন্ন। এক ব্যক্তি একটি পথচিহ্ন থেকে প্রথমে সোজা পশ্চিমে a দূরত্ব, তারপর আরও b দূরত্ব গিয়ে দেখেন যে, প্রথম ক্ষেত্রে বস্তু তার চোখে যে কোণ উৎপন্ন করে তা দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উৎপন্ন কোণের তিন গুণ। দেখাও যে, দুই পথচিহ্নের পারস্পরিক দূরত্ব

$$(a+b)\sqrt{(b-2a)/(3b+2a)}.$$

33. কোন রাস্তার এক ধারের একটি বাড়ী থেকে বিপরীত ধারের একটি বাড়ী যে কোণ উৎপন্ন করে তা পর্যবেক্ষণ করা হচ্ছিল —প্রথমে রাস্তার তল থেকে, পরে c উঁচু একটি ঘরের জানালা থেকে। যদি কোণগুলি যথাক্রমে α ও β হয় তবে দেখাও যে, বিপরীত বাড়ীটির উচ্চতা h নিম্নোক্ত সমীকরণ সিদ্ধ করে।

$$\frac{c^2}{h^2}-\frac{c}{h}=\cot\beta\cot\alpha-\cot^2\alpha$$

34. দুই বিন্দু A ও B-কে ঐ সমতলেরই অপর দুই বিন্দু C ও D থেকে দেখা হচ্ছে ; CD-দূরত্ব d ; $\angle ACD$, $\angle BCD$, $\angle ADC$, $\angle BDC$, যথাক্রমে α, β, γ, δ হলে এবং $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ হলে দেখাও যে,

$$AB=\frac{d\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

35. একই অনুভূমিক তলে P ও Q দুটি অগম্য বিন্দু এবং S এবং T দুটি স্টেশন। স্টেশন দুটির প্রত্যেকটিতে PQ রেখা α কোণ উৎপন্ন করে, S বিন্দুতে PT রেখা β কোণ এবং T বিন্দুতে QS রেখা γ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে,

$$PQ=\frac{ST\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma-\alpha)}$$ (বেনারস 1950)

36. কোন রেলপথের ধারে সম-ব্যবধানে A, B, C তিনটি টেলিগ্রাফ খুঁটি অবস্থিত। যে কোন বিন্দু P-তে AB এবং BC যে কোণ উৎপন্ন করে তাদের ট্যাঞ্জেন্ট যথাক্রমে t ও t' হলে, দেখাও যে,

$$\frac{2}{T}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t'};$$

BP রেখা রেলপথের সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ট্যাঞ্জেন্ট হল T

37. ABCD একটি অনুভূমিক আয়তাকার ক্ষেত্র। ঐ ক্ষেত্রে একটি উল্লম্ব দণ্ড প্রোথিত করে দেখা গেল যে, A, B, C এবং D বিন্দু থেকে দণ্ডের শীর্ষের উন্নতি যথাক্রমে α, β, γ এবং δ ; দেখাও যে, $\cot^2\alpha-\cot^2\beta=\cot^2\delta-\cot^2\gamma$

38. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমান সময়ের ব্যবধানে চারবার পর্যবেক্ষণ করে অনুভূমিক সরলরেখায় উড্ডীয়মান কোন পাখির উন্নতি কোণ দেখা গেল α, β, γ এবং δ; পাখি সমবেগে সঞ্চরণশীল ধরে নিয়ে দেখাও যে,

$$\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma) \qquad \text{(পাটনা, 1941)}$$

39. কোন অনুভূমিক তলে দণ্ডায়মান একটি গাছ উত্তর দিকে θ কোণে হেলানো। গাছের গোড়া থেকে a, b দূরত্বে এবং সোজা দক্ষিণে অবস্থিত দুই বিন্দু থেকে গাছটির কৌণিক উচ্চতা যথাক্রমে α ও β ; দেখাও যে,

$$\tan\theta = (a-b)/(a\cot\beta - b\cot\alpha)$$

40. সরলরৈখিক রাস্তায় v বেগে গতিশীল গাড়ি থেকে এক ব্যক্তি তাঁর কোন এক অবস্থানে নিজেকে দূরস্থিত দুটি গাছের সঙ্গে একই রেখায় দেখলেন এবং লক্ষ্য করলেন রাস্তার সঙ্গে ঐ রেখাটি একটি কোণ উৎপন্ন করছে। t সময় পরে তিনি গাছ দুটো চরম কোণ ϕ উৎপন্ন করছে দেখলেন। দেখাও যে, গাছ দুটির অন্তর্বর্তী দূরত্ব

$$\frac{2vt\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta+\cos\phi}$$

41. কোন টাওয়ারের শীর্ষস্থিত r ব্যাসার্ধের একটি গোলক ভূমিস্থ কোন বিন্দুতে 2α কোণ উৎপন্ন করে। ঐ বিন্দুতে গোলকের কেন্দ্রের উন্নতি কোণ ϕ ; দেখাও যে, মাটি থেকে গোলকের কেন্দ্রের উচ্চতা $r\sin\phi\operatorname{cosec}\alpha$.

42. উত্তর দিকে কিছুটা হেলানো কোনও টাওয়ারের ঠিক দক্ষিণে দুটি স্টেশন আছে। টাওয়ারের পাদবিন্দু থেকে স্টেশন দুটির দূরত্ব a এবং b ; θ ও ϕ উন্নতি হলে, দেখাও যে, টাওয়ারটি অনুভূমির সঙ্গে $\cot^{-1}\left(\dfrac{b\cot\theta - a\cot\phi}{b-a}\right)$ কোণে হেলানো। (এলাহাবাদ, 1957)

43. একটি হ্রদের x ফুট উঁচুতে কোন বিন্দু থেকে একখণ্ড মেঘের উন্নতি কোণ θ এবং লেকের জলে মেঘের প্রতিবিম্বের অবনতি কোণ ϕ দেখা গেল। দেখাও যে, মেঘের উচ্চতা (ফুটে) $x\sin(\theta+\phi)/\sin(\phi-\theta)$. (এলাহাবাদ, 1956)

44. একটি চিমনী উত্তর দিকে কিছুটা হেলানো। অনুভূমিক তলে অবস্থিত এবং চিমনী থেকে সমান দূরে ঠিক উত্তর এবং দক্ষিণের দুটি বিন্দু থেকে চিমনী-শীর্ষের উন্নতি

α এবং β ; দেখাও যে, চিমনীটি উল্লম্ব রেখার সঙ্গে y কোণ উৎপন্ন করলে

$$y = \tan^{-1} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$ (এলাহাবাদ, 1954)

কোণ উৎপন্ন করে।

45. পাদদেশ থেকে অজানা দূরত্বে কোন পর্বতশীর্ষের উন্নতি 28° ; একই রেখা বরাবর আরও 3 মাইল 77 গজ সরে গেলে উন্নতি 16°-তে দাঁড়ায়। পর্বতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে :

$$\log \; 1{\cdot}6071 = 0{\cdot}2060, \; L\sin 12° = 9{\cdot}3179$$

$$L\sin 16° = 9{\cdot}4403, \text{ এবং } L\sin 28° = 9{\cdot}6716$$

(এলাহাবাদ, 1949)

46· সমতলক্ষেত্রে দাঁড়োনো কোন মঞ্চের শীর্ষে একটি পতাকা প্রোথিত আছে। ঐ সমতলের কোন বিন্দুতে মঞ্চ α এবং পতাকা β কোণ উৎপন্ন করে। মঞ্চের a ফুট নিকটতর অপর একটি বিন্দুতেও পতাকা β কোণ উৎপন্ন করলে দেখাও যে, মঞ্চের উচ্চতা

$$\frac{a \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan(\alpha+\beta)}$$ (পাটনা, 1945)

1 প্রথম অধ্যায়

স্থানাঙ্ক (Co-ordinates)

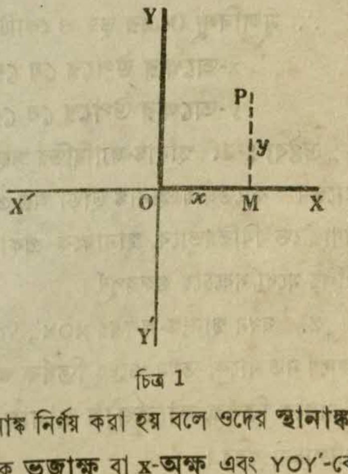
1.1. স্থানাঙ্ক জ্যামিতির উদ্দেশ্য হল বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির অনুশীলন করা। বিখ্যাত ফরাসী দার্শনিক-গণিতবিদ রেনে দেকার্তে (Rene Descartes) সর্বপ্রথম সামতলিক কোন বিন্দুর অবস্থান ও দুটি বীজগাণিতিক রাশির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সম্বন্ধ স্থাপনের দ্বারা বীজগণিত ও জ্যামিতির সংযোগ সাধন করেন। কোন বিন্দুর অবস্থান বোঝানোর জন্য যে দুটি বৈজিক রাশি ব্যবহৃত হয় তাদের ঐ বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** —দেকার্তে-র নামানুসারে **কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক** (Cartesian Co-ordinates)— বলা হয়।

1.2. সমতলীয় লম্ব কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক (Plane rectangular Cartesian Co-ordinates)

সাধারণভাবে প্রচলিত স্থানাঙ্ক এভাবে বর্ণনা করা হয় :

ধরা যাক, কাগজের সমতলে XOX′ ও YOY′ পরস্পরছেদী ও পরস্পর লম্ব দুটি সরলরেখা। O ওদের ছেদবিন্দু। রেখা দুটি সমতলটিকে চারটি পাদে বিভক্ত করল; প্রচলিত নিয়ম অনুসারে XOY প্রথম পাদ, YOX′ দ্বিতীয় পাদ, X′OY′ তৃতীয় পাদ এবং Y′OX চতুর্থ পাদ। সরলরেখা দুটি (XOX′ ও YOY′) নির্দিষ্ট হলে ছেদবিন্দু O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হবে; O-এর অবস্থান থেকে এই সমতলে যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

ধরা যাক, এই সমতলে P যে কোন বিন্দু। OX-এর উপর PM লম্ব টানা হল। OM ও MP দৈর্ঘ্যদ্বয়কে সাধারণত যথাক্রমে x ও y দ্বারা চিহ্নিত করা হয় ও এদের P বিন্দুর লম্ব কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক অথবা সংক্ষেপে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলে। স্পষ্টত P বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানলে ওর অবস্থান জানা যাবে।



চিত্র 1

XOX′, YOY′ সরলরেখা দুটির সাপেক্ষে স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা হয় বলে ওদের **স্থানাঙ্ক-অক্ষ** বা শুধু **অক্ষ** (axis) বলে। XOX′-কে **ভুজাক্ষ** বা **x-অক্ষ** এবং YOY′-কে

কোটি-অক্ষ বা y-অক্ষ। অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু O-কে **মূলবিন্দু** (origin) বলে। দূরত্ব OM($=x$)-কে বলা হয় **x-স্থানাঙ্ক** অথবা **ভুজ** (abscissa) এবং দূরত্ব PM($=y$)-কে **y-স্থানাঙ্ক** অথবা **কোটি** (ordinate)। P বিন্দুটিকে (x, y)-দ্বারা উল্লেখ করা হয়।

1.3. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক স্থানাঙ্ক (Positive and Negative co-ordinates)

OM ও MP-এর দৈর্ঘ্য জানা থাকলেই P বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা সম্ভব নয়। কারণ, P চারটি পাদের যে কোন পাদে অবস্থিত হতে পারে। সেক্ষেত্রে OM y-অক্ষের ডান বা বাঁ দিকে এবং MP x-অক্ষের উপরে বা নিচে থাকতে পারে। স্থানাঙ্ক-জ্যামিতিতে বিন্দুর অবস্থান সুনির্দিষ্ট করার জন্য প্রচলিত নিয়ম অনুযায়ী স্থানাঙ্কের উপযুক্ত চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

চিহ্নসম্বন্ধীয় প্রচলিত নিয়ম: y-অক্ষের ডানদিকে x-অক্ষ বরাবর বা x-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্বগুলি ধনাত্মক এবং y-অক্ষের বামদিকে x-অক্ষ বরাবর বা x-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্বগুলি ঋণাত্মক।

অনুরূপভাবে, x-অক্ষের উপরের দিকে y-অক্ষ বরাবর বা y-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্বগুলি ধনাত্মক এবং x-অক্ষের নিচের দিকে y-অক্ষ বরাবর বা y-অক্ষের সমান্তরাল দূরত্বগুলি ঋণাত্মক।

প্রথমপাদে অবস্থিত বিন্দুর ভুজ ও কোটি দুই ধনাত্মক, স্থানাঙ্ক (x, y)।
দ্বিতীয়পাদে ,, ,, ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক, স্থানাঙ্ক ($-x$, y)।
তৃতীয়পাদে ,, ,, ভুজ ও কোটি দুই ঋণাত্মক, স্থানাঙ্ক ($-x$, $-y$)।
চতুর্থপাদে ,, ,, ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক, স্থানাঙ্ক (x, $-y$)।

∴ **মূলবিন্দু 0-এর** ভুজ ও কোটি শূন্য ; সুতরাং ওর **স্থানাঙ্ক** (o, o)।

x-অক্ষের উপরে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, o)।

y-অক্ষের উপরে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (y, o)।

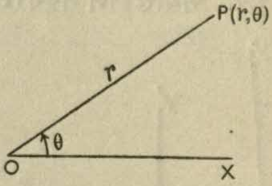
দ্রষ্টব্য : 1. স্থানাঙ্ক-জ্যামিতির অনুশীলনে স্থানাঙ্ক প্রণালীর একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে। কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক ছাড়া অন্য প্রণালীর স্থানাঙ্কও আছে। বিভিন্ন পদ্ধতি বা প্রণালীতে বিভিন্নভাবে স্থানাঙ্ককে প্রকাশ করা হয় ; কার্তেজীয় পদ্ধতিই সমস্ত পদ্ধতিগুলির মধ্যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ।

2. যখন স্থানাঙ্ক-অক্ষদ্বয় XOX′, YOY′ পরস্পর সমকোণে নত না হয়ে অন্য কোন কোণে নত থাকে, তখন ওদের **তির্যক অক্ষ** (oblique axes) বলে এবং এই প্রণালীতে স্থানাঙ্ককে **তির্যক কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক** বলে। আমরা লম্ব কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক প্রণালীই আলোচনা করব।

1.4. মেরু স্থানাঙ্ক (Polar co-ordinates)

সমতলে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের আর একটি পদ্ধতি হল মেরু স্থানাঙ্কের দ্বারা অবস্থান জ্ঞাপন।

বিন্দুর সমতলে OX একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা; O ঐ সরলরেখার নির্দিষ্ট একটি বিন্দু। O বিন্দুকে বলা হয় **মেরু** (pole) এবং OX রেখাকে **প্রাথমিক রেখা** (initial line)। ধর, P যে কোন একটি বিন্দু। OP যোগ কর এবং $OP = r$ এবং $\angle XOP = \theta$; তা হলে r ও θ-র মানের সাহায্যে সমতলে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করা চলে। r, θ-কে P বিন্দুর **মেরু স্থানাঙ্ক**: $P(r, \theta)$ বলে। r-কে বলা হয় **ব্যাসার্ধ ভেক্টর** (radius vector) এবং θ-কে বলা হয় **নতি কোণ** (vectorial angle)। θ-কে OX থেকে বামাবর্তে মাপা হয়।



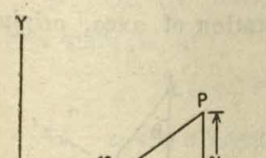
চিত্র 2

দ্রষ্টব্য: 1. $r = 0$ হলে P বিন্দু মেরুতে অবস্থিত। r-এর মান সর্বদাই ধনাত্মক। θ-র সীমারেখা হল $0 \leqslant \theta < 2\pi$।

1.5. কার্তেজীয় ও মেরু স্থানাঙ্কের সম্পর্ক (Relation between Cartesian and Polar co-ordinates)

মনে কর, OX, OY অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P-র কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক (x, y)। আবার O-কে মূলবিন্দু এবং OX-কে আদিরেখা ধরে P-র মেরু স্থানাঙ্ক (r, θ)

P থেকে OX-র উপরে PM লম্ব টান ও OP যোগ কর।



চিত্র 3

$\therefore \quad OM = x, \; PM = y,$

$\angle POM = \theta, \; OP = r.$

সমকোণী $\triangle POM$ থেকে

$x = OM = OP \cos \angle POM = r \cos \theta \ldots$ (i)

$y = MP = OP \sin \angle POM = r \sin \theta \;\ldots$ (ii)

$\therefore \quad x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \ldots$(iii)

এবং $\dfrac{y}{x} = \dfrac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$ ...(iv)

$\therefore$ মেরু স্থানাঙ্ক থেকে কার্তেজীয়তে পরিবর্তনের সূত্র হল:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} \cos \theta\,; \qquad \mathbf{y} = \mathbf{r} \sin \theta$$

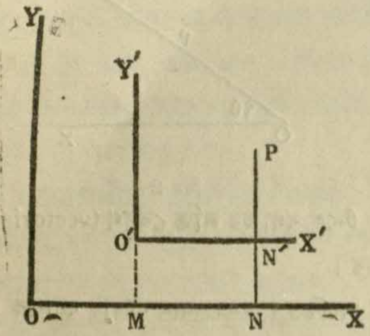
এবং কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক থেকে মেরু স্থানাঙ্কে পরিবর্তনের সূত্র হল:

$$\mathbf{r} = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}\,; \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$$

1.6. স্থানাঙ্কের আপেক্ষিকতা (Relativity of Co-ordinates)

কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কের চরম সত্তা বলে কিছু নেই। কেননা স্পষ্টত অক্ষদ্বয়ের অবস্থান ও নির্বাচনের উপর স্থানাঙ্কের মান নির্ভরশীল। অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন করলে স্থানাঙ্কও পরিবর্তিত হবে। এই পরিবর্তন দু-ভাবে করা যায় : (i) **সরণ** (Translation) এবং (ii) **ঘূর্ণন** (Rotation)।

1.7. সমান্তরাল সরণ (Parallel displacement of axes)



চিত্র 4

ধর, OX ও OY অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। O'X' ও O'Y' এমন দুটি নতুন অক্ষ যে, O'X' ∥ OX, O'Y' ∥ OY। পূর্বতন মূলবিন্দু O, নতুন মূলবিন্দু O' ; পূর্বতন অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে, ধর, O'-এর স্থানাঙ্ক (h, k) ; এবং O'X' ও O'Y'-এর সাপেক্ষে P-র স্থানাঙ্ক (x', y')

O'M ⊥ OX কর এবং PN ⊥ OX কর ; PN রেখা O'X'-কে N' বিন্দুতে ছেদ করল।

এখন, $x = ON = OM + MN = h + x'$ ... (v)

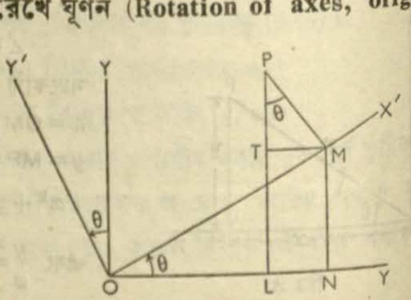
$y = PN = PN' + N'N = k + y'$ ... (vi)

$\therefore \begin{array}{l} \mathbf{x = h + x'} \\ \mathbf{y = k + y'} \end{array}$ বা, $\begin{array}{l} \mathbf{x' = x - h} \\ \mathbf{y' = y - k} \end{array}$

এই সমীকরণ সেট হল সরণের ফলে স্থানাঙ্কের পরিবর্তনের নিয়ামক সূত্র।

1.8. মূলবিন্দু অপরিবর্তিত রেখে ঘূর্ণন (Rotation of axes, origin fixed)

ধর, পূর্বতন অক্ষদ্বয় OX, OY ; অক্ষদ্বয় মূলবিন্দু O-র সাপেক্ষে বামাবর্তে θ ঘুরে OX', OY'-এ রূপ নিল। ধর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক পূর্বতন অক্ষ সাপেক্ষে (x, y), নতুন অক্ষের সাপেক্ষে (x', y')



চিত্র 5

PL ⊥ OX এবং PM ⊥ OX' কর ; এবং MT ⊥ PL এবং MN ⊥ OX কর।

∴ এক্ষণে, $x = OL$, $y = PL$

$x' = OM$, $y' = PM$

আবার, $\angle TPM = \angle x'OX = \theta$

$\therefore \quad x = OL = ON - LN = ON - MT$

$= OM \cos \angle MON - PM \angle \sin TPM$

$= x' \cos \theta - y' \sin \theta \quad \cdots \quad (vii)$

আবার, $y = PL = TL + PT = MN + PT$

$= OM \sin \angle MON + PM \cos \angle TPM$

$= x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad \cdots \quad (viii)$

$$\therefore \quad \mathbf{x = x' \cos \theta - y' \sin \theta}$$
$$\mathbf{y = x' \sin \theta + y' \cos \theta}$$

হল ঘূর্ণনের ফলে স্থানাঙ্ক পরিবর্তনের নিয়ামক সূত্র।

যদি θ-র বদলে $-\theta$ লেখা হয় তবে (vii) ও (viii) থেকে যথাক্রমে পাওয়া যায়

$$\mathbf{x' = x \cos \theta + y \sin \theta}$$
$$\mathbf{y' = -x \sin \theta + y \cos \theta}$$

এই সূত্র থেকে পুরাতন স্থানাঙ্কের সাহায্যে নূতন স্থানাঙ্কে পরিবর্তনের সূত্র মেলে।

দ্রষ্টব্য ঃ যদি সরণ ও ঘূর্ণন একই সঙ্গে ক্রিয়াশীল হয় তবে

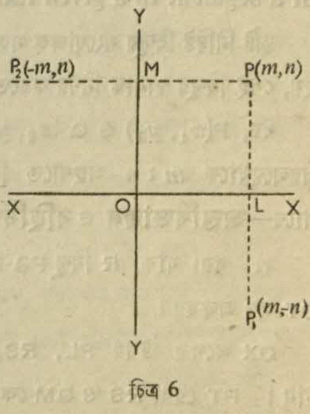
$$\mathbf{x = h + x' \cos \theta - y' \sin \theta}$$
$$\mathbf{y = k + n' \sin \theta + y' \cos \theta}$$

1.9. প্রতিফলনের ফলে স্থানাঙ্ক পরিবর্তন (Change of Co-ordinates due to reflection)

ধর, OX, OY অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (m, n)।

$\therefore \quad OL = m, \; PL = n$

ধর, x-অক্ষে প্রতিফলনে P_1 বিন্দু P-র প্রতিবিম্ব, আর y-অক্ষে প্রতিফলনে P_2 বিন্দু P-র প্রতিবিম্ব।



চিত্র 6

এক্ষণে, $|P_1L| = |PL| = n$;

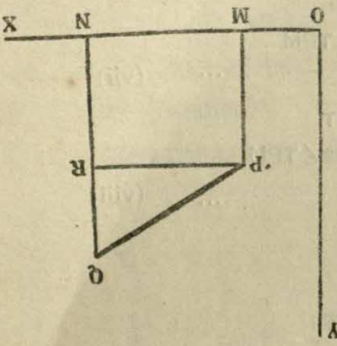
এবং $|P_2M| = |PM| = m$

$\therefore \quad P_1$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(m, -n)$; P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-m, n)$

1.10. দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two given points)

ধর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ দুটি বিন্দু। P ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব অর্থাৎ ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা PQ-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

P ও Q থেকে OX অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও QN লম্ব টান।



চিত্র 7

$\therefore$ $OM = x_1$, $PM = y_1$

এবং $ON = x_2$, $QN = y_2$

PR ∥ OX টান। PR সরলরেখা QN সরলরেখার উপর R বিন্দুতে লম্ব হল।

এক্ষণে, $QR = QN - RN$

$= QN - PM = y_2 - y_1$

$PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

PQR সমকোণী ত্রিভুজ থেকে

$PQ^2 = PR^2 + QR^2$

$= (x^2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore \; PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - y_1)^2}$

(দুটি বিন্দুর দূরত্ব)^2 = (ভুজের পার্থক্য)^2 + (কোটির পার্থক্য)^2

মূলবিন্দু থেকে কোন বিন্দু (x_1, y_1)-র দূরত্ব = $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), এবং (x_2, y_2)-এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন উপরের সূত্র সর্বদাই প্রযোজ্য।

1·11. কোন নির্দিষ্ট রেখাংশকে প্রদত্ত অনুপাতে বিভাজন (Division of a segment in a given ratio)

দুটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হয়, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

ধর, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় এবং $R(x, y)$ বিন্দু দ্বারা PQ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করা হয়েছে। এই বিভাজন দু-ভাবে হতে পারে—**অন্তর্বিভাজন** ও **বহির্বিভাজন**।

1. ধরা যাক, R বিন্দু PQ-কে $m : n$ অনুপাতে **অন্তর্বিভক্ত** করেছে। OX ও OY লম্ব অক্ষদ্বয়।

OX অক্ষের উপর PL, RS, QM লম্ব টান এবং OX-এর সমান্তরাল PT টান। PT রেখা RS ও QM-কে যথাক্রমে K ও T বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করল।

$\therefore$ $OL = x_1$; $PL = y_1$; $OS = x$; $RS = y$; $OM = x_2$; $QM = y_2$;

যেহেতু PL, RS, QM সরলরেখাত্রয় সমান্তরাল এবং PQ, LM ওদের ছেদক

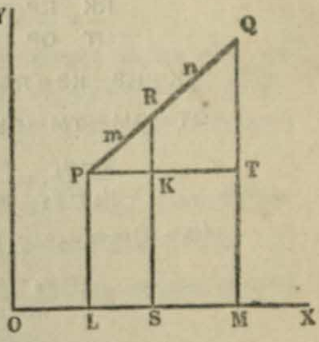
$$\therefore \; \frac{LS}{SM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}.$$

কিন্তু LS = OS − OL = $x - x_1$. এবং SM = OM − OS = $x_2 - x$.

$$\therefore \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}$$

বা, $n(x-x_1)=m(x_2-x)$

$$\therefore x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$



চিত্র 8

আবার, ∴ PQT ত্রিভুজে RK ∥ QT,

△PRK ও △PQT সদৃশ

$$\therefore \frac{RK}{QT}=\frac{PR}{PQ}=\frac{m}{m+n}$$

কিন্তু RK = RS − KS = RS − PL = $y - y_1$

QT = QM − TM = QM − PL = $y_2 - y_1$

$$\therefore \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{m}{m+n}$$

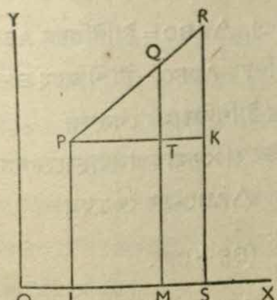
বা, $(y-y_1)(m+n)=m(y_2-y_1)$

বা, $y(m+n)-y_1(m+n)=my_2-my_1$

$$\therefore y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}.$$

অতএব R(x, y) বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$

(ii) R বিন্দু PQ সরলরেখাকে $m : n$ অনুপাতে **বহির্বিভক্ত** করলে (PR : RQ $= m : n$) একই ভাবে তিনটি বিন্দু থেকে OX-এর উপর লম্ব টান এবং P বিন্দু থেকে OX-এর সমান্তরাল PK টান। PK রেখা RS-কে K বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করল।



চিত্র 9

এখন ∴ RK ∥ QT

$$\therefore \frac{PK}{KT}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}$$

কিন্তু, PK = LS = OS − OL = $x - x_1$

এবং, KT = SM = OS − OM = $x - x_2$

$$\therefore \frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{m}{n}$$

বা, $x(m-n)=mx_2-nx_1$

$$\therefore x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}.$$

আবার, $\triangle$PRK ও $\triangle$PQT সদৃশ বলে

$$\frac{RK}{QT}=\frac{RP}{QP}=\frac{m}{m-n}$$

কিন্তু, $RK=RS-KS=RS-PL=y-y_1$

$QT=QM-TM=QM-PL=y_2-y_1$

$$\therefore \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{m}{m-n}$$

$$y(m-n)=m(y_2-y_1)+y_1(m-n)=my_2-ny_1$$

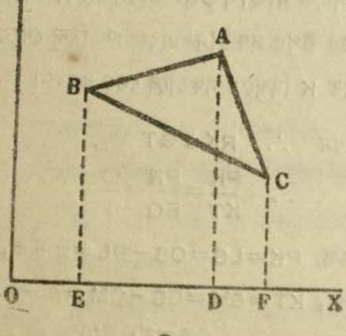
$$\therefore \quad y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$$

$\therefore$ R বিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক : $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$

জ্ঞাতব্য : (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) **সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক** ($m=n$ বসাইয়া) : $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

1·12. শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কের দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Area of a triangle in terms of co-ordinates of vertices)

ধর (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B ও C-এর স্থানাঙ্ক।



চিত্র 10

OX-এর উপর AD, BE ও CF লম্ব টানা হল।

$\therefore$ $OD=x_1$; $AD=y_1$; $OE=x_2$; $BE=y_2$; $OF=x_3$; $CF=y_3$ ।

এক্ষণে, $\triangle$ABC = ট্রাপিজিয়ম ABED + ট্রাপিজিয়ম ADFC − ট্রাপিজিয়ম BEFC

কিন্তু ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ উচ্চতা $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি,

$\therefore$ $\triangle$ABC-এর ক্ষেত্রফল

$$\Delta=\frac{ED}{2}(BE+AD)+\frac{DF}{2}(AD+CF)-\frac{EF}{2}(BE+CF).$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1-x_2)(y_2+y_1)+(x_3-x_1)(y_1+y_3)-(x_3-x_2)(y_2+y_3)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$

জ্ঞাতব্য ঃ যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) সেই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$।

(i) লক্ষ্য কর, বন্ধনীর মধ্যে xy-বিশিষ্ট 6টি পদ পর্যায়ক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত, ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত পদগুলিতে x ও y-র সাংখ্যিক সহগগুলো দক্ষিণাবর্তে যুথবদ্ধ ; যেমন ঃ 1, 2 ; 2, 3 ; 3, 1। আবার ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত পদগুলি ঠিক বিপরীতভাবে বামাবর্তে যুথবদ্ধ ; যেমন ঃ 2, 1, 3, 2, 1, 3।

(ii) এখানে শীর্ষবিন্দুত্রয় দক্ষিণাবর্তে নেওয়া হয়েছে ; বিন্দুত্রয় বামাবর্তে নিলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের চিহ্নের পরিবর্তন হবে, ক্ষেত্রফলের মান অবশ্য একই থাকবে।

1·13. তিনটি বিন্দুর একই সরলরেখায় অবস্থান বা সমরেখ হওয়ার শর্ত (Condition of collinearity of three points)

তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হওয়ার অর্থ ওদের সংযোগে কোন ত্রিভুজ গঠিত হবে না ; ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

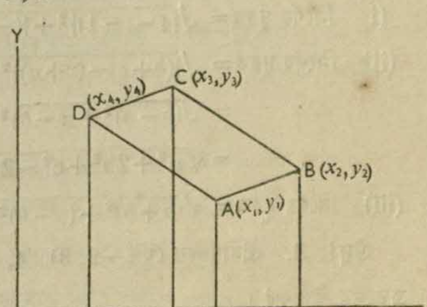
∴ বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) হইলে বিন্দু তিনটির সমরেখ হওয়ার নির্ণেয় শর্ত হল ঃ

$$(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0.$$

বিপরীতভাবে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হলে **বিন্দুত্রয় সমরেখ**।

1·14. শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্কের দ্বারা চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় (Area of a quadrilateral with given vertices)

ধর ABCD চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C ও D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ও (x_4, y_4)।



চিত্র 11

A, B, C ও D হইতে OX-এর উপর যথাক্রমে AP, BQ, CR ও DS লম্ব টানা হল।

∴ $OP = x_1$; $AP = y_1$; $OQ = x_2$, $BQ = y_2$; $OR = x_3$, $CR = y_3$; $OS = x_4$, $DS = y_4$;

এখন ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

= DSRC ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল + CRQB ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল − DSPA ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল − APQB ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল

$$=\frac{SR}{2}(DS - CR) + \frac{RQ}{2}(CR + BQ) - \frac{SP}{2}(DS + AP) - \frac{PQ}{2}(AP + BQ)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_3-x_4)(y_4+y_3)+(x_2-x_3)(y_3+y_2)-(x_1-x_4)(y_4+y_1)-(x_2-x_1)(y_1+y_2)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_4-x_4y_3)+(x_4y_1-x_1y_4)\}$$

দ্রষ্টব্য : (i) চতুর্ভুজটিকে কর্ণ দ্বারা দুটি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায় এবং ঐ দুটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমষ্টিই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল।

(ii) একইভাবে যে কোন বহুভুজকে কয়েকটি ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায় এবং তাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ঐ বহুভুজের ক্ষেত্রফল।

1·15. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. মূলবিন্দু থেকে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর।

(i) $(-9, 12)$ (ii) $(-4, -7)$ এবং (iii) $(a\cos\beta, a\sin\beta)$

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0). ∴ নির্ণেয় দূরত্বগুলি যথাক্রমে :

(i) $\sqrt{(-9)^2+(+2)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=\mathbf{15}$

(ii) $\sqrt{(-4)^2+(-7)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{\mathbf{65}}$

(iii) $\sqrt{a^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}=\sqrt{a^2(\cos^2\beta+\sin^2\beta)}=\sqrt{a^2}=\mathbf{a}$

উদা. 2. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়গুলির মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) $(4, -7)$ ও $(-1, 5)$ (ii) $(b+c, c+a)$ ও $(c+a, a+b)$

(iii) $(0, 0)$ ও $(a+b, a-b)$

(i) নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+\{(-7)-5\}^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\mathbf{13}$

(ii) নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{\{(b+c)-(c+a)\}^2+\{(c+a)-(a+b)\}^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2+(c-b)^2}$

$=\sqrt{\mathbf{a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc}}$

(iii) নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(a+b)^2+(a-b)^2}=\sqrt{\mathbf{2(a^2+b^2)}}$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে $(-2, 3)$, $(4, 0)$, $(1, -3)$ বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

মনে কর, A বিন্দু $(-2, 3)$, B বিন্দু $(4, 0)$ ও C বিন্দু $(1, -3)$

∴ $AB^2=(-2-4)^2+(3-0)^2=45$

$BC^2=(4-1)^2+(0+3)^2=18$

$AC^2=(-2-1)^2+(3+3)^2=45$

যেহেতু $AB=AC$, সুতরাং **ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু**।

উদা. 4. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A$(-5, 3)$, B$(-5, -2)$ ও C$(7, -2)$, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং বৃহত্তম বাহুটির দৈর্ঘ্য 13.

সূত্রের সাহায্যে :

$$AB^2 = \{-5-(-5)\}^2 + \{3-(-2)\}^2 = 5^2 = 25$$
$$BC^2 = \{-5-7\}^2 + \{-2-(-2)\}^2 = 12^2 = 144$$
$$AC^2 = \{-5-7\}^2 + \{3-(-2)\}^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$
$$\therefore \quad AB^2 + BC^2 = 25 + 144 = 169 = AC^2$$

সুতরাং $\triangle ABC$ **সমকোণী** এবং $\angle ABC = 1$ সমকোণ।

ABC সমকোণী ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু অতিভুজ $AC = \sqrt{169} = 13$

উদা. 5. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(-4, -2)$, $(3, -9)$ ও $(-5, 3)$, ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র ও পরিব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

ধর A বিন্দু $(-4, -2)$, B বিন্দু $(3, -9)$ ও C বিন্দু $(-5, 3)$ এবং ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র O (x, y)।

$\therefore$ পরিব্যাসার্ধ $OA = OB = OC \quad \therefore \quad OA^2 = OB^2 = OC^2$

কিন্তু $OA^2 = (x+4)^2 + (y+2)^2$

$OB^2 = (x-3)^2 + (y+9)^2$

$OC^2 = (x+5)^2 + (y-3)^2$

$$\therefore \quad (x+4)^2 + (y+2)^2 = (x-3)^2 + (y+9)^2 = (x+5)^2 + (y-3)^2$$

বা, $8x + 4y + 20 = -6x + 18y + 90 = 10x - 6y + 34$

$8x + 4y + 20 = -6x + 18y + 90$ থেকে $x - y = 5$ ... (i)

আবার $-6x + 18y + 90 = 10x - 6y + 34$ থেকে $2x - 3y = 7$ ···(ii)

(i) নং ও (ii) নং সমাধান করে

$x = 8, \ y = 3 \quad \therefore$ **পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক** $(8, 3)$

$\therefore$ **পরিব্যাসার্ধ** $= OA = \sqrt{(8+4)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$

উদা. 6. $(3, 5)$ ও $(8, -5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা যে 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ অন্তর্বিভাজন সূত্র থেকে : $x = \dfrac{3.8 + 2.3}{3+2} = \dfrac{24+6}{5} = 6$

এবং $y = \dfrac{3.(-5) + 2.5}{3+2} = \dfrac{-15+10}{5} = -1$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= (6, -1)$

উদা. 7. $(-1, 2)$ ও $(4, -5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে যে বিন্দু $2:3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে কর বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $=(x, y)$

$\therefore$ বহির্বিভাজন সূত্র থেকে : $x=\dfrac{2.4-3.(-1)}{2-3}=\dfrac{8+3}{-1}=-11$

$$y=\frac{2.(-5)-3.2}{2-3}=\frac{-10-6}{-1}=\frac{-16}{-1}=16$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $=(-11, 16)$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $(-4, -3)$ ও $(8, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

$(-4, -3)$, $(8, 6)$ এবং $(0, 0)$ বিন্দুত্রয়ের দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3)$$
$$=\tfrac{1}{2}[-4.6-8.(-3)+8.0-0.6+0.(-3)-(-4).0]$$
$$=\tfrac{1}{2}[-24+24]=0$$

$\therefore$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

সুতরাং $(-4, -3)$ ও $(8, 6)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়া যায়।

উদা. 9. $(4, 6)$ ও $(3, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা $(1, 3)$ বিন্দুতে কি অনুপাতে বিভক্ত হয় নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $(1, 3)$ বিন্দুটি $(4, 6)$ ও $(3, 5)$ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore$ অন্তর্বিভাজন সূত্র থেকে : $x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$

বা, $1=\dfrac{m.3+n.4}{m+n}$ বা, $m+n=3m+4n$

বা, $-2m=3n$ $\therefore$ $\dfrac{m}{n}=\dfrac{3}{-2}$

$\therefore$ সংযোজক রেখাটি $3:2$ অনুপাতে **বহির্বিভক্ত** হয়েছে।

$y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$ সূত্র থেকেও একই অনুপাত পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য 1. কি অনুপাতে বিভক্ত হয় নির্ণয় করার সময় যে কোন সূত্র (অন্তর্বিভাজন অথবা বহির্বিভাজন) ব্যবহার করা চলে।

(i) অন্তর্বিভাজন সূত্র থেকে m/n ঋণাত্মক হয় তবে সরলরেখাটি প্রদত্ত বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হয়।

(ii) যদি বহির্বিভাজন সূত্র থেকে m/n ঋণাত্মক হয় তবে সরলরেখাটি প্রদত্ত বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, যদি $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ হয় তবে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক (x_3, y_3)-এর মধ্য দিয়ে যাবার অর্থাৎ বিন্দুত্রয়ের সমরেখ হবার শর্ত থেকে

$$x_1y_2-x_2y_1+y_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=0$$

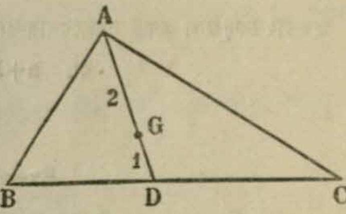
এখানে $x_3=0,\ y_3=0\ \therefore\ x_1y_2-x_2y_1+x_2.0-0.y_2+0.y_1-x_1.0=0$

বা, $x_1y_2-x_2y_1=0 \qquad \therefore \frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$

সুতরাং $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ হলে বিন্দুদ্বয় **মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।**

উদা. 11. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) হলে, প্রমাণ কর ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)\}$

মনে করা যাক, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$ ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু; ভরকেন্দ্র G-এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু।



চিত্র 12

$\therefore$ D বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$=\tfrac{1}{2}(x_2+x_3),\quad \tfrac{1}{2}(y_2+y_3)$$

যেহেতু D বিন্দুতে মধ্যমা AD 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়

$$\therefore\quad x=\frac{2.\frac{1}{2}(x_2+x_3)+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$\text{এবং}\quad y=\frac{2.\frac{1}{2}(y_2+y_3)+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$\therefore$ ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক $=\{\frac{1}{3}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3),\ \frac{1}{3}(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2+\mathbf{y}_3)\}$

উদা. 12. প্রমাণ : কর যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় (a, bc), (b, ca) ও (c, ab) তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)$.

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta=\tfrac{1}{2}[(a.ca-b.bc)+(b.ab-c.ca)+(c.bc-a.ab)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[c(a^2-b^2)+a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[c(a^2-b^2)-c^2(a-b)-ab(a-b)]$$

$$=\tfrac{1}{2}(a-b)[c(a+b)-c^2-ab]=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})$$

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, (4, 2), (7, 5), (9, 7) বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। [C. P. '43]

সমরেখ হবার শর্ত :

$$\triangle = x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0$$

এখানে $\triangle = 4.5 - 7.2 + 7.7 - 9.5 + 9.2 - 4.7$

$= 20 - 14 + 49 - 45 + 18 - 28$

$= 87 - 87 = 0$ $\quad\therefore$ বিন্দুত্রয় **একই সরলরেখায়।**

উদা. 14. প্রমাণ কর যে, $(a, 0)$; $(0, b)$ $(1, 1)$ এই বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় থাকবে যদি $a + b = ab$ হয়।

তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে উক্ত বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\triangle$ শূন্য হয়।

$$\triangle = \tfrac{1}{2}[a.b - 0.0 + 0.1 - 1.b - 1.0 - a.1]$$

$$= \tfrac{1}{2}(ab - b - a)$$

সুতরাং বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় থাকবে, যদি $ab - b - a = 0$ হয়,

বা, $\mathbf{a + b = ab}$ হয়।

Exercise 1

1. মূলবিন্দু থেকে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) (5, 12) (ii) (−8, 6) (iii) $(a \cos \phi, a \sin \phi)$

(iv) $(a \cos \alpha, a \cos \beta)$, $\alpha + \beta = 90°$

2. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুদ্বয়ের অন্তর্বর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর :

(i) (16, 9) ও (10, 1) (ii) (3, −2) ও (−1, 1)

(iii) (a, b) ও $(-b, a)$ (iv) $(at_1^2, 2at_1)$ ও $(at_2^2, 2at_2)$

(v) $(a \cos \alpha, a \sin \alpha)$ ও $(a \cos \beta, a \sin \beta)$

3. নিম্নে সমীকরণগুলোর প্রথম দুটিকে কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে এবং পরবর্তী দুটিকে মেরু-স্থানাঙ্কে পরিবর্তিত কর : (i) $r = 2a \cos \theta$ (ii) $\sqrt{r} = \sqrt{a} \cos \theta/2$ (iii) $x^2 - y^2 = 2ay$ (iv) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

4. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগ্মের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে সমান দু'ভাগে বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) (6, −2) ও (−4, 4) (ii) (2, −5) ও (−2, 5)

(iii) (3, 0) ও (0, 2) (iv) (3, 2) ও (2, −2)

4. নিম্নলিখিত প্রত্যেক বিন্দুযুগ্মের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে প্রদত্ত অনুপাতে বিভক্ত হয় তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $(-8, -5)$ ও $(13, 4)$ অনুপাত $2:1$ অন্তঃস্থভাবে

(ii) $(9, 4)$ ও $(-7, 4)$ অনুপাত $5:3$ বহিঃস্থভাবে

(iii) $(0, 0)$ ও $(-3, -9)$ অনুপাত $2:5$ বহিঃস্থভাবে

5. $(3, -5)$ ও $(-2, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে $1:2$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে ও $(ab-b^2, b)$ ও $(-a^2-b^2, a+2b)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বিন্দুতে $a:b$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে ছেদ করে তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $(5, 4)$ বিন্দুটি $(3, 2)$ ও $(6, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে কি অনুপাতে বিভক্ত করে ?

7. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(4, -6)$, $(2, -2)$ ও $(2, 5)$ তার ভরকেন্দ্র নির্ণয় কর। [Rajputana '49]

8. প্রমাণ কর যে, যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $(3, -7)$, $(-5, 4)$ ও $(2, 3)$ তার ভরকেন্দ্র মূলবিন্দু।

9. $(-6, -3)$ ও $(x, +4)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের বর্গ 113 হলে, অজ্ঞাত বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর।

10. প্রমাণ কর যে $(a, -b)$ ও $(-a, b)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $2\sqrt{a^2+b^2}$.

11. দেখাও যে, $(a\cos\phi, a\sin\phi)$ ও $(-a\sin\phi, a\cos\phi)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব $\sqrt{2}a$.

12. দেখাও যে, $(1, 4)$, $(4, 1)$ ও $(8, 8)$ বিন্দুত্রয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। [Andhra '47]

13. দেখাও যে, $(3, 2)$, $(1, 0)$ ও $(2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$ বিন্দুত্রয় সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

14. প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$, $(3, 8)$ ও $(4, 1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠিত হয়।

15. প্রমাণ কর যে, $(2a, 4a)$, $(2a, 6a)$ ও $(2a+\sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার বাহুর দৈর্ঘ্য $2a$. [C. P. '52]

16. প্রমাণ কর যে, $(4, 3)$, $(6, 4)$, $(5, 6)$ ও $(3, 5)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

17. প্রমাণ কর যে, $(1, 2)$, $(-3, 1)$, $(-2, -3)$ ও $(2, -2)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

18. প্রমাণ কর, যে $(2, -2), (8, 4), (5, 7)$ ও $(-1, 1)$ একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

19. দেখাও যে, পর পর এই বিন্দু চারটি $(2, 5), (5, 9), (9, 12)$ ও $(6, 8)$ একটি রম্বসের শীর্ষবিন্দু।

20. যদি (x, y) বিন্দু $(3, 5)$ ও $(2, -3)$ বিন্দু ছুটি থেকে সমদূরবর্তী হয় তা হলে প্রমাণ কর যে, $2x+16y=21$.

21. যদি (x, y) বিন্দু $(3, 4)$ ও $(1, -2)$ বিন্দু ছুটি থেকে সমান দূরত্বে অবস্থিত হয় তাহলে প্রমাণ কর যে, $x+3y=5$.

22. যদি (x, y) বিন্দু $(a+b, b-a)$ ও $(a-b, a+b)$ বিন্দু ছুটি থেকে সমদূরবর্তী হয় তাহলে দেখাও যে, $x=\frac{a}{b}y$.

23. যদি $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ও (x_4, y_4) পর পর কোন সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে,

$$x_1+x_3=x_2+x_4 \text{ এবং } y_1+y_3=y_2+y_4$$

24. $(-2, 3), (2, 1)$ ও $(5, 3)$ থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর স্থানাঙ্ক কি ?

25. $(4, 5)$ ও $(1, 4)$ বিন্দু ছুটি থেকে (x, y) বিন্দুটি সমদূরবর্তী হওয়ার শর্ত কি ?

26. নিম্নলিখিত বিন্দুত্রয়গুলি যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(i) $(3, 4), (2, -1)$ ও $(4, -6)$ (ii) $(0, a), (-a, 0)$ ও $(a, -a)$

(iii) $(a, b), (b, c)$ ও (c, a)

(iv) $(a, b+c), (b, c+a), (c, a+b)$ [C. U. '58]

27. প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত বিন্দুযুগলের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায়।

(i) $(6, 4)$ ও $(-3, -2)$ (ii) $(4, 3)$ ও $(8, 6)$

(iii) $(a-b, -c)$ ও $(b-a, c)$

28. প্রমাণ কর যে, $(3a, 0), (0, 3b)$ ও $(a, 2b)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ। [C.P. '24]

29. দেখাও যে, $(a, bc-a^2), (b, ca-b^2)$ ও $(c, ab-c^2)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

30. প্রমাণ কর যে $(a, 0), (0, b)$ ও (p, q) বিন্দুত্রয় সমরেখ হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত হল $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=1$.

31. k-এর মান কি হলে $(k, 2-2k), (-k+1, 2k)$ ও $(-4-k, 6-2k)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে ?

32. স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু O হলে, $AB^2+AC^2=2(AO^2+BO^2)$.

33. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কত্রয় (2, 1), (5, 2) ও (3, 4) হলে ওর ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক ও পরিসীমা নির্ণয় কর। [Allahabad '34]

34. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

35. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় একটি বিন্দুতে মিলিত হয় এবং প্রত্যেক মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

36. স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যুক্ত করে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তার যে কোন একটির ক্ষেত্রফলের চারগুণ সমগ্র ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

37. যে বৃত্তটি (1, −3), (3, 13) ও (3, −3) এই বিন্দু তিনটির মধ্য দিয়ে যায় তার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

38. A, B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, 3), (−3, 5), (4, −2) ও $(x, 3x)$ এবং $\frac{\triangle DBC}{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$, x-এর মান নির্ণয় কর। ($\triangle$ = ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল) [C. P. '49]

39. A $(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ ও B $(a\cos\beta, a\sin\beta)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাটিকে M (x, y) পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন AM ও BM-এর অনুপাত $b : a$ হয়; প্রমাণ কর যে,

$$x+y\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$ [C. U. '59 Comp.]

40. A, B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, 3), (−3, 5) ও (4, −2) এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y); দেখাও যে

$$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{x+y-2}{7}$$ [C. U.]

41. চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু (1, 1), (3, 4), (5, −2) ও (4, −7); ওর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. P. '44]

42. চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি (1, 2), (−5, 6), (7, −4) ও $(k, -2)$ পর পর যুক্ত করলে লব্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়, k এর মান নির্ণয় কর। [C. P. '45]

43. প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি $(a, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, a)$ ও $(0, -b)$ পর পর যুক্ত করলে ক্ষেত্রফল শূন্য হয়; $a, b>0$. চিত্রের সাহায্যে বিষয়টি ব্যাখ্যা কর। [C. P. '42]

44. (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও $(0, 0)$ বিন্দুত্রয়ের একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হওয়ার শর্ত কি ?

45. নূতন মূলবিন্দু $(-3, 4)$-বিশিষ্ট সমান্তরাল অক্ষে নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি স্থানান্তরিত কর :

(i) $5x+2y+8=0$

(ii) $x^2+y^2-8x+10y+25=0$

(iii) $x^2-6x+2y^2+7=0.$

46. নূতন মূলবিন্দু $(1, -2)$-বিশিষ্ট সমান্তরাল অক্ষে $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ সমীকরণটি স্থানান্তরিত কর।

47. $(-a+c, b)$ মূলবিন্দু বিশিষ্ট সমান্তরাল অক্ষে পরিবর্তিত করলে $(x+a)^2+(y-b)^2=c^2$ সমীকরণটি কি হবে ?

48. মূলবিন্দু $\left[\dfrac{ab}{a-b}, 0\right]$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে $(a-b)(x^2+y^2)-2abx=0$ সমীকরণটির কি পরিবর্তন হবে ?

49. দেখাও কিরূপে মূলবিন্দুর পরিবর্তন করলে (অক্ষদ্বয়ের দিক পরিবর্তন না করে) নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি (i) $x^2+y^2-4x-8y-71=0$; (ii) $x^2+y^2-10x-6y+30=0$ যথাক্রমে নিম্নোক্ত আকারে পরিবর্তিত হয়

$$x^2+y^2+2\mu x+v=0$$
$$x^2+y^2+2\eta x+v=0$$

এবং μ, η, v-এর মান নির্ণয় কর।

50. মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল কোন্ মূলবিন্দুবিশিষ্ট অক্ষদ্বয়ে পরিবর্তিত করিলে $6x^2+5xy-6y^2-17x+7y+5=0$ সমীকরণটি $6x^2+5xy-6y^2=0$ হবে ?

51. দেখাও যে, মনোমত কোন বিন্দু (h, k)-মূলবিশিষ্ট সমান্তরাল অক্ষে পরিবর্তিত করিলে $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+2=0$ সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত পদ-বিশিষ্ট সমীকরণে পরিবর্তিত করা যায়। [C. P. 40]

2

দ্বিতীয় অধ্যায়

সঞ্চারপথ ও তার সমীকরণ (Locus and its Equation)

2.1. সংজ্ঞা (Definition)

কোন বিন্দু যদি এক বা একাধিক জ্যামিতিক শর্ত মেনে গতিশীল হয় তবে সে যে পথ অতিক্রম করে তাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** বলে। যেমন :

(i) কোন বিন্দু যদি কোন সমতলে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সর্বদা সমান দূরত্ব বজায় রেখে চলে, তাহলে যে পথ সৃষ্টি হয় অর্থাৎ ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথকে একটি বৃত্তের **পরিধি** বলে। এবং ঐ পথদ্বারা আবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** বলে।

(ii) কোন বিন্দু যখন দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সর্বদা সমান দূরত্ব বজায় রাখে, তখন ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

(iii) কোন সমতলে যদি কোন বিন্দু এরূপ শর্ত মেনে গতিশীল হয় যে, ওর সব অবস্থানে ঐ সমতলে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু এবং কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে ওর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক, তা হলে ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **কনিক** (conic) বলে। এই ধ্রুব অনুপাত 1, 1 থেকে কম ও 1 থেকে বেশী হলে গতিপথ-গুলিকে যথাক্রমে **অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত** বলে।

গতিশীল বিন্দুটি যে জ্যামিতিক শর্ত মেনে চলে তা ভাষায় প্রকাশের পরিবর্তে স্থানাঙ্কের সম্বন্ধের দ্বারাও প্রকাশ করা যায়। ঐ শর্ত অনুযায়ী স্থানাঙ্কের সম্বন্ধকে ঐ **সঞ্চারপথের সমীকরণ** (Equation of the locus) বলে। যেমন—যখন একটি বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে উহার স্থানাঙ্কের ভুজ সর্বদা কোটির দ্বিগুণ হয়, তখন ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ $x=2y$, (x, y) হল সঞ্চারপথের যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক।

যে শর্ত দ্বারা সঞ্চারপথটিকে বোঝান হচ্ছে সেই শর্ত থেকে ওর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক-সংশ্লিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যায়। লব্ধ সমীকরণটি গতিপথের উপরিস্থিত বিন্দুর যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ; কিন্তু ঐ সঞ্চারপথের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ নয়। বিপরীতভাবে, যখন কোন বিন্দুর স্থানাঙ্কের দ্বারা সঞ্চারপথের সমীকরণ সিদ্ধ হয়, তখন বিন্দুটি সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত হবে। যখন কোন বিন্দু কোন পথের উপর চলমান হয়, তখন ওর স্থানাঙ্ককে **চলমান স্থানাঙ্ক** বলে এবং সাধারণত (x, y) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কোন বিশেষ অবস্থানে বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1), (x', y') ইত্যাদির দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

2.2 কোন চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ (Equation of locus of a moving point)

চলমান বা গতিশীল বিন্দু প্রদত্ত শর্ত হইতে ঐ বিন্দুটির যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হবে। তারপর ঐ স্থানাঙ্ক-সম্বন্ধটিকে চলমান-স্থানাঙ্কের দ্বারা প্রকাশ করিতে হবে। এইরূপে লব্ধ সম্বন্ধটিই হল প্রয়োজনীয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য ঃ (i) স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে, সঞ্চারপথ নির্ণয় বলতে সঞ্চারপথের সমীকরণ বোঝায়।

(ii) অসুবিধা না হলে প্রথম থেকে চলমান বিন্দুটির স্থানাঙ্ক চলমান স্থানাঙ্কে লওয়া উচিত।

কষা উদাহরণ (Illustrated Examples)

উদা. 1. একটি বিন্দু এমনভাবে গতিশীল যে x-অক্ষ থেকে উহার দূরত্বের বর্গ y-অক্ষ থেকে দূরত্বের $4a$ গুণ হয়, ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে করা যাক্, ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথের যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

শর্তানুসারে, $y^2 = 4ax$, ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. একটি চলমান বিন্দু থেকে (3, 0) বিন্দুর দূরত্ব (0, 2) বিন্দুর দূরত্বের তিনগুণ হলে, ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ কি?

ধরা যাক্, চলমান বিন্দুটির যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y)

এখন প্রশ্নানুসারে,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = 3\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া

$$x^2-6x+9+y^2 = 9(x^2+y^2-4y+4)$$

বা, $8x^2+8y^2+6x-36y+27=0$, নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 3. P(−4, 0), Q(−1, 0) দুটি বিন্দু ও A এরূপ একটি গতিশীল বিন্দু যে AP : AQ = 2 : 1 হয়, A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক্, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ $AP = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$; $AQ = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$

প্রশ্নানুসারে, $$\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \frac{2}{1}$$

বা, $$\frac{(x+4)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} = \frac{4}{1}$$

বা, $4(x+1)^2+4y^2 = (x+4)^2+y^2$

$\therefore$ $x^2+y^2=4$, নির্ণেয় সঞ্চারপথ

উদা. 4. একটি বিন্দু এরূপে গতিশীল যে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ থেকে ওর দূরত্বদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক। ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
[Allahabad 1948]

ধরা যাক ঐ চলমান বিন্দুটির যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দু দুটি $(a, 0)$ ও $(-a, 0)$ থেকে দূরত্ব যথাক্রমে,

$\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ ও $\sqrt{(x+a)^2+y^2}$

এখন প্রদত্ত শর্তানুসারে $(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=K$, K একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ 2x^2+2y^2=x-2a^2$, নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 5. কোন ত্রিভুজের দুটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 2)$ ও $(5, 6)$ এবং ওর ক্ষেত্রফল সর্বদা 12 একক হয়, ত্রিভুজটির তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

ধর, চলমান তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)

$\therefore$ ঐ তিনটি বিন্দুদ্বারা আবদ্ধ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\triangle=\tfrac{1}{2}(x.2-3.y+3.6-5.2+5.y-x.6)$$
$$=\tfrac{1}{2}(-4x+2y+8)=-2x+y+4$$

শর্তানুসারে, $-2x+y+4=12$

$\therefore\ 2x-y+8=0$, তৃতীয় শীর্ষবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 6. কোন বিন্দু কোন সমতলে এরূপে গতিশীল যে, পরস্পর সমকোণে নত দুটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে ওর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব রাশি k-এর সমান; বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

ধরা যাক চলমান বিন্দুটির যে কোন অবস্থানের স্থানাঙ্ক (x, y)। ঐ বিন্দু থেকে সরলরেখা দুটির উপর লম্ব টানা হল।

পরস্পর লম্বভাবে দুটি সরলরেখাকে অক্ষদ্বয় ধরলে ঐ বিন্দু থেকে সরলরেখা দুটির উপর লম্বদ্বয় x ও y-এর সমান হয়।

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x+y=K$, $K=$ধ্রুবক। এই-ই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 7. ABC ত্রিভুজের ভূমি $2a$ এবং অপর বাহু দুটির বর্গের অন্তর ধ্রুবক। শীর্ষবিন্দু A-র সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1944]

ধরা যাক প্রদত্ত ভূমি $BC=2a$

সরলতার খাতিরে ধরা যাক ভূমিটি x-অক্ষ বরাবর এবং ভূমির মধ্যবিন্দু O মূলবিন্দু $(0, 0)$। সুতরাং B-এর স্থানাঙ্ক$=(-a, 0)$ ও C-এর স্থানাঙ্ক$=(a, 0)$.

চলমান শীর্ষবিন্দু A এর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে

$AB^2=(x+a)^2+y^2$ এবং $AC^2=(x-a)^2+y^2$

$\therefore\ \{(x+a)^2+y^2\}-\{(x+a)^2+y^2\}=K$, ধ্রুবক $\quad\therefore\ 4ax=K$

$\therefore\ x=\dfrac{K}{4a}$-ই হল A বিন্দুর সঞ্চারপথ।

Exercise 2

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ দ্বারা যে সঞ্চারপথ বোঝায় তা এঁকে দেখাও।

(i) $x+2y=6$ (ii) $x^2+y^2=16$ (iii) $y^2=4x+9$

2. P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যখন

(i) $3PA^2+PB^2=AB^2$ (iii) $PA+PB=2K$

(ii) $PA^2-PB^2=2K^2$ (iv) $PB^2+PC^2=2PA^2$ [Utkal '48]

K একটি ধ্রুবক এবং A, B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$, $(-a, 0)$ ও $(d, 0)$.

3. একটি চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করতে হবে যার,

(i) ভুজ সর্বদা 4,

(ii) মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব ধ্রুবক $(=a)$,

(iii) ভুজের দ্বিগুণ কোটি অপেক্ষা সর্বদা 4 বেশী।

4. একটি বিন্দু এরূপভাবে চলমান যে,

(i) x-অক্ষ থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ y-অক্ষ থেকে দূরত্বের তিনগুণের 4 বেশী।

(ii) y-অক্ষ থেকে দূরত্ব (2, 2) থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ। [C. P. '39]

(iii) (1, 2) বিন্দু থেকে দূরত্বের বর্গ সর্বদা 2।

(iv) (2, 2) বিন্দু থেকে দূরত্ব y-অক্ষ থেকে দূরত্বের অর্ধেক। [C. U.]

(v) x-অক্ষ থেকে দূরত্ব (1, 1) বিন্দু থেকে দূরত্বের দ্বিগুণ।

সঞ্চারপথগুলো নির্ণয় কর।

5. একটি বিন্দু এরূপে গতিশীল যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহু দুটি থেকে ওর দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুব রাশি a-এর সমান। চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

6. একটি বিন্দু এরূপে চলে যে, $(ac, 0)$ ও $(-ac, 0)$ থেকে দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক এবং $2a$-এর সমান। প্রমাণ কর যে, চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-c^2)}=1$$

7. একটি চলমান রেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (a, b) দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−2, 4) ও (6, 8) এবং P এরূপ একটি চলমান বিন্দু যে, PAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সর্বদা 10 হয়; P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

9. একটি সরলরেখা এরূপভাবে চলমান যে, ওটি অক্ষদ্বয় থেকে কিছু অংশ ছিন্ন করে এবং অক্ষদ্বয়ের ছিন্ন অংশ দুটির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুবক। অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[Hints : উক্ত মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (a, b) হলে জ্যামিতি থেকে x-অক্ষের ছেদিতাংশ $=2a$ ও y-অক্ষের ছেদিতাংশ $=2b$]

3

তৃতীয় অধ্যায়

সরলরেখা

(The Straight line)

3·1. কোন অক্ষে সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ।
(Equation of a straight line parallel to the axes)

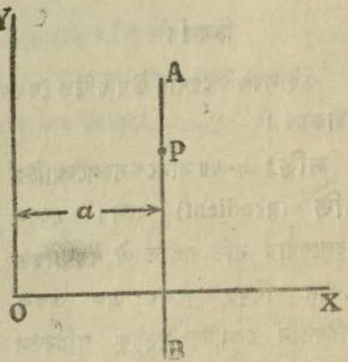
মনে কর, AB সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং y-অক্ষ থেকে a দূরত্বে অবস্থিত।

রেখাটির উপর P যে কোন বিন্দু এবং এর স্থানাঙ্ক (x, y),

তা হলে $x =$ P বিন্দুর ভুজ $= a$; P যেখানেই অবস্থিত হোক না কেন অর্থাৎ P বিন্দুর কোটি যাই হোক না কেন, ভুজ সর্বদা a হয়।

সুতরাং y-অক্ষ থেকে a দূরত্বে সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $x = a$.

অনুরূপভাবে, x-অক্ষ থেকে b দূরত্বে সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y = b$.



চিত্র 13

জ্ঞাতব্য : x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

y-অক্ষের " $x = 0$

$(a, 0)$, $(a, 2)$, $(a, -5)$ ইত্যাদি বিন্দুগুলি $x = a$ এই সরলরেখায় অবস্থিত।

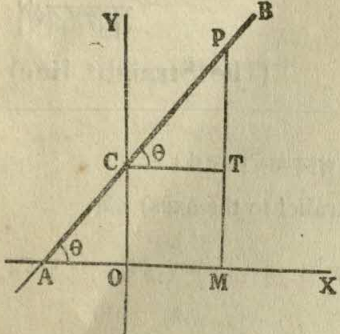
3.2. বিভিন্ন আকারে সরলরেখার সমীকরণ
(Equation of a straight line in different forms)

I. m-আকারে (m-form) বা **নতি আকারে** (gradient form)

একটি সরলরেখা y-অক্ষের কিছু অংশ ছেদ ক'রে x-অক্ষের সঙ্গে প্রদত্ত কোণে নত আছে, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

ধরা যাক AB সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণে নত এবং y-অক্ষ থেকে $OC = c$ অংশ ছেদ করেছে।

মনে কর, AB রেখার উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু ; x-অক্ষের উপর PM লম্ব এবং x-অক্ষের সমান্তরাল CT টানা হল। CT, PMকে T বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।



চিত্র 14

$\therefore$ $OM = x$; $PM = y$ এবং $OC = c$

$\therefore$ $\tan\theta = \tan PCT = \frac{PT}{CT}$

$= \frac{PM - TM}{CT} = \frac{PM - CO}{OM}$

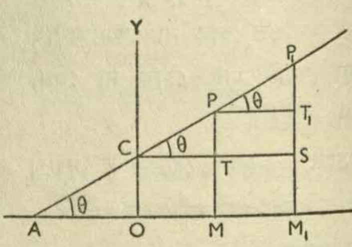
$\therefore$ $\tan\theta = \frac{y-c}{x}$.

বা, $y = x\tan\theta + c$

$\therefore$ $y = mx + c$, $m = \tan\theta$

এই সম্বন্ধটি রেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য—এই-ই সরলরেখার সমীকরণ।

নতিঃ m-এর মানকে সরলরেখাটির **নতি** (gradient) বলে। কোন সরলরেখার নতি বলতে ঐ রেখাস্থিত কোন বিন্দুর ভুজের এক একক পরিবর্তনে কোটির যতটুকু পরিবর্তন হয় তাকে বোঝায়।



চিত্র 15

চিত্রে P বিন্দু সরে P_1 অবস্থানে গেল। অর্থাৎ ভুজ MM_1 বেড়ে যাওয়ায় কোটি P_1T_1 বাড়ে।

$\therefore$ বিন্দুটির ভুজের মান এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির মানের বৃদ্ধি ঃ

$$\frac{P_1T_1}{MM_1} = \frac{P_1T_1}{PT_1}$$; এই হল সরলরেখাটির নতি।

$\triangle CTP$ ও $\triangle CSP_1$ সদৃশ বলে $\frac{PT}{CT} = \frac{P_1S}{CS}$

দেখা যাচ্ছে যে, ঐ সরলরেখার উপরে যে কোন বিন্দুর জন্য নতি সর্বদা সমান অর্থাৎ কোন সরলরেখার উপরিস্থিত যে কোন বিন্দুর জন্য নতি ধ্রুবক।

চিত্র থেকে, স্পষ্টত, সরলরেখাটির নতি $= \frac{P_1T_1}{PT_1} = \tan\theta$.

সুতরাং কোন সরলরেখার নতি বলতে ঐ রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে যে কোণে নত হয় তার ট্যানজেন্ট (tangent)-কে বোঝায়।

x-অক্ষ বা x-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরলরেখাকে ধনাত্মক দিকে ঘুরিয়ে প্রদত্ত সরলরেখার উপর সমাপতিত করতে যতটা ঘূর্ণন হয় তা-ই θ কোণের পরিমাপ।

দ্রষ্টব্য : (i) যখন $y=mx+c$ আকারে সমীকরণ ব্যবহার করা হয়, তখন m-এর মান নির্দিষ্ট ধরা হয় অর্থাৎ সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল নয়। বিপরীতভাবে বলতে পারা যায় যে, θ কোণ $\frac{\pi}{2}$ এর সমান নয়।

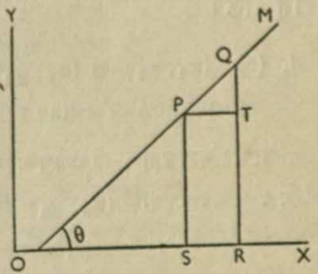
(ii) $y=mx$, $\therefore$ $c=0$; সরলরেখাটি মূলবিন্দু মধ্য দিয়ে যায়।

(iii) $y=c$ ও $m=0$ ($\therefore$ $\tan\theta=0$ বা, $\theta=0$) বা সরলরেখাটি x-অক্ষ থেকে c দূরে ওর সমান্তরাল হবে।

I. (a) দুটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার নতি নির্ণয়

(To find the gradient of the line joining two points.)

ধরা যাক, দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু P ও Q-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং PQ সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণে নত।



চিত্র 16

এক্ষণে, P ও Q থেকে x অক্ষের উপর PS ও QR লম্ব টানা হল এবং P থেকে QR রেখার উপর x-অক্ষের সমান্তরাল PT রেখা টানা হল ; PT, QR কে T বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে।

$\therefore$ $OS=x_1$; $PS=y_1$;

$OR=x_2$; $QR=y_2$

$\therefore$ নির্ণেয় নতি, $m=\tan\theta=\frac{QT}{PT}=\frac{QR-TR}{SR}$

$$m=\frac{QR-PS}{OR-OS}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{বিন্দুদ্বয়ের কোটির পার্থক্য}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের ভুজের পার্থক্য}}$$

দ্রষ্টব্য : সরলরেখাটির নতি ও বিন্দু দুটির একটির স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে অন্যটিকে (x, y) ধরে ঐ সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যায়।

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \qquad \therefore\ m=\tan\theta$$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ হল $y-y_1=m(x-x_1)$

I. (b) **তিনটি বিন্দু সমরেখ হবার শর্ত** (Collinearity of three points)

ধরা যাক বিন্দু তিনটি $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ও $M(x_3, y_3)$।

যদি PQ রেখার নতি ও QM রেখার নতি সমান হয়, অর্থাৎ যদি সরলরেখা দুটি x-অক্ষের সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে P, Q, M বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় থাকবে।

এক্ষণে, PQ রেখার নতি $=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

QM রেখার নতি $=\dfrac{y_3-y_2}{x^3-x_2}$.

$$\therefore \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

বা, $(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(y_2-y_1)(x_3-x_2)$

$\therefore \quad x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=0$; এই হল **সমরেখা হবার শর্ত**।

I. (c) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) **বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়** (Equation of a line through two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

y-অক্ষের সমান্তরাল নয় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $y=mx+c$ ...(1)

যেহেতু সরলরেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী $\therefore \; y_1=mx_1+c$ ...(2)

$\therefore \quad y-y_1=m(x-x_1)$ ...(3)

যেহেতু সরলরেখাটি (x_2, y_2) বিন্দুগামী

$\therefore \quad y_2-y_1=m(x_2-x_1)$ ......(4)

$$\therefore \quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

m এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে,

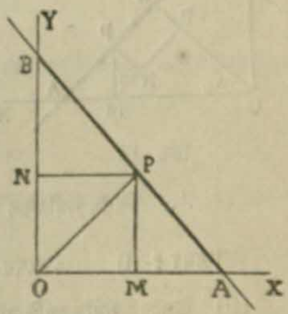
$$y-x_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$; এই হল নির্ণেয় সমীকরণ।

জ্ঞাতব্য : মূলবিন্দু ও $(x_1 \; y_1)$ বিন্দু সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ,

$$y=\frac{y_1}{x_1}x.$$

II. ছেদিতাংশ আকারে (Intercept form)

ধরা যাক AB সরলরেখাটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $OA=a$ ও $OB=b$ অংশ কেটেছে। AB রেখার উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ নাও এবং, x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান, OP যুক্ত কর।



চিত্র 17

$\therefore\ PN=OM=x;\quad PM=y$

এখন $\triangle OAB=\triangle OAP+\triangle OPB$

বা, $\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}OA\ PN+\frac{1}{2}OB.PN$

বা, $\frac{1}{2}a.b=\frac{1}{2}a.y+\frac{1}{2}b.x$

উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}ab$ দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

AB রেখার উপর যে কোন বিন্দুর জন্য এই সম্বন্ধটি প্রযোজ্য, সুতরাং এই-ই নির্ণেয় সরলরেখা।

দ্রষ্টব্য : (i) সমীকরণটি $px+qy=1$ আকারেও লেখা যায় ;

$$p=\frac{1}{a} \text{ ও } q=\frac{1}{b}.$$

(ii) চিত্রে সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে ছেদ করেছে ; কিন্তু রেখাটি অক্ষদ্বয়ের যে কোন দিকে অর্থাৎ একটির ধনাত্মক ও অন্যটির ঋণাত্মক দিকে অথবা দুটির ঋণাত্মক দিকে ছেদ করতে পারে। তখন অক্ষের যে দিকে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) ছেদ করবে সেভাবে a ও b ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধরা হবে।

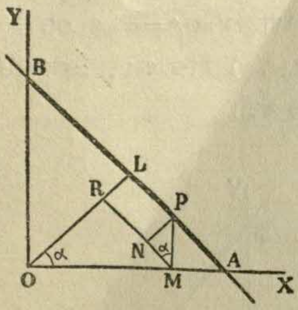
(iii) এখানে AB সরলরেখার $m=\tan XAB$, $\tan \angle OAB$ নয় ; $\angle XAB$ = স্থূলকোণ বলে m-এর মান ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে।

III. লম্ব-আকারে সরলরেখার সমীকরণ (Perpendicular or Canonical form)

ধরা যাক, সরলরেখাটি AB, মূলবিন্দু O থেকে এই রেখার উপর OL লম্ব,

মনে কর, $OL=p$ একক এবং OL, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে α কোণে ($=\angle XOL$) নত। AB উপর $P(x, y)$ যে কোন বিন্দু।

x-অক্ষের উপরে PM লম্ব, OL-র উপরে MR লম্ব ও MR র উপরে PN লম্ব টান।



চিত্র 18

$\therefore \quad OM = x\,;\; PM = y\,;$

$\therefore \quad \angle ROM + \angle OMR = 90^\circ$

$= \angle OMR + \angle PMN$

$\therefore \quad \angle PMN = 90^\circ - \angle OMR = \alpha$

এক্ষণে, $p = OL = OR + RL = OR + PN$

$= OM \cos\alpha + PM \sin\alpha.$

বা, $p = x\cos\alpha + y\sin\alpha$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হল $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$

জ্ঞাতব্য : (i) p = লম্বের দৈর্ঘ্য, সুতরাং সর্বদা ধনাত্মক।

(ii) উপরের সমীকরণটি নতির আকারে বা m-আকারেও লেখা যায়,

$$y = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{p}{\sin\alpha} = -\cot\alpha + p\operatorname{cosec}\alpha.$$

সুতরাং $y = mx + c$-এর সঙ্গে তুলনা করলে

$m = \tan\theta = -\cot\alpha = \tan(90^\circ + \alpha) \quad \therefore \quad \theta = 90^\circ + \alpha.$

চিত্র থেকেও দেখা যাচ্ছে, $\theta = \angle XAP = \angle XMR = \angle XMP + \angle PMR$

$$\therefore \quad \theta = 90^\circ + \alpha.$$

(ii) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সমীকরণটিকে ছেদিতাংশ আকারে সাজান যায়।

উভয় পক্ষকে p দ্বারা ভাগ করে $\dfrac{x\cos\alpha}{p} + \dfrac{y\sin\alpha}{p} = 1$

বা, $\dfrac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1 \qquad \therefore \quad \dfrac{x}{p\sec\alpha} + \dfrac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$

সুতরাং সরলরেখাটি x-অক্ষ ও y-অক্ষ থেকে যথাক্রমে $p\sec\alpha$ ও $p\operatorname{cosec}\alpha$ অংশ ছেদ করে।

(iii) $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ সমীকরণে,

(a) α কোণ স্থির রেখে p-এর মান পরিবর্তন করলে অর্থাৎ লম্বের দৈর্ঘ্য বিভিন্ন হলে যে সকল রেখা পাওয়া যায় তারা পরস্পর সমান্তরাল।

(b) p-এর মান স্থির রেখে α কোণের মান পরিবর্তন করলে অর্থাৎ α কোণ পরিবর্তিত হওয়ায় লম্বটি মূলবিন্দু থেকে দূরত্ব একই রেখে ঘুরতে থাকবে।

অতএব সরলরেখাগুলি p ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তের (মূলবিন্দুটি কেন্দ্র) স্পর্শক হবে।

IV. দূরত্ব আকারে সরলরেখার সমীকরণ (The equation of a straight line in distance form)

ধরা যাক, প্রদত্ত $A(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী AB সরলরেখা x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণ করছে।

AB রেখার উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ এবং $AP=r$

x-অক্ষের উপর PN ও AM লম্ব টানা হল এবং x অক্ষের সমান্তরাল AL টানিলে উহা PN কে L বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore \quad OM=x_1$; $AM=y_1$;

$ON=x_2$; $PN=y_2$

এক্ষণে, $AL=MN$

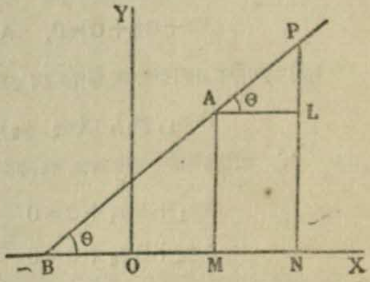
$=ON-OM=x-x_1$

$PL=PN-LN=PN-AM$

$=y-y_1 \quad \cdots \quad (1)$

আবার, $AL=AP\cos\theta$

$=r\cos\theta$



চিত্র 19

এবং $PL=AP\sin\theta=r\sin\theta \quad \cdots \quad (2)$

(1) ও (2) নং থেকে,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r \text{ ; }$$ এই-ই নির্ণেয় সমীকরণ।

$r=$ যে কোন বিন্দু (x, y) থেকে প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এর দূরত্ব।

দূরত্বের আকারে এই সমীকরণকে **প্রতিসম আকারে সরলরেখার সমীকরণ-ও** (the equation of a straight line in symmetrical form) বলা হয়।

জ্ঞাতব্য :

(i) $\dfrac{x-x_1}{\cos\theta}=\dfrac{y-y_1}{\sin\theta}=r \quad \therefore \quad x=x_1+r\cos\theta$ ও $y=y_1+r\sin\theta$

(ii) এই আকারে সমীকরণের বিশেষ সুবিধা :

(a) প্রদত্ত সরলরেখার উপর কোন প্রদত্ত বিন্দু থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

(b) দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে, প্রদত্ত সরলরেখা বরাবর ওদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য : সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার থেকে দেখা যাচ্ছে যে প্রত্যেক সমীকরণ x ও y-এর একঘাতবিশিষ্ট।

3.3. Ax+By+C=0-এর সঞ্চারপথ (Locus of Ax+By+C=0)

প্রমাণ করতে হবে যে, x ও y-এর একঘাতবিশিষ্ট প্রত্যেক সমীকরণ সর্বদা একটি সরলরেখাকে প্রকাশ করে।

x ও y এর একঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার (রূপ) হল

$$Ax+By+C=0, \quad A, B \neq 0 \quad \cdots \quad (1)$$

সমীকরণটির সঞ্চারপথের উপর যে কোন তিনটি বিন্দু ধরা যাক,

$$P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \text{ ও } R(x_3, y_3)$$

$\because$ প্রত্যেকটি বিন্দুর জন্য সমীকরণটি প্রযোজ্য, অতএব

$$Ax_1+By_1+C=0 \quad \cdots \quad (2)$$

$$Ax_2+By_2+C=0 \quad \cdots \quad (3)$$

$$Ax_3+By_3+C=0 \quad \cdots \quad (4)$$

(2) ও (3) থেকে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{A}{y_1-y_2}=\frac{B}{x_2-x_1}=\frac{C}{x_1y_2-x_2y_1}=r \text{ (ধর)}$$

$$\therefore \quad A=r(y_1-y_2)\,;\; B=r(x_2-x_1)\,;\; C=r(x_1y_2-x_2y_1)$$

(4) নং-এ A, B ও C-এর মান বসিয়ে

$$r\{x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1\}=0$$

$$\therefore \quad x_3(y_1-y_2)+y_3(x_2-x_1)+x_1y_2-x_2y_1=0$$

$$\therefore \quad x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=0$$

অর্থাৎ, P, Q, R সমরেখ অর্থাৎ সঞ্চারপথের যে কোন তিনটি বিন্দু এক সরলরেখায় থাকে। অতএব সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা। সুতরাং প্রমাণিত হল যে, x ও y-এর একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ সর্বদা সরলরেখার প্রকাশ করে।

3·4. সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $Ax+By+c=0$-কে বিভিন্ন আকারে প্রকাশ (Reduction of the general equation of a straight line, $Ax+By+c=0$ to different forms)

I. $Ax+By+c=0$-কে $y=mx+c$ আকারে :

যেহেতু $Ax+By+C=0$

$\therefore \quad By=-Ax-C \qquad$ বা, $y=\frac{-A}{B}x-\frac{C}{B}$.

$y=mx+c$-এর সঙ্গে তুলনা করলে পাই,

$$m=-\frac{A}{B} \text{ ও } c=-\frac{C}{B}.$$

II. $Ax+By+C=0$ কে ছেদিতাংশ আকারে অর্থাৎ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে :

যেহেতু, $Ax+By+C=0 \qquad \therefore \quad Ax+By=-C$

বা, $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1 \qquad \therefore \quad \frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$-এর সঙ্গে তুলনা করলে,

$$a=-\frac{C}{A} \text{ ও } b=-\frac{C}{B}$$

III. $Ax+By+C=0$-কে লম্ব আকারে অর্থাৎ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ আকারে :

$Ax+By+C=0 \qquad$ বা, $Ax+By=-C$

উভয় পক্ষকে $\sqrt{A^2+B^2}$ দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$-এর সঙ্গে তুলনা করলে পাই,

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,;\ \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\text{ও } p=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$\pm\sqrt{A^2+B^2}$ মধ্যে যে চিহ্ন (+ বা −) নিলে p ধনাত্মক হয় সেই চিহ্ন নিতে হবে।

উপরের সরলরেখার বিভিন্ন আকার থেকে দেখা যাছে, $Ax+By+C=0$ সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : দুটি সরলরেখা একই বিন্দুগামী হলে, উভয় সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের অনুরূপ ছেদিতাংশ সমান হবে অর্থাৎ সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ হলে $-\frac{c_1}{a_1}=-\frac{c_2}{a_2}$ ও $-\frac{c_1}{b_1}=-\frac{c_2}{b_2}$

$\therefore\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ অর্থাৎ সমীকরণের অনুরূপ পদের সহগগুলির অনুপাত সমান।

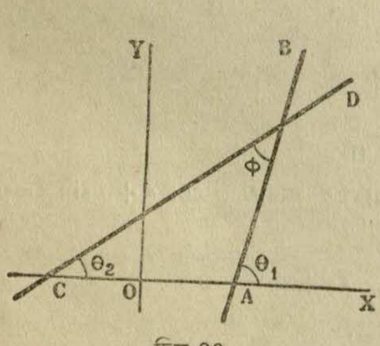
3·6. দুটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় (To find the angle between two straight lines).

ধরা যাক্ AB ও CD x-অক্ষের সঙ্গে যথাক্রমে θ_1 ও θ_2 কোণে নত এবং ওদের অন্তর্ভূত কোণ ϕ.

$\therefore\ \angle CBA=\phi,\ \angle BAX=\theta_1,\ \angle ACB=\theta_2.$

চিত্র থেকে দেখা যায় $\phi=\theta_1-\theta_2$ ......(1)

I. মনে কর সরলরেখা দুটির সমীকরণ $y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$.



চিত্র 20

$\therefore\ \tan\theta_1=m_1$

এবং $\tan\theta_2=m_2$.

(1) নং থেকে $\tan\phi=\tan(\theta_1-\theta_2)$

$$\therefore\ \tan\phi=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

II. ধরা যাক্ সরলরেখা দুটির সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$.

সুতরাং এখানে $m_1=\frac{a_1}{b_1}$ ও $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$

$$\therefore\ \tan\phi=\frac{-\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}}{1+\frac{a_1a_2}{b_1b_2}}=\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

দ্রষ্টব্য : (1) সমীকরণদ্বয় যদি $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1$ ও $x\cos\beta+y\sin\beta=p_2$ হয়, তাহলে সহজেই দেখান যায় যে, সরলরেখা দুটির অন্তর্ভূত কোণ = ওদের উপর লম্বদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ,

$$\therefore\ \phi=\alpha-\beta \text{ বা, } \beta-\alpha.$$

(ii) দুটি সরলরেখা পরস্পর তির্যকভাবে ছেদ করলে দুটি কোণ উৎপন্ন হয় —একটি সূক্ষ্ম ও অন্যটি স্থূল। সুতরাং tan ϕ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

3·7. দুটি সরলরেখার সমান্তরাল হবার শর্ত (Condition of parallelism of two lines)

$\phi=0$ হলে অর্থাৎ সরলরেখাদুটির অন্তর্ভূত কোণ শূন্য হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল হবে।

কিন্তু $\phi=0$ হলে $\theta_1=\theta_2$ হবে অর্থাৎ x-অক্ষের সঙ্গে একই কোণে নত হবে।

কাজেই নির্ণেয় শর্ত : $\tan\phi=\tan 0^\circ=0.$

সুতরাং $m_1-m_2=0.$ $\therefore$ $\mathbf{m_1=m_2}$ সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হবার শর্ত।

আবার tan $\phi=0$ হলে, $a_1b_2=b_1a$ $\therefore$ $\dfrac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{a_2}}=\dfrac{\mathbf{b_1}}{\mathbf{b_2}}$;

এটিও সরলরেখাদ্বয়ের সমান্তরাল হবার নির্ণেয় শর্ত।

দ্রষ্টব্য : দুটি সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ,

$$y=mx+c_1 \text{ ও } y=mx+c_2$$

অথবা $$ax+by+c_1=0 \text{ ও } ax+by+c_2=0$$

অর্থাৎ সমান্তরাল সরলরেখাগুলির কেবল ধ্রুব পদে পার্থক্য থাকে।

সুতরাং কোন প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে শুধুমাত্র ঐ প্রদত্ত সরলরেখার ধ্রুব পদের যথোপযুক্ত পরিবর্তন করলেই নির্ণেয় সমীকরণ পাওয়া যায়।

3.8. সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হবার শর্ত (Condition of perpendicularity of two lines)

$\phi=90^\circ$ হলে সরলরেখাদুটি পরস্পর লম্ব হবে।

$$\therefore \cot\phi=\cot 90^\circ=0.$$

$$\therefore \cot\phi=\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}=0$$

বা, $1+m_1m_2=0$ $\therefore$ $\mathbf{m_1m_2=-1}$ সরলরেখাদ্বয়ের লম্বের শর্ত।

আবার, $$\cot\phi=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{b_1a_2-a_1b_2}=0$$

বা, $a_1a_2+b_1b_2=0$; বা, $a_1a_2=-b_1b_2$

$\therefore$ $\dfrac{\mathbf{a_1}}{\mathbf{b_1}}=-\dfrac{\mathbf{b_2}}{\mathbf{a_2}}$; এটিও সরলরেখাদ্বয়ের লম্বের শর্ত।

দ্রষ্টব্য : দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ,

$$y=mx+c_1 \text{ ও } my=-x+c_2$$

অথবা, $$ax+by+c_1=0 \text{ ও } bx-ay+c_2=0$$

অর্থাৎ প্রদত্ত সরলরেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণের x ও y-এর সহগ ও চিহ্নের পর্যায়ক্রমে পরিবর্তন এবং ধ্রুব পদের যথোপযুক্ত পরিবর্তন করতে হয়।

3.9. দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দু (Point of intersection of two lines)

ধরা যাক, সরলরেখা দুটির সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad (2)$$

(x', y') সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দু হলে ছেদবিন্দুটি উভয় সরলরেখার সাধারণ বিন্দু হবে এবং ওর স্থানাঙ্কের দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হবে।

$$\therefore \quad a_1x'+b_1y'+c_1=0 \quad \ldots \quad (3)$$
$$a_2x'+b_2y'+c_2=0 \quad \ldots \quad (4)$$

বজ্রগুণন করে, $\dfrac{x'}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y'}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$$\therefore \quad x'=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}; \quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$\therefore$ ছেদবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right); \qquad a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

যদি $a_1b_2-a_2b_1=0$ হয়, বা $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সরলরেখা দুটি অসীম দূরত্বে ছেদ করবে বলা যায়। অর্থাৎ সরলরেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যেও দুটি সরলরেখা সমান্তরাল হবার শর্ত নির্ণয় করা যায়।

3.10. দুটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ (The equation of the line through the point of intersection of two lines)

ধরা যাক $\qquad a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad (1)$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad (2)$$

সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (x_1, y_1)।

$$\therefore \quad a_1x_1+b_1y_1+c_1=0 \quad \ldots \quad (3)$$

এবং $a_2x_1+b_1y_1+c_2=0 \quad \cdots \quad (4)$

এক্ষণে, একটি একঘাত সমীকরণ

$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$ ধরা যাক।

λ যে কোন ধ্রুবক কিন্তু ওর মান শূন্য নয়। এই সমীকরণটি একঘাতের বলে এর দ্বারা একটি সরলরেখা বোঝায়; (3) ও (4) সমীকরণের সাহায্যে বোঝা যায় যে, λ-র মান যাই হোক না কেন এই সরলরেখাটি (x_1, y_1) দ্বারা সিদ্ধ।

সুতরাং (1) ও (2) সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী যে কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$(\mathbf{a}_1\mathbf{x}+\mathbf{b}_1\mathbf{y}+\mathbf{c}_1)+\lambda(\mathbf{a}_2\mathbf{x}+\mathbf{b}_2\mathbf{y}+\mathbf{c}_2)=0$$

λ যে কোন ধ্রুবক, কিন্তু শূন্য নয়।

দ্রষ্টব্য: সংক্ষেপে বলতে গেলে, দুটি সরলরেখার সমীকরণ $P=0$ ও $Q=0$ হলে, ওদের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $P+\lambda.Q=0$.

3.11. সমবিন্দুগামী সরলরেখা (Concurrent lines)

পূর্বের প্রতিজ্ঞার বিপরীত প্রতিজ্ঞাও সত্যি। সুতরাং সরলরেখাগুলির সমীকরণকে

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad [\lambda = \text{যে কোন ধ্রুবক } (\neq 0)]$$

আকারে লেখা সম্ভব হলে, ঐ সমস্ত সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যাবে এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটি হল

$a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$-এর ছেদবিন্দু।

3.12. তিনটি সরলরেখা সমবিন্দুগামী হবার শর্ত (Concurrency of three lines)

যদি λ, μ, ν এমন তিনটি ধ্রুবক সংখ্যা ($\neq 0$) পাওয়া যায় যে,

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)+\nu(a_3x+b_3y+c_3)=0 \quad \cdots (1)$$

তা হলে,
$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots (2)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots (3)$$
এবং
$$a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots (4)$$

সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু।

(1) কে λ দ্বারা ভাগ করে,

$$(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{\mu}{\lambda}(a_2x+b_2y+c_2)=-\frac{\nu}{\lambda}(a_3x+b_3y+c_3)$$

$$\therefore \quad a_3x+b_3y+c_3=0 \quad \cdots (5)$$

এবং
$$(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{\mu}{\lambda}(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad \cdots (6)$$

উভয় সমীকরণ একই সরলরেখাকে বোঝায়।

কিন্তু সমীকরণ (6) হল $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরলরেখা-দ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

$\therefore$ (5) নং সমীকরণ ঐ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

সুতরাং (4), (5), (6) সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : (i) অঙ্ক কষার সময়, এভাবে আরম্ভ করবে : প্রথমে প্রদত্ত সরলরেখাগুলোর যে কোন দুটির ছেদবিন্দু নির্ণয় কর ; তারপর ঐ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক তৃতীয় সরলরেখার সমীকরণে বসিয়ে দেখ সিদ্ধ হয় কিনা।

(ii) অনেক সময় পর্যবেক্ষণের সাহায্যে অঙ্ক কষতে λ, μ, ν পদ্ধতি বিশেষভাবে প্রয়োজন হয়।

3.13. সরলরেখার একই বা বিপরীত পার্শ্বে বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়

(To find the position of points on the same or opposite side of a line)

ধরা যাক, AB সরলরেখার সমীকরণ $ax+by+c=0$ এবং $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ প্রদত্ত দুটি বিন্দু।

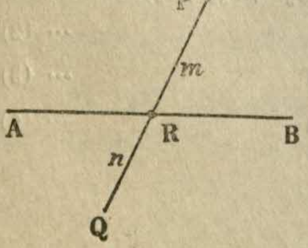
P ও Q বিন্দুদ্বয় AB সরলরেখার একপার্শ্বে অথবা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।

মনে কর, AB রেখা PQ কে R বিন্দু $m : n$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\therefore \quad PR : RQ = m : n$$

সুতরাং যখন P ও Q বিন্দুদ্বয় AB রেখার বিপরীত পার্শ্বে থাকবে, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$



চিত্র 21

যেহেতু R বিন্দু প্রদত্ত রেখা AB-র উপরে অবস্থিত,

$$\therefore a\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)+b\left(\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)+c=0$$

বা, $a(mx_2+nx_1)+b(my_2+ny_1)+c(m+n)=0$

বা, $m(ax_2+by_2+c)+n(ax_1+by_1+c)=0$

$$\therefore \frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}=-\frac{m}{n}, \text{ ঋণাত্মক।}$$

$\therefore$ ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুটি বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

(ii) ধরা যাক, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ AB রেখার একই পার্শ্বে।
এখন PQ যোগ করে বর্ধিত করলে AB রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে।
অর্থাৎ ধরা যায় যে, PQ রেখা R বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হল।

$$\therefore \quad PR : QR = m : n.$$

সুতরাং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $\left(\dfrac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \ \dfrac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$

যেহেতু Q বিন্দু AB রেখার উপর অবস্থিত,

$$\therefore \quad a.\frac{mn_2 - nx_1}{m-n} + b.\frac{my_2 - ny_1}{m-n} + c = 0$$

সরল করে : $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = +\dfrac{m}{n}$, **ধনাত্মক।**

অতএব, $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুটি একই চিহ্নযুক্ত হবে।

সুতরাং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুটি $ax + by + c = 0$ রেখার একপার্শ্বে কিংবা বিপরীত পার্শ্বে থাকবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুটি এক বা বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

$ax + by + c = 0$ সমীকরণে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক বসালে ওর মান ধনাত্মক হলে সরলরেখার ঐ পার্শ্বকে (ঐ বিন্দু যে পার্শ্বে আছে) ধনাত্মক এবং অন্য পার্শ্বকে ঋণাত্মক বলা হয়। সমীকরণে $x = 0$, $y = 0$ বসিয়ে ধ্রুবক c ধনাত্মক হলে মূলবিন্দু (0, 0) ঐ রেখাটির ধনাত্মক পার্শ্বে আছে এবং c ঋণাত্মক হলে মূলবিন্দু ঋণাত্মক পার্শ্বে আছে।

3.14. লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় (To find the length of perpendicular)

প্রদত্ত বিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

মনে কর প্রদত্ত বিন্দুটি $P(x', y')$ এবং সরলরেখাটি AB ; P থেকে AB উপর PQ লম্ব টান।

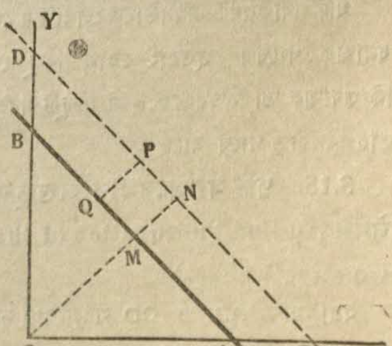
I. ধরা যাক সরলরেখাটির সমীকরণ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

P বিন্দু দিয়ে AB রেখার সমান্তরাল CD রেখা টান এবং O বিন্দু থেকে CD-র উপর ON লম্ব টান—উহা AB-কে M বিন্দুতে ছেদ করল।

মনে কর $ON = p'$; তাহলে CD সরলরেখার সমীকরণ

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$$



চিত্র 22

যেহেতু এটি (x', y') বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha = p'$$

$$\therefore \text{ লম্ব } PQ = NM = ON - OM = p' - p$$

$$= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - p \quad \cdots \quad (1)$$

II. সরলরেখাটির সমীকরণ $Ax + By + c = 0$ হলে সমীকরণটিকে

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \text{ লেখা যায় ;}$$

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,;\quad \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ ও } p = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ ধরলে}$$

উপরের সমীকরণটি $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ আকারে আছে।

$$\therefore \ (x', y') \text{ বিন্দু থেকে লম্বের দৈর্ঘ্য} = \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \cdots \quad (2)$$

জ্ঞাতব্য : মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে $ax + by + c = 0$ এই রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$p = \frac{C}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

দ্রষ্টব্য : (i) (x', y') বিন্দু থেকে $ax + by + c = 0$ সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য পেতে $ax + by + c = 0$ সমীকরণে x ও y স্থলে যথাক্রমে x' ও y' বসিয়ে x ও y এর সহগের বর্গের সমষ্টির বর্গমূল দিয়ে ভাগ করতে হবে।

(ii) চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে, যদি P বিন্দুটি AB রেখার অন্য পাশে থাকে, লম্বের দৈর্ঘ্য (1) ও (2) এর মত একই হবে, তবে ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত হবে। সুতরাং রাশি দুটির সঙ্গে ± চিহ্ন যুক্ত করা উচিত। প্রচলিত নিয়ম অনুযায়ী চিহ্নটি কি হবে তা নীচে লেখা হল।

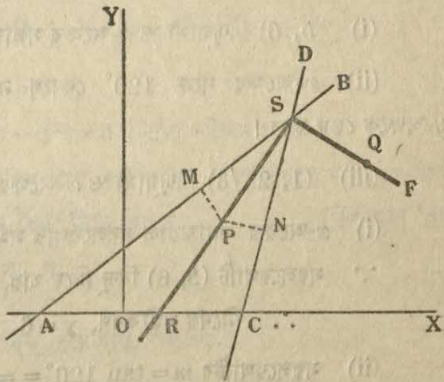
যদি সমীকরণটি এমনভাবে লেখা হয় যে c ধনাত্মক, তাহলে, মূলবিন্দু সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্বে। সুতরাং কোন বিন্দু থেকে সরলরেখার উপর লম্বের দূরত্ব ধনাত্মক কি ঋণাত্মক তা নির্ভর করছে ঐ বিন্দুটি সরলরেখাটির যে পার্শ্বে মূলবিন্দু ঐ পার্শ্বে অথবা তার বিপরীত পার্শ্বে আছে।

3.15. দুটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় (To find the equation of the bisectors of the angle between two straight lines)

ধরা যাক AB ও CD সরলরেখা দুটি S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করেছে। ওদের সমীকরণ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$; এক্ষেত্রে c_1 ও c_2 উভয়েই ধনাত্মক।

মনে কর, AB ও CD রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূ'ত কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃ-সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে SR ও SF ; SR ও SF রেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

মনে কর, অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক SR এর উপর $P(x', y')$ যে কোন বিন্দু। AB ও CD-র উপরে যথাক্রমে PM ও PN লম্ব টান।



চিত্র 23

P বিন্দুটি ∠ASC এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলে উভয়রেখা থেকে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব সমান।

$\therefore$ PM = PN

$$\therefore \quad \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots \quad (1)$$

যেহেতু (x', y') বিন্দুটি ও মূলবিন্দু উভয়ে AB ও CD উভয়রেখার একপার্শ্বে আছে, সুতরাং (1) এর ডান ও বাম উভয়পক্ষে একই চিহ্ন হবে।

অনুরূপভাবে, যদি বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের উপরে $Q(x', y')$ যে কোন বিন্দু হয়, তাহলে,

$$\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \quad \cdots \quad (2)$$

এখানে যেহেতু (x', y') ও মূলবিন্দু উভয়ে AB ও CD উভয় রেখার বিপরীত পার্শ্বে, অতএব (2) নং সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষের চিহ্ন বিপরীত হবে।

$\therefore$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ :

$$\frac{\mathbf{a_1x+b_1y+c_1}}{\sqrt{\mathbf{a_1^2+b_1^2}}}=\pm\frac{\mathbf{a_2x+b_2y+c_2}}{\sqrt{\mathbf{a_2^2+b_2^2}}}$$

অনুরূপভাবে, যদি সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

এবং $x\cos\beta+y\sin\beta-p'=0$ হয়,

তাহলে, ওদের অন্তভূ'ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ হবে :

$$\mathbf{x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=\pm(x\cos\beta+y\sin\beta-p')}$$

3.16. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative Examples)

উদা. 1 নীচের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) (5, 6) বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সমান্তরাল,

(ii) x-অক্ষের সঙ্গে 120° কোণে নত এবং মূলবিন্দু থেকে এক একক দূরে y-অক্ষকে ছেদ করে।

(iii) $(1, 2\sqrt{3})$ বিন্দুগামী ও x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $\mathbf{y=c}$.

$\because$ সরলরেখাটি (5, 6) বিন্দু দিয়ে যায়, সুতরাং $c=6$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\mathbf{y=6}$.

(ii) সরলরেখাটির $m=\tan 120^\circ = = \sqrt{3}$

আবার, সরলরেখাটি y-অক্ষকে এক একক দূরে ছেদ করে। $\therefore\ c=1.$

$\therefore$ $y=mx+c$ সমীকরণে m ও c-এর মান বসিয়ে,

নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{\sqrt{3x}+y=1}$

(iii) সরলরেখাটি অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে নত ;

$\therefore$ রেখাটির $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

আবার, রেখাটি $(1, 2\sqrt{3})$ বিন্দু দিয়ে যায়। অতএব,

$$y-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1) \quad \text{বা,} \quad \sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0}$.

উদা. 2. নীচের বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার নতি ও সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) (1, 2) ও (3, 4) (ii) $(a, b-a)$ ও $(a+b, b)$

(i) নতি $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, এখানে $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=3$; $y_2=4$

$$\therefore \text{ সরলরেখাটির নতি}=\frac{4-2}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$

সরলরেখার সমীকরণ : $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

বা, $$y-2=\frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

বা, $y-2=1(x-1)$ $\therefore$ $\mathbf{x-y+1=0}$ নির্ণেয় সমীকরণ

(ii) সরলরেখাটির নতি $=\frac{b-(b-a)}{a+b-a}=\frac{b-b+a}{b}=\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$

সরলরেখাটির সমীকরণ, $y-(b-a)=\frac{a}{b}(x-a)$

বা, $ax-by+b(b-a)-a^2=0.$

$\therefore$ $\mathbf{ax-by-(a^2+ab-b^2)=0}$ নির্ণেয় সমীকরণ

উদা. 3. (3, −4) ও (1, 2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [**উৎকল '48**]

মনে কর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ... (i)

যেহেতু এটি (3, −4) ও (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব

$$\frac{3}{a}-\frac{4}{b}=1 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$\text{এবং } \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমাধান করে, $a=\frac{5}{3}$ ও $b=5.$

$\therefore$ সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{3x}{5}+\frac{y}{5}=1$ বা, $\mathbf{3x+y-5=0.}$

x ও y অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদিতাংশ যথাক্রমে $\frac{5}{3}$ ও 5.

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(\frac{5}{3})^2+5^2}=\frac{5}{3}\sqrt{10}$

উদা. 4. যে সরলরেখা x ও y-অক্ষদ্বয় থেকে যথাক্রমে 2 এবং 1 একক ছেদ করে তার সমীকরণ ও $2x+y=5$ দ্বারা অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ নির্ণয় কর। [C.U. '44]

ধর, সমীকরণটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; এখানে $a=2$ এবং $b=1$;

$\therefore$ $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$ বা, $\mathbf{x+2y=2}$, নির্ণেয় সমীকরণ।

আবার, $2x+y=5$ সমীকরণকে ছেদিতাংশ আকারে লিখলে,

$$\frac{2x}{5}+\frac{y}{5}=1 \quad \text{বা,} \quad \frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{5}=1$$

$\therefore$ x ও y অক্ষের ছেদিতাংশ যথাক্রমে $\frac{5}{2}$ ও **5.**

উদা. 5. যে সরলরেখা অক্ষদ্বয়কে সমান অংশে ছেদ করে ও (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ঐ সরলরেখাটি অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে যে ত্রিভুজ গঠিত করে তার ক্ষেত্রফল কত ?

ধর, সরলরেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; এখানে $a=b$;

$$\therefore \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \qquad \therefore \quad x+y=a$$

$\because$ সরলরেখাটি (3, 2) বিন্দু দিয়ে যায়, $\therefore \quad a=3+2=5.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{x}+\mathbf{y}=5.$

এই সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে (5, 0) ও (0, 5) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে সরলরেখাটি যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে, তা **সমকোণী ত্রিভুজ**।

ত্রিভুজের লম্ব = মূলবিন্দু থেকে y অক্ষ বরাবর এক বাহুর দৈর্ঘ্য = 5

ত্রিভুজের ভূমি = মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষ বরাবর অপর বাহুর দৈর্ঘ্য = 5

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\Delta=\frac{1}{2}\times 5\times 5=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}$ **বর্গএকক**

উদা. 6. একটি সরলরেখা (−3, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং ঐ বিন্দুতে অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশ 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ নির্ণেয় সমীকরণ।

রেখাটি x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে $(a, 0)$ ও $(0, b)$ বিন্দুতে ছেদ করে ;

$\therefore$ যে বিন্দুতে $(a, 0)$ ও $(0, b)$-র সংযোজক সরলরেখা 1 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়, তার স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{1.a+2.0}{1+2}, \frac{1.0+2.b}{1+2}\right)$ বা, $\left(\frac{a}{3}, \frac{2b}{3}\right)$

প্রশ্নানুসারে, $-3=\frac{1}{3}a$ ও $2=\frac{2}{3}b$; $\therefore$ $a=-9$ এবং $b=3$

$\therefore \quad \frac{x}{-9}+\frac{y}{3}=1$ বা, $3\mathbf{y}-\mathbf{x}=9$ নির্ণেয় সমীকরণ

উদা. 7. একটি সরলরেখা এরূপে চলমান যে সর্ব-অবস্থানে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুটির অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, রেখাটি একটি স্থির বিন্দু দিয়ে যায়।

[B. U.. '35]

মনে কর, সরলরেখাটি $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ... (i)

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ একটি ধ্রুবক $=\frac{1}{k}$ (ধর)

$\therefore \quad \frac{k}{a}+\frac{k}{b}=1$ ... (ii)

(i) ও (ii) তুলনা করলে দেখা যায় (k, k) বিন্দুটি (1) নং রেখার উপরিস্থিত একটি বিন্দু। সুতরাং a ও b-এর মান যাই হোক না কেন, রেখাটি সর্বদা স্থির বিন্দু **(k, k)** দিয়ে যায়।

উদা. 8. $x-y+7\sqrt{2}=0$ কে লম্ব আকারের সমীকরণে প্রকাশ কর এবং মূলবিন্দু থেকে ওর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

$x-y+7\sqrt{2}=0$; বা, $-x+y=7\sqrt{2}$

বা, $$-\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}x+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}y=\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{1+1}}$$

বা, $-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=7$; বা, $x(-\cos 45^\circ)x+y(\sin 45^\circ)=7$

$\therefore$ $x\cos 135^\circ+y\sin 135^\circ=7$ $\therefore$ **লম্বের দৈর্ঘ্য = 7 একক**

দ্রষ্টব্য : লম্ব আকারে সরলরেখার সমীকরণ, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

এখানে $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ও $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore$ $\cos\alpha$ ও $\sin\alpha$ উভয়ের মানের সঙ্গতি থাকে যখন $\alpha=135^\circ$ হয়।

উদা. 9. যদি মূলবিন্দু থেকে $x\sin\theta+y\cos\theta=\frac{a}{2}\sin 2\theta$ এবং $x\cos\theta-y\sin\theta=a\cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে p ও p_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে $4p^2+p_1^2=a^2$. [C. U. '58]

এখানে, $$p=\frac{\frac{a}{2}\sin 2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=\frac{a}{2}\sin 2\theta;\ \therefore\ 2p=a\sin 2\theta.$$

আবার, $$p_1=\frac{a\cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=a\cos 2\theta$$

$$\therefore\ 4p^2+p_1^2=(2p)^2+(p_1)^2=a^2\sin^2 2\theta+a^2\cos^2 2\theta$$
$$=a^2(\sin^2 2\theta+\text{con}^2 2\theta)=a^2$$
$$\therefore\ 4p^2+p_1^2=a^2$$

উদা. 10. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ ও $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। এই ছেদবিন্দুগামী সরলরেখা উভয় অক্ষের সঙ্গে 45° কোণে নত হলে ওর সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '41]

উপরের সমীকরণদ্বয়কে নিম্নোক্ত ভাবে লেখা যায়,

$$5x+4y=20 \quad \cdots \quad (1)$$
$$4x+5y=20 \quad \cdots \quad (2)$$

সমাধান করে, $x=\frac{20}{9}$ ও $y=\frac{20}{9}$; $\therefore$ $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$ হল ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

যেহেতু, এই ছেদবিন্দুগামী সরলরেখা উভয় অক্ষকে 45° কোণে ছেদ করে, অতএব অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ সমান : $a=b$.

$\therefore$ সরলরেখার ছেদিতাংশ আকার থেকে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \quad \therefore \; x+y=a$

$\because$ এই সরলরেখাটি $(\frac{20}{9}, \frac{20}{9})$ বিন্দু দিয়ে যায়, $\therefore \; a=\frac{20}{9}+\frac{20}{9}=\frac{40}{9}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x+y=\frac{40}{9}$; বা, $\mathbf{9x+9y=40}$.

উদা. 11. কোন সরলরেখা $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '44]

$6x-7y+8=0$ রেখার উপর লম্ব-সরলরেখার সমীকরণ,

$$7x+6y+c=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

ধর, $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (h, k)

$$\therefore \quad 2h-3k+4=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$3h+4k-5=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(ii) ও (iii) সমাধান করে $h=-\frac{1}{17}$ ও $k=\frac{22}{17}$

$\therefore$ (i) নং সরলরেখা $(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17})$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore \; -\frac{1}{17}+6.\frac{22}{17}+c=0$; $\quad \therefore \; c=-\frac{125}{17}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $7x+6y-\frac{125}{17}=0$ বা, $\mathbf{119x+102y=125}$

উদা. 12. যে সরলরেখা (3, 4) বিন্দুগামী ও $4x-3y+1=0$ সরলরেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '56]

$4x-3y+1=0$ রেখার উপর লম্ব-সরলরেখার সমীকরণ : $3x+4y+c=0$

যেহেতু সমীকরণটি (3, 4) বিন্দুগামী, $\therefore \; 3.3+4.4+c=0$; $\therefore \; c=-25$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{3x+4y-25=0}$

উদা. 13. যে সরলরেখা $25x+41y=8$ ও $7y+5x+9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x+3y+7=0$ রেখার সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$25x+41y=8$ ও $7y+5x+9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

$$25x+41y-8+\lambda(5x+7y+9)=0, \; (\lambda \neq 0),$$

বা, $$5(5+\lambda)x+(41+7\lambda)y+9\lambda-8=0 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

(1) সরলরেখাটি $2x+3y+7=0$ সরলরেখার সমান্তরাল হবে যদি

$$\frac{5(5+\lambda)}{2}=\frac{41+7\lambda}{3} \text{ হয় ;}$$

বা, $75+15\lambda=82+14\lambda \quad \therefore \quad \lambda=7$

$\therefore$ (1) নং সমীকরণে λ র মান বসিয়ে $5(5+7)x+(41+7.7)y+9.7-8=0$

বা, $60x+90y+55=0$; বা, $12x+18y+11=2$ নির্ণেয় সমীকরণ

উদা. 14. প্রমাণ কর যে, নিচের সরলরেখা তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

$2x-7y+10=0,\ 3x-2y-1=0$ ও $x-12y+21=0$ [C. U. '43]

$2x-7y+10=0$ ও $3x-2y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k) হলে

$$\left.\begin{aligned} 2h-7k+10&=0 \\ 3h-2k-\ \ 1&=0 \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণ দুটি সমাধান করে, $h=\frac{27}{17}$ ও $k=\frac{32}{17}$;

এক্ষণে, $h-12k+21=\frac{27}{17}-12.\frac{32}{17}+21=0$

সুতরাং (h, k) বিন্দুটি $x-12y+21=0$ রেখার উপরে অবস্থিত।

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাত্রয় $(\frac{27}{17}, \frac{32}{17})$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

উদা. 15. দেখাও যে, (a, b) থেকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$-এর লম্ব-দূরত্ব $=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব $p=\dfrac{\frac{a}{a}+\frac{b}{b}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}=\dfrac{2-1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

দ্রষ্টব্য : সমান্তরাল সরলরেখার পারস্পরিক দূরত্ব নির্ণয় করতে প্রথমে মূলবিন্দু থেকে ঐ সরলরেখাগুলির লম্ব-দূরত্ব নির্ণয় করবে।

উদা. 16. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখা $2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও $4x+3y-6=0$ সরলরেখার সমান্তরাল। a ও b এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '48]

$2x-y=1$ ও $3x-4y+6=0$ সমীকরণ দুটি সমাধান করে $x=2$ ও $y=3$;

$\therefore$ ঐ দুই সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (2, 3)।

এখন, $4x+3y-6=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $4x+3y+k=0$;

যেহেতু এটি (2, 3) বিন্দু দিয়ে যায়, $\therefore \ 4.2+3.3+k=0$ বা, $k=-17$

অতএব, সরলরেখার সমীকরণ : $4x+3y-17=0$

ছেদিতাংশ আকারে লিখে : $\frac{x}{\frac{17}{4}}+\frac{y}{\frac{17}{3}}=1$; $\quad \therefore \ a=\frac{17}{4}$ ও $b=\frac{17}{3}$

উদা. 17. $y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী ও মূলবিন্দু থেকে $\frac{7}{\sqrt{2}}$ দূরত্বে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করে $x=3$ ও $y=4$;

$\therefore$ ঐ ছেদবিন্দু $(3, 4)$-গামী সরলরেখার সমীকরণ : $y-4=m(x-3)$

বা, $mx-y+4-3m=0$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ থেকে ঐ রেখার দূরত্ব $=\frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{4-3m}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{7}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\frac{(4-3m)^2}{m^2+1}=\frac{49}{2}$

বা, $32+18m^2-48m=49m^2+49$

বা, $31m^2+48m+17=0$ $\therefore$ $m=-1$ বা, $-\frac{17}{31}$

$m=-1$ হলে সমীকরণটি $x+y=7$; $m=-\frac{17}{31}$ হলে $17x+31y=175$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{x+y=7}$ ও $\mathbf{17x+31y=175}$

উদা. 18. যে সরলরেখা $3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় ও অক্ষদ্বয়ে সমান অংশ ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. B. Sc. '47]

$3x-4y+1=0$ ও $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী রেখার সমীকরণ

$3x-4y+1+\lambda(5x+y-1)=0$; $\lambda=$ ধ্রুবক $(\neq 0)$

বা, $(3+5\lambda)x+(\lambda-4)y+1-\lambda=0$ ... (1)

(1) সমীকরণ অক্ষদ্বয়কে সমান অংশে ছেদ করে ; সুতরাং (1) সমীকরণকে ছেদিতাংশ আকারে প্রকাশ করলে

$$\frac{x}{\frac{\lambda-1}{5\lambda+3}}+\frac{y}{\frac{\lambda-1}{\lambda-4}}=1$$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\lambda-1}{5\lambda+3}=\frac{\lambda-1}{\lambda-4}$ বা, $\lambda=1$ বা, $-\frac{7}{4}$

$\lambda=1$ হলে, $\lambda-1=0$; তখন সমীকরণ (1) মূলবিন্দুগামী সরলরেখা অর্থাৎ অক্ষদ্বয় থেকে কোন অংশ ছেদ করে না। সুতরাং $\lambda=1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব $\lambda=-\frac{7}{4}$ ধরে নির্ণয় সমীকরণটি

$[5.(-\frac{7}{4})+3]x+(-\frac{7}{4}-4).y+(1+\frac{7}{4})=0$

বা, $-\frac{23}{4}x-\frac{23}{4}y+\frac{11}{4}=0$ $\therefore$ $\mathbf{23x+23y-11=0}$

উদা. 19. প্রমাণ কর যে, $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$ ও $y+\sqrt{3}x=4$ সরলরেখাত্রয় সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. '57]

সমীকরণত্রয় হল : $y=2$ ... (i)

$y=\sqrt{3}x+5$ ... (ii)

$y=-\sqrt{3}x+4$ ... (iii)

(i) নং রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা।

(ii) নং সরলরেখার নতি $=\sqrt{3}=\tan 60^\circ$; অতএব রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 60° কোণে নত।

(iii) নং সরলরেখার নতি $=-\sqrt{3}=\tan 120^\circ$; অতএব রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 120° কোণে নত।

অতএব (ii) ও (iii) নং সরলরেখাদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল (i) নং সরলরেখার সঙ্গে যথাক্রমে 60° ও 120° কোণে নত ; অর্থাৎ সরলরেখা (ii) ও (iii) পরস্পরের দিকে সরলরেখা (i)-এর সঙ্গে 60° কোণে নত।

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) সরলরেখা তিনটি দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের প্রতি কোণ 60°।

∴ **ত্রিভুজটি সমবাহু ত্রিভুজ।**

$$\therefore \text{ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times(\text{বাহু})^2$$

এক্ষণে, $y=2$ রেখার সঙ্গে (ii) ও (iii) রেখাদ্বয় যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় করতে (ii) ও (iii)-তে $y=2$ বসান হল।

$$\therefore \text{ (ii) থেকে } x=-\sqrt{3} \text{ ও (iii) থেকে } x=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক } (-\sqrt{3}, 2) \text{ ও } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2\right)$$

∴ উভয় বিন্দুর দূরত্ব বা ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(2-2)^2}=\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল } \Delta=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{12}\sqrt{3} \text{ বর্গ একক}$$

উদা. 20. যদি x-অক্ষের সঙ্গে θ-কোণে নত সরলরেখার সমান্তরাল রেখা বরাবর মাপা হয় তবে দেখাও যে, $ax+by+c=0$ রেখা থেকে (x_0, y_0) বিন্দুর দূরত্ব $\dfrac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$. [C. U. '54]

x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণে নত সরলরেখার সমান্তরাল ও (x_0, y_0) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y-y_0=\tan\theta(x-x_0)$$

$$\text{বা,}\quad \frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta} \quad \cdots \quad (1)$$

এখন (1) রেখাটি বরাবর (x_0, y_0) থেকে $ax+by+c=0$ রেখার দূরত্ব p হলে

$$\frac{x-x_0}{\cos\theta}=\frac{y-y_0}{\sin\theta}=p\,;$$

$$\therefore\quad x=x_0+p\cos\theta \quad \text{এবং} \quad y=y_0+p\sin\theta$$

যেহেতু (x_0, y_0) বিন্দুটি $ax+by+c=0$ সরলরেখারও একটি বিন্দু। সুতরাং

$$a(x_0+p\cos\theta)+b(y_0+p\sin\theta)+c=0$$

$$\text{বা,}\quad p(a\cos\theta+b\sin\theta)=-(ax_0+by_0+c)$$

$$\therefore\quad p=-\frac{ax_0+by_0+c}{a\cos\theta+b\sin\theta}$$

উদা. 21. A(0, −4) ও B(−3, +1) বিন্দুদ্বয় $6x+7y+12=0$ রেখার একই দিকে কিংবা বিপরীত দিকে স্থির কর।

প্রদত্ত সমীকরণ $6x+7y+12=0$-তে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, −4) বসিয়ে

$$6.0+7.(-4)+12=-28+12=-14 \quad \therefore \text{ ঋণাত্মক।}$$

আবার, ঐ সমীকরণে B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−3, +1) বসিয়ে

$$6.(-3)+7.1+12=-18+7+12=-18+19=1 \quad \therefore \text{ ধনাত্মক।}$$

অতএব, প্রদত্ত সরলরেখার এক পার্শ্বে A বিন্দু ও বিপরীত পার্শ্বে B বিন্দু অবস্থিত।

উদা. 22. $4x+3y+7=0$, $5x+12y+20=0$ ও $3x+4y+8=0$ রেখাত্রয় দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। দেখাও যে, তারা একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। [A. U. '46]

$4x+3y+7=0$ ও $5x+12y+20=0$ রেখা দিয়ে গঠিত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$\frac{4x+3y+7}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{5x+12y+20}{\sqrt{5^2+12^2}} \quad \text{বা,}\quad \frac{4x+3y+7}{5}=\frac{5x+12y+20}{13}$$

$$\text{বা,}\quad 27x-21y-9=0 \quad \therefore\quad 9x-7y-9=0 \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে, অন্য অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি :

$$16x+28y+51=0 \quad \cdots \quad (2)$$

ও $$7x+7y+15=0 \quad \cdots \quad (3)$$

উদা. 9 অনুসারে, দেখান যায় যে, (1), (2) ও (3) রেখাগুলি $(-\frac{3}{4}, -\frac{39}{28})$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

উদা. 23. (3, −2) বিন্দু থেকে $2x-y+7=0$ রেখার উপর লম্ব টানলে ঐ লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রেখার সমীকরণ

$$2x-y+7=0 \quad \text{বা,} \quad y=2x+7 \quad \therefore \text{ নতি}=2$$

অতএব, $y=2x+7$ রেখার উপর লম্ব-সরলরেখার নতি $-\frac{1}{2}$ হবে।

(3, −2) বিন্দুগামী এবং $y=2x+7$ রেখার লম্ব-সরলরেখার সমীকরণ

$$y-3=-\tfrac{1}{2}(x+2) \quad \text{বা} \quad x+y=4$$

$2x-y+7=0$ ও $x+y=4$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুই হল ঐ পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

সমীকরণদ্বয় সমাধান করে

$x=-1$ ও $y=5$ $\therefore$ পাদবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (−1, 5)

উদা. 24. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় (−2, 1), (1, 4) এবং (3, −1); ত্রিভুজটির উচ্চতাগুলো নির্ণয় কর।

ধর, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A(−2, 1), শীর্ষ B(1, 4) এবং শীর্ষ C(3, −1)

$\therefore$ BC বাহুর সমীকরণ :

$$y-4=\frac{-1-4}{3-1}(x-1) \quad \text{বা,} \quad y-4=-\tfrac{5}{2}(x-1)$$

$$\therefore \quad 5x+2y-13=0$$

A(−2, 1) থেকে BC রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা h_1 হল :

$$h_1=\frac{5.(-2)+2.1-13}{\sqrt{5^2+2^2}}=-\frac{21}{\sqrt{29}}$$

একইভাবে, অন্য দুই উচ্চতা h_2 ও h_3-ও নির্ণয় করা যায়।

উদা. 25. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি $x=0$, $y=0$ ও $3x+4y-12=0$ তার কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U.]

$x=0$, y অক্ষের সমীকরণ $\quad \cdots \quad (1)$

$y=0$, x অক্ষের সমীকরণ $\quad \cdots \quad (2)$

এক্ষণে, $3x+4y=12$ বা, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ ... (3)

x ও y অক্ষকে ধনাত্মক দিকে ছেদ করে।

∴ অক্ষদ্বয় ত্রিভুজটির দুটি বাহু।

অতএব, প্রথম ও তৃতীয় পাদের সমকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত ক'রে যে রেখা যাবে তা-ই ত্রিভুজটির একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

সমদ্বিখণ্ডকটি মূলবিন্দুগামী বলে ধ্রুব পদটি শূন্য এবং x-অক্ষের সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে।

∴ সমদ্বিখণ্ডকটির নতি $=\tan 45^\circ=1$

∴ সমদ্বিখণ্ডকটির সমীকরণ $y=x$

আবার (1) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$x=\frac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

বা, $5x=-3x-4y+12$ ∴ $2x+y-3=0$

আবার (2) ও (3) বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটির সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ :

$$y=\frac{-3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

বা, $5y=-3x-4y+12$ ∴ $x+3y-4=0$

অতএব নির্ণেয় সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের সমীকরণগুলি হল :

$$y=x\ ;\ 2x+y-3=0\ ;\ x+3y-4=0$$

অনুশীলনী 3

1. নীচের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $(-2, -3)$ বিন্দুগামী ও নতি $\sqrt{3}$।

(ii) x-অক্ষের সঙ্গে 150° কোণে নত ও y-অক্ষকে ঋণাত্মক দিকে 2 একক দূরে ছেদ করে।

(iii) x-অক্ষের সঙ্গে $\sin^{-1}\frac{5}{13}$ কোণে নত ও y-অক্ষকে -5 দূরে ছেদ করে।

2. নীচের বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার নতি নির্ণয় কর।

(i) $(0, 0)$ ও $(3, 6)$ (ii) $(8, 3)$ ও $(-3, 2)$

(iii) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 5\right)$ ও $(\sqrt{3}, 1)$ (iv) $(at_1^2, 2at_1)$ ও $(at_2^2, 2at_2)$

(v) $(0, a)$ ও $(b, 0)$

3. নীচের রেখাগুলির নতি এবং ওরা x ও y-অক্ষের যে যে বিন্দু দিয়ে যায় তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $2x+3y=9$ (ii) $3x-2y-1=0$

(iii) $x \operatorname{cosec} \theta - y \sec \theta - r = 0$

4. নীচের বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাগুলি x-অক্ষের সঙ্গে যে কোণে নত সেই কোণ ও y-অক্ষের সঙ্গে ওদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) $(0, 0)$ ও $(3, 6)$ (ii) $(5, -1)$ ও $(3, -7)$

(iii) $(4, -7)$ ও $(-7, 4)$

5. নিচে সরলরেখাগুলি দ্বারা x ও y-অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দেওয়া হল ; ওদের সমীকরণগুলি নির্ণয় কর।

(i) $-\frac{3}{2}$ ও $\frac{5}{3}$ (iii) $r \sec \theta$ ও $r \operatorname{cosec} \theta$

(ii) $\frac{1}{a}$ ও $\frac{1}{b}$ (iv) $\frac{1}{a} \sin \alpha$ ও $a \operatorname{cosec} \alpha$

6. মূলবিন্দু থেকে প্রদত্ত সরলরেখাগুলির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(i) $\sqrt{3}x+y=8$ (ii) $x+y+1=0$

(iii) $y \cos \theta - x \sin \theta = r$ (iv) $x+y=3\sqrt{2}$

(v) $y+x \cot \theta = l$

7. নীচের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $(8, -6)$ বিন্দুগামী ও উভয় অক্ষ থেকে সমান অংশ ছেদ করে।

(ii) x-অক্ষের সঙ্গে $45°$ কোণে নত এবং $(4, 7)$ ও $(6, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(iii) $(5, 6)$ বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশ দুটি সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত। ঐ রেখার যে বিন্দুতে কোটি ভুজের দ্বিগুণ তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '34]

(iv) $(1, 2)$ ও $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয়গামী ; অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '36]

(v) $(3, 2)$ বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশ ঐ বিন্দুতে $2:3$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

(vi) x-অক্ষের সঙ্গে $120°$ কোণে নত এবং মূলবিন্দু থেকে ঐ রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক।

(vii) $(7, 8)$ বিন্দুগামী ও অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের সমষ্টি 30।

8. একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে 45° কোণে নত এবং y-অক্ষ থেকে 3 একক ছেদ করে; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। জ্যামিতিক ভাবে দেখাও যে, রেখাটি $x+y=2$ রেখাকে লম্বভাবে ছেদ করে। [C. U. '39]

9. $ax+by+c=0$ রেখা ও অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী রেখাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

10. কোন সরলরেখা অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ঐ ত্রিভুজের অতিভুজ 13 ও ক্ষেত্রফল 30; ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '38]

11. দেখাও যে, (1, 5), (3, 14) ও (−1, −4) বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং রেখাটি নির্ণয় কর। [C. U. '57]

12. যে দুটি সরলরেখা মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী $4x+3y=12$ রেখার অংশকে সমত্রিখণ্ডিত করে, তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. $2x+3y+5=0$ ও $7x+4y=3$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Utkal '47]

14. $x+3y+1=0$ ও $2x+7y+3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '46, G. U. '49]

15. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ও $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[C. U. '43]

16. যে সরলরেখা $3x+2y-7=0$ ও $x-4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং (1, 1) বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. যে সরলরেখা $4x-5y+6=0$ ও $5x+8y-2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং (3, −4) বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. যে সরলরেখা (3, 2) বিন্দু এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ রেখা অক্ষদ্বয়কে ছেদ করায় যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U. '43]

19. যে সরলরেখা x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে 7 ও $5\frac{1}{4}$ এককে ছেদ করে তার সমীকরণ ও ঐ রেখা (−9, 5) ও (7, 9) বিন্দুর সংযোজক রেখাকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

20. (a, b) বিন্দুগামী একটি সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী ছেদিতাংশ ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হলে, ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

21. দেখাও যে, (α, β) এবং $a_1x+b_1y+c_1=0$ ও $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ :

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_1\alpha+b_1\beta+c_1}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_2\alpha+b_2\beta+c_2}$$ [C. U. '43]

22. নীচের সরলরেখাগুলির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

(i) $3x-y=6$ ও $2y+5x=3$ (ii) $x+3y=5$ ও $x-2y+5=0$

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}-\frac{x}{a}=1$

23. নীচের সরলরেখাগুলির দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

$$2y+x=5,\ y+2x=7,\ y-x=1$$

24. দেখাও যে, $y=m_1x+c_1$, $y_2=m_2x+c_2$ ও y-অক্ষ দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তার ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\frac{(c_1-c_2)^2}{(m_2-m_1)}$. [C. U. '55]

25. প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দু ও (2, 3) বিন্দুগামী সরলরেখা, $5x-3y=2$ এবং $x+y=10$ এর সঙ্গে সমবিন্দু। [Andhra '47]

26. m এর কোন্ মানের জন্য $y=3x-1$, $2y=x+3$ এবং $3y=mx+4$ সরলরেখাত্রয় একই বিন্দুগামী হবে? [C. U. '55]

27. দেখাও যে, $lx+my+n=0$, $mx+ny+l=0$ এবং $nx+ly+m=0$, সমবিন্দু যদি $l+m+n=0$ হয়।

28. প্রমাণ কর যে, $x-y+5=0$, $x+y-1=0$ ও $5x-y+13=0$ সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু।

29. m এর মান কি হলে $y=x+1$, $y=2(x+1)$ ও $y=mx+3$ সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু হবে। [A. U. '47]

30. নীচের সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (2 – 1) বিন্দুগামী এবং $3x-2y=5$ সরলরেখার উপর লম্ব।

(ii) (3, 5) বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরলরেখার সমান্তরাল। [C. U. '47]

(iii) (3, 2) বিন্দুগামী এবং $x\cos 5^\circ+y\sin 5^\circ=2$ সরলরেখার উপর লম্ব।

(iv) (3, 2) বিন্দু এবং $3x+y-5=0$ ও $x+5y+3=0$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [C. U. '42]

(v) (1, 2) বিন্দু ও $x+3y+1=0$ ও $2x+7y+3=0$ এর ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [C. U. '46]

(vi) মূলবিন্দু ও $2x+3y=1$ ও $x-y=2$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [C. U. '33]

(vii) $x+2y=0$ ও $y+4x+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x-y=0$ রেখার উপর লম্ব। [C. U. '32]

(viii) $x+2y+3=0$ ও $3x+4y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $y-x=8$ রেখার উপর লম্ব। [C. U. '40]

(ix) মূলবিন্দু এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ ও $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী।

(x) $2x-3y+4=0$ ও $3x+4y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ রেখার উপর লম্ব। [C. U. '44]

31. (i) প্রমাণ কর যে, $2x-7y+11=0$, $3x-2y+1=0$, $x-12y+21=0$ সরলরেখাত্রয় সমবিন্দু। ঐ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '45]

(ii) প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$; $x=y$ রেখাত্রয় সমবিন্দু। ঐ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

32. দেখাও যে, $x-y-7=0$, $x+2y+6=0$ ও $2x+y-1=0$ রেখাত্রয় একটি সাধারণ বিন্দু দিয়ে যায় এবং ঐ বিন্দুটি $(5, -4)$, $(3, -2)$ ও $(1, -6)$ থেকে সমদূরবর্তী। [C. U. '56]

33. দেখাও যে, $(a+b)x+(a-b)y-2ab=0$ ও $(a-b)x+(a+b)y-2ab=0$ ও $x+y=0$ রেখাত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে এবং তার শীর্ষকোণ $2\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$. ঐ ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U.]

34. (i) প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ ও $\sqrt{3}y+x=1$ রেখাগুলি দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। [C. U. '53]

(ii) প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=2$ রেখাগুলির দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে। [C. U. '39]

35. $(2, -4)$ বিন্দুগামী এবং $3x+4y+15=0$ রেখার উপর লম্ব সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। বিন্দুটি থেকে রেখাটির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

36. দেখাও যে, $9x+6y-7=0$ ও $3x+2y+6=0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল; ঐ রেখা দুটি থেকে সমদূরবর্তী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Madras B. A. '48]

37. $3x+4y+7=0$ ও $5x+8y+9=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $3x-2y+5=0$ রেখার উপর লম্ব, সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Nagpur '45]

38. কোন সরলরেখা $(2, -1)$ বিন্দুগামী এবং x ও y-অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে এমনভাবে ছেদ করে যে, ছেদিতাংশের অনুপাত $3:4$ হয়; সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। $(3, 2)$ বিন্দু থেকে ঐ সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
[Annamalai '33]

39. দেখাও যে, $a+b\neq 0$ হলে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু এমন একটি বর্গক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু যার অপর বাহুদ্বয় দুই অক্ষ। [C. U. '52]

40. যদি (a, b), (a', b') ও $(a-a', b-b')$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হয়, তবে দেখাও যে, তাদের সংযোজক সরলরেখা মূলবিন্দুগামী এবং $ab'=a'b$. [C. U. '38]

41. দেখাও যে, যে সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশ (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তার সমীকরণ $\frac{x}{2x_1}+\frac{y}{2y_1}=1$.

42. $(2, 3)$ বিন্দু থেকে নীচের সরলরেখাগুলির উপর লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(i) $y=3x+4$ [A. U. '46] (ii) $x+y-11=0$ [C. U. '48]

43. $y=0$, $y=2x$ এবং $y=6x+5$ রেখাত্রয় দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [Rajputana '43]

44. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ দুটি অক্ষদ্বয় বরাবর এবং তাদের দৈর্ঘ্য 2 একক। বর্গক্ষেত্রটির বাহুগুলির (বর্ধিত) সমীকরণ নির্ণয় কর। [C.U . '50]

45. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $(0, a)$, $(0, b)$ ও $(0, c)$; বাহুগুলির (বর্ধিত) সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

46. দেখাও যে, কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর লম্বগুলি সমবিন্দু।

47. $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c=0$, $ax+by+c'=0$ এবং $a'x+b'y+c'=0$ রেখাগুলি দিয়ে গঠিত সামান্তরিকের কর্ণগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং কি শর্তে তারা পরস্পর লম্ব হবে?

48. যদি মূলবিন্দু থেকে কোন সরলরেখার উপর লম্ব p হয় এবং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের a ও b অংশ ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

49. $y-x=6$ ও $x+y=8$ রেখা দ্বারা সূচিত দুটি রাস্তা A বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। উভয় রাস্তা থেকে 100 ফুট দূরে একটি বাংলো তৈরি করা হবে। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে বাড়ীটির সম্ভাব্য অবস্থান নির্ণয় কর। [Rurhki '50]

50. মূলবিন্দু থেকে $x \sec\theta - y \operatorname{cosec}\theta = a$ এবং $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় যথাক্রমে p ও p' হলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p'^2 = a^2$ [A. U. '45]

51. দেখাও যে $y=0$, $\sqrt{3}y + x - 10 = 0$, $y = \sqrt{3}$ ও $\sqrt{3}y - x = 0$ রেখাগুলি একটি ট্রাপিজিয়ম উৎপন্ন করে। শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক এবং ট্রাপিজিয়মটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

52. যে চতুর্ভুজের বাহুগুলির সমীকরণ $x=a$, $x=a'$, $y=b$ ও $y=b'$ হলে উহার কর্ণগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '51]

53. P(2, 3) ও Q(1, 4) বিন্দুদ্বয় $5x - 4y + 9 = 0$ রেখার একই দিকে কিংবা বিপরীত দিকে স্থির কর।

54. P বিন্দু থেকে $x + y - 5 = 0$ ও $3x - 2y + 7 = 0$ রেখাদ্বয়ের উপর লম্ব দূরত্বের সমষ্টি সর্বদা 10 ; প্রমাণ কর যে, P অবশ্যই একটি সরলরেখায় চলাচল করে। [C. U. '50]

55. $x\cos\theta + y\sin\theta = p_1$ ও $x\cos\phi + y\sin\phi = p_2$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

56. $y = mx + c_1$ ও $y = mx + c_2$ সমান্তরাল সরলরেখারদ্বয়ের পারস্পরিক দূরত্ব নির্ণয় কর।

57. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ রেখা থেকে x-অক্ষের কোন্ বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব a ? [C. U. '51]

58. (3, −2) বিন্দু থেকে $lx + my + n = 0$ রেখার উপর লম্ব-দূরত্ব সর্বদা 5 একক হওয়ার শর্ত নির্ণয় কর। [C. U. '56]

59. দেখাও যে, $7x - 9y + 10 = 0$ রেখার যে কোন বিন্দু থেকে $3x + 4y = 5$ ও $12x + 5y = 7$ রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান। [C. U. '52]

60. $(2a, 2a)$ বিন্দু থেকে $(0, a)$ বিন্দুগামী দুটি সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব a ; সরলরেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর। ঐ পাদবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমীকরণটিও নির্ণয় কর। [C. U. '53, Rajputana '41]

61. (4, 5) বিন্দুগামী এবং $3x = 4y + 7$ ও $5y = 12x + 6$ রেখাদ্বয়ের সঙ্গে সমান কোণে নত সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Rurbki '49]

62. $y = 1$, $3x - 4y = 5$ ও $5x + 12y + 13 = 0$ রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের অন্তর্কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

63. $x\cos\alpha - y\sin\alpha - p = 0$ রেখা অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে ; ছেদিতাংশের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর ; p এর মান সর্বদা সমান। [A. U. '41]

4
চতুর্থ অধ্যায়
বৃত্ত (The Circle)

4.1. বৃত্তের সংজ্ঞা (Definition of Circle)

কোনও সমতলে চলমান কোন বিন্দু ঐ সমতলের অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে যদি সর্বদা সমান দূরে থাকে তবে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **বৃত্ত** বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (centre) এবং ঐ নির্দিষ্ট দূরত্বকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** (radius) বলে।

সঠিকভাবে বলতে গেলে, সঞ্চারপথটি বৃত্ত নয়, বৃত্তের **পরিধি** (circumference)। পরিধি দ্বারা বৃত্তটি আবদ্ধ।

4.2. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (To find the equation of a circle)

I. কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে ; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

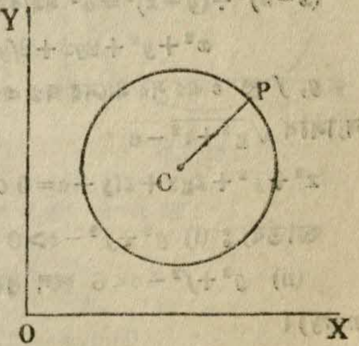
মনে কর, বৃত্তের কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক (h, k) এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= a$

বৃত্তের পরিধির উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ নাও।

$\therefore \quad CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$

কিন্তু $CP = a$, বৃত্তের ব্যাসার্ধ ;

$\therefore \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ হল নির্ণেয় সমীকরণ।



চিত্র 24

II. বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু (0, 0) ও ব্যাসার্ধ a হলে ঐ বৃত্তের সমীকরণ হল :

$$x^2 + y^2 = a^2$$

দ্রষ্টব্য :

(i) মূলবিন্দু O বৃত্তের পরিধিস্থ হলে $h^2 + k^2 = a^2$ হবে

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$

(ii) মূলবিন্দু পরিধিস্থ নয়। কিন্তু কেন্দ্র y-অক্ষের উপর। $\therefore \quad h = 0$ এবং বৃত্তের সমীকরণ হল $x^2 + (y-k)^2 = a^2$

(iii) মূলবিন্দু বৃত্তস্থ না হলে এবং কেন্দ্র x অক্ষের উপরে হলে $k=0$. তখন সমীকরণটি $(x-h)^2+y^2=a^2$ হবে।

(iv) মূলবিন্দু পরিধিস্থ এবং বৃত্তের ব্যাস x-অক্ষে সমাপতিত হলে, $k=0$ ও $a=h$. সুতরাং সমীকরণটি হবে $x^2+y^2-2hx=0$.

(v) বৃত্তটি অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করলে $h=k=a$. অতএব বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ বা, $x^2+y^2-2ax-2ay-a^2=0$

4.3. (a) বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ (The general equation of the circle)

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সর্বদাই কোন বৃত্তের সমীকরণ।

প্রমাণ: উপরের সমীকরণকে নিচের মতো করে লেখা যায়।

$$(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

বা, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ সমীকরণের সঙ্গে তুলনা করলে দেখা যায় যে,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সমীকরণটি

g, f ও c এর সব মানের জন্য একটি বৃত্তের সমীকরণ যার **কেন্দ্র** $(-g, -f)$ ও **ব্যাসার্ধ** $\sqrt{g^2+f^2-c}$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ কে বৃত্তের **সাধারণ সমীকরণ** বলা হয়।

জ্ঞাতব্য: (i) $g^2+f^2-c>0$ হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ অর্থাৎ বৃত্তটি বাস্তব (real)।

(ii) $g^2+f^2-c<0$ হলে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ অর্থাৎ বৃত্তটি কাল্পনিক (imaginary)।

(iii) $g^2+f^2-c=0$ হলে ব্যাসার্ধ শূন্য অর্থাৎ বৃত্তটি একটি **বিন্দু-বৃত্ত** (point-circle)।

(iv) সমীকরণে তিনটি নিরপেক্ষ ধ্রুব পদ থাকায় বোঝা যায় যে, তিনটি নিরপেক্ষ জ্যামিতিক শর্ত দ্বারা একটি বৃত্ত সিদ্ধ; যেমন তিনটি প্রদত্ত বিন্দুর মধ্য দিয়ে একটি বৃত্ত আঁকা যায়।

(b) সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$-র বৃত্তের সমীকরণ হওয়ার প্রয়োজনীয় শর্ত

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

বা, $x^2+\frac{2h}{a}xy+\frac{b}{a}y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$

অতএব যদি $a=b$ এবং $h=0$ হয়

তবে $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ একটি বৃত্তের সমীকরণ হবে এবং

কেন্দ্র $\left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}$.

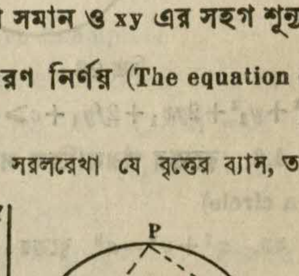
অতএব নির্ণেয় শর্ত হল : x^2 ও y^2 এর সহগ সমান ও xy এর সহগ শূন্য।

4.4. প্রদত্ত ব্যাস দ্বারা বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় (The equation of a circle with given diameter)

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের ব্যাস, তার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

ধর, $A(x_1, y_1)$ ও ব্যাসের একপ্রান্ত বিন্দু ও $B(x_2, y_2)$ বিপরীত প্রান্তবিন্দু এবং $P(x, y)$ পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু।

AB, BP ও AP যুক্ত কর।



চিত্র 25

$\therefore$ AP রেখার নতি $=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

এবং, BP রেখার নতি $=\frac{y-y_2}{x-x_2}$

$\angle APB$ অর্ধবৃত্তস্থ বলে 90° ; সুতরাং AP ও BP পরস্পর লম্ব।

$\therefore$ নতিদ্বয়ের গুণফল $=\frac{y-y_1}{x-x_1}\times\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$

বা, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

4.5. বৃত্তের সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান (Position of a point with regard to a circle)

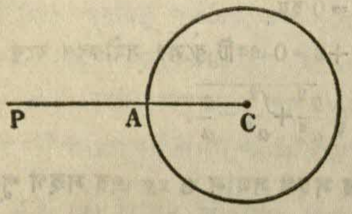
(x_1, y_1) বিন্দুটি $x^2+y^2-a^2=0$ বৃত্তের বাইরে উপরে কিংবা ভিতরে থাকবে তা নির্ভর করে $x_1^2+y_1^2-a^2 \gtrless 0$ হয় তার উপর।

মনে কর, $P(x_1, y_1)$ যে কোন একটি বিন্দু। বৃত্তের কেন্দ্র C (0, 0)

$\therefore PC^2=x_1^2+y_1^2$

∴ P বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে, উপরে কিংবা ভিতরে থাকবে :

যদি PC ≷ ব্যাসার্ধ, হয় অর্থাৎ $PC^2 \gtrless$ (ব্যাসার্ধ)^2 হয়



চিত্র 26

অর্থাৎ $x_1^2+y_1^2 \gtrless a^2$

অর্থাৎ $x_1^2+y_1^2-a^2 \gtrless 0$, হয়

অনুরূপভাবে, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হলে (x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে, উপরে কিংবা ভিতরে থাকবে তা নির্ভর করে $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \gtrless 0$ হয় তার উপর।

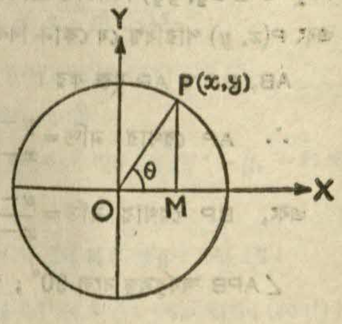
4.6. বৃত্তের পরমাত্রিক সমীকরণ (Parametric form of equation to a circle)

ধর, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $P(x, y)$ পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু। OP যোগ কর। OP রেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণে নত।

$$\therefore \quad x=OM=OP\cos\theta=a\cos\theta$$

$$y=PM=OP\sin\theta=a\sin\theta$$

θ-র মান $0\to 2\pi$-এ পরিবর্তিত হলে $P(a\cos\theta, a\sin\theta)$ বিন্দু ও পরিধির সম্ভাব্য সব অবস্থানেই থাকবে। বিপরীতপক্ষে, P-র যে কোন অবস্থানে θ-র একটি বাস্তব মান পাওয়া যাবে।



চিত্র 27

∴ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের পরমাত্রিক রূপ হল :

$$x=a\cos\theta, \quad y=a\sin\theta$$

θ-কে **চলক পরমাত্রা** (Variable Parameter) বলে।

অনুরূপভাবে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের পরমাত্রিক রূপ হল

$$x+g=\sqrt{g^2+f^2-c}\cos\theta, \qquad y+f=\sqrt{g^2+f^2-c}\sin\theta$$

4.7. সমরৈখিক নয় এমন তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ (Equation of the circle through three non-collinear points)

ধর, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ সমরৈখিক নয় এমন তিনটি বিন্দু। A, B, C বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

ধর, নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (i)

যেহেতু (i) নং সমীকরণের বৃত্তটি (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুগামী,

অতএব $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$ ... (ii)

$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$ .... (iii)

$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0$ ... (iv)

(ii), (iii) ও (iv) সমীকরণ সমাধান করলে g, f এবং c-র মান নির্ণীত হবে। ঐ মানগুলোকে (i) নং সমীকরণে বসালেই নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

4.8. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative Examples)

উদা 1. যে বৃত্তের কেন্দ্র (2, −3) এবং ব্যাসার্ধ 5 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(h, k) কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ a হলে, বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

এখানে $h=2, k=-3$ ও $a=5$ $\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=5^2$

$\therefore x^2+y^2-4x+6y-12=0$ নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. (0, 0), (0, 5) ও (−2, −1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Mysore '46]

ধর, বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

$\therefore$ বৃত্তটি (0, 0 , (0, 5) ও (−2, −1) বিন্দু দিয়ে যায়। অতএব (1) থেকে,

$c=0$ ... (1)

$25-10f+c=0$ ... (2)

$5-4g-2f+c=0$ ... (3)

(2), (3) ও (4) সমাধান করে $c=0, f=-\frac{5}{2}$ ও $g=\frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্ত $x^2+y^2+5x-5y=0$

উদা. 3. $x^2+y^2-6x+14y+33=0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[C. U. '51]

$x^2+y^2-6x+14y+33=0$

বা, $x^2-6x+9+y^2+14y+49=25$

বা, $(x-3)^2+(y+7)^2=5^2$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র (3, −7) ও ব্যাসার্ধ = 5

উদা. 4. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ ও $x^2+y^2-8x-4y-5=0$ বৃত্ত তিনটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে কেন্দ্রগুলি একটি সরলরেখায় অবস্থিত; ঐ রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের সমীকরণ হলে, উহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ হয়।

$\therefore$ পর্যবেক্ষণ দ্বারা এখানে কেন্দ্রগুলি যথাক্রমে $(1, -1)$, $(3, 1)$ ও $(4, 2)$ এবং ব্যাসার্ধগুলি যথাক্রমে $\sqrt{1+1+7}$ অর্থাৎ 3, $\sqrt{9+1+6}$ অর্থাৎ 4 এবং $\sqrt{16+4+5}$ অর্থাৎ 5।

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দু তিনটি সমরেখ হবার শর্ত :

$$x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=0\ ;$$

এখানে, আলোচ্য বিন্দু তিনটি $(1, -1)$, $(3, 1)$ ও $(4, 2)$;

এক্ষণে, $1.1-3.(-1)+3.2-4.1+4.(-1)-1.2$

$=1+3+6-4-4-2=10-10=0$; $\therefore$ **কেন্দ্রত্রয় সমরেখ।**

ধর, সরলরেখাটির সমীকরণ $y=mx+c$

যেহেতু রেখাটি $(1, -1)$ ও $(3, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়

$$\therefore\ \left.\begin{aligned} -1&=m+c \\ \text{এবং}\ 1&=3m+c \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণদ্বয় সমাধান করে $m=1$, $c=-2$;

$\therefore$ $y=x-2$ **নির্ণেয় সমীকরণ।**

উদা. 5. যে বৃত্তটি $(1, -2)$ ও $(4, -3)$ বিন্দুদ্বয়গামী এবং যার কেন্দ্র $3x+4y=7$ রেখার উপর অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

যেহেতু বৃত্তটি $(1, -2)$ ও $(4, -3)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে যায়

$\therefore$ $5+2g+4f+c=0$ ... (i)

এবং $25+8g-6f+c=0$ ... (ii)

আবার যেহেতু বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$ $3x+4y=7$ রেখার উপর অবস্থিত

$\therefore$ $-3g-4f=7$ ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) সমাধান করে $g=-\frac{47}{15}$ $f=\frac{3}{5}$ এবং $c=\frac{11}{3}$

$\therefore$ $x^2+y^2-\frac{94}{15}x+\frac{6}{5}y+\frac{11}{3}=0$

বা, $15x^2+15y^2-94x+18y+55=0$. **উদ্দিষ্ট সমীকরণ।**

উদা. 6. যে বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে 3 ও 4 একক ছেদ করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Gowalior '43]

ধর, x অক্ষে 3 একক ও y অক্ষে 4 একক ছেদ করে। সুতরাং x ও y অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে বৃত্তটি ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 0)$ ও $(0, 4)$

ধর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ··· (i)

যেহেতু বৃত্তটি (0, 0), (3, 0) ও (0, 4) বিন্দু দিয়ে যায়, অতএব (i) থেকে

$$\left.\begin{array}{r} c=0 \\ 9+6g=0 \\ 16+8f=0 \end{array}\right\}$$

∴ সমাধান করে, $c=0,\ g=-\frac{3}{2},\ f=-2$

∴ **নির্ণেয় সমীকরণ $x^2+y^2-3x-4y=0$**

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+8x-4y+15=0$ এবং $x^2+y^2-8x-12y+7=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?

প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $(-4, 2)$;

" " ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(-4)^2+(2)^2-15}=\sqrt{5}$

দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $=(4, 6)$;

" " ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(4)^2+(6)^2-7}=3\sqrt{5}$

কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $=\sqrt{(4+4)^2+(6-2)^2}$

$=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$

ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি $=\sqrt{5}+3\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

∴ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি

অতএব বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে **বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।**

স্পর্শবিন্দু $(-4, 2)$ এবং $(4, 6)$ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে $\sqrt{5} : 3\sqrt{5}$ বা $1 : 3$-তে অন্তর্বিভক্ত করছে। কাজেই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β) হলে

$$\alpha=\frac{1.4+3(-4)}{1+3}=-2;\quad \beta=\frac{1.6+3.2}{1+3}=3$$

∴ $(-2, 3)$ **হল স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক।**

উদা. 8. $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা কোন বৃত্তের ব্যাস হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '70]

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা ব্যাস হলে বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

এখানে $x_1=3,\ y_1=7;\ x_2=9,\ y_2=1$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ : $(x-3)(x-9)+(y-7)(y-1)=0$

বা, $x^2+y^2-12x-8y+34=0$

উদা. 9. ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য a ; AB ও AD কে দুটি অক্ষ ধরে প্রমাণ কর যে, ঐ বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a(x+y)$. [C. U. '51]

বর্গের পরিবৃত্তের ব্যাস $=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$ একক

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(0, 0)$ $\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(a, a)$

$\therefore$ AC এর মধ্যবিন্দু O-র (কেন্দ্রের) স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

$\therefore$ ABCD বর্গের পরিবৃত্তের কেন্দ্র $=\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ ও ব্যাসার্ধ $=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{a}{\sqrt{2}}$ একক

$$\therefore \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\text{বা, } x^2+y^2-ax-ay+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$$

$\therefore$ **$x^2+y^2=a(x+y)$ হল নির্ণেয় সমীকরণ।**

উদা. 10. (i) (3, 2) বিন্দুগামী যে বৃত্তটি $x^2+y^2-3x+4y+6=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক তার সমীকরণ কি হবে ?

(ii) $\sqrt{\frac{5}{4}}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও $2x^2+2y^2+5x-6y+2=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমকেন্দ্রিক বৃত্তের $(-g, -f)$ বা (g, f)-র মান সমান। অতএব,

(i) $x^2+y^2-3x+4y+5=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2-3x+4y+c=0.$$

যেহেতু, বৃত্তটি (3, 2) বিন্দুগামী,

$$\therefore 3^2+2^2-3.3+4.2+c=0 \quad \therefore c=-12$$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ : $\mathbf{x^2+y^2-3x+4y-12=0.}$

(ii) $2x^2+2y^2+5x-6y+2=0$ বৃত্তের সমীকরণটিকে নিম্নোক্ত রূপে পরিবর্তিত করা যায় :

$$x^2+y^2+\tfrac{5}{2}x-3y+1=0 \ldots\ldots \text{(i)}$$

$x^2+y^2+\frac{5}{2}x-3y+1=0$ বৃত্তের সমকেন্দ্রিক বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2+\tfrac{5}{2}x-3y+c=0 \ldots\ldots \text{(ii)}$$

এর $g=\frac{5}{4}$, $f=-\frac{3}{2}$ $\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{(\frac{5}{4})^2+(-\frac{3}{2})^2-c}$

$$\therefore \text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{\sqrt{5}}{4}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-c}$$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে ও পক্ষান্তর করে, $c=\frac{25}{16}+\frac{9}{4}-\frac{5}{16}=\frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ : $x^2+y^2+\frac{5}{2}x-3y+\frac{7}{2}=0$

বা, $2x^2+2y^2+5x-6y+7=0$

উদা. 10. যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়কে (1, 0) ও (0, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\therefore$ বৃত্তটি (1, 0) ও (0, 1) বিন্দুতে অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে অর্থাৎ x-অক্ষে ও y-অক্ষে এক একক ছেদ করে। $\therefore$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ=1 একক এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক=(1, 1)

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $(x-1)^2+(y-1)^2=(1)^2$

বা, $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

Exercise 4

1. বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রগুলি যথাক্রমে নীচে দেওয়া হল, বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) ব্যাসার্ধ=5 ; কেন্দ্র : (3, −4)

(ii) ব্যাসার্ধ=$\sqrt{10}$; কেন্দ্র (0, 3)

(iii) ব্যাসার্ধ=8 ; কেন্দ্র (6, 4)

(iv) ব্যাসার্ধ=$\sqrt{a^2-b^2}$; কেন্দ্র $(a\cos\phi, a\sin\phi)$.

2. নিম্নোক্ত বৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) কেন্দ্র (−1, −2) এবং বৃত্তটি (1, 3) বিন্দুগামী

(ii) কেন্দ্র (2, 3) এবং বৃত্তটি (5, 7) বিন্দুগামী [C. U. '37]

(iii) কেন্দ্র (1, −2) এবং বৃত্তটি $3x+y=14$ ও $2x+5y=18$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। [C. U. '45]

3. নীচের বৃত্তগুলির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(i) $x^2+y^2=1$ (ii) $(x+y)^2+(x-y)^2=10$

(iii) $x^2+y^2+2x+2y=0$ (iv) $x^2+y^2-2x-6y=6$

(v) $3x^2+3y^2+12x-6y+12=0$

(vi) $x^2+y^2-3x-4y=0$ (vii) $2x^2+2y^2-x-3y=0$

4. দেখাও যে, $x^2+y^2-2ax+2ay+a^2=0$ বৃত্তটি x ও y-অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [All. U. '44]

5. যে বৃত্ত $x=0$, $y=0$ ও $x=c$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Raj. U. '44]

6. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$ ও $x^2+y^2-4x-12y=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। [C. U.]

7. যে বৃত্ত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় (3, 1), (14, −1) ও (11, 5) দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Rurhki. U. '45]

8. (3, 4), (3, −6) ও (−1, 2) বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $x^2+y^2-2x-8y+12=0$, $x^2+y^2+2x+4y-4=0$, ও $x^2+y^2-4x-14y+17=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং তা থেকে কি সিদ্ধান্ত করা চলে লেখ।

10. দেখাও যে, $x^2+y^2-18x-6y+26=0$, $x^2+y^2+10x+8y+25=0$ ও $x^2+y^2-6x+5=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় সমরেখ।

11. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=1$ ও $x^2+y^2-12x+4y=1$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় সমরেখ ; ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '68]

12. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-6x+3=0$, $x^2+y^2+14x-8y+55=0$ ও $x^2+y^2-16x+4y+19=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. $y=x$, $y=2x$ ও $y=3x+2$ রেখাগুলিদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [All. U. '48]

14. $x+y=6$, $2x+y=4$ ও $x+2y=5$ রেখাগুলিদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [A. U. '45]

15. যে বৃত্ত নীচের বিন্দুগুলি দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) (2, −1), (2, 3) ও (4, −1)

(ii) (0, 0), (a, 0) ও (0, b) (iii) (1, 2), (3, −4) ও (5, −6)

16. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে p ও q অংশ ছেদ করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. যে বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে, (0, 1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং y-অক্ষ থেকে 8 একক ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [N. U. '45]

18. যে বৃত্তের (4, 3) ও (−2, 5) বিন্দুদ্বয়গামী এবং কেন্দ্র $2x-3y=4$ রেখায় অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

19. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং যা $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ রেখাকে y-অক্ষে ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '40]

20. যে বৃত্ত (−3, −6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

21. (1, −1) ও (−5, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা বৃত্তের ব্যাস হলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় (0, 1), (−2, 0) ও (1, 0); প্রথম পাদে ত্রিভুজের যে বাহুটি থাকে সেটি বৃত্তের ব্যাস হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

23. (−1, 5) ও (−7, 5) বিন্দুদ্বয়গামী এবং $3x+4y=17$ রেখাকে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Raj. U. '50]

24. কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, 0) ও (7, −1) হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ali. U. '39]

25. দেখাও যে, (2, −1), (3, 2) ও (3, 8) বিন্দুত্রয় যুক্ত করলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তা সম্পূর্ণরূপে একটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত।

26. যদি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তের একটি জ্যা-র সমীকরণ $y=2x$ হয়, তাহলে ঐ জ্যা-কে ব্যাস ধরলে বৃত্তটির সমীকরণ কি হবে? [Alla. U. '48]

27. প্রমাণ কর যে, (2, 0), (5, −3), (2, −6) ও (−1, −3) বিন্দুগুলি বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়ের 6 ও 8 একক ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে $3x+4y=12$ রেখার ছেদ বিন্দু-দুটি দিয়েও যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের দুটি বিন্দুর দূরত্ব 2 একক, ঐ দুই বিন্দুগামী এবং 5-একক ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '52]

31. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে, $x^2+y^2-2ax+2ay+a^2=0$ বৃত্তটি x ও y-অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করে এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [All. U. '44]

5. যে বৃত্ত $x=0$, $y=0$ ও $x=c$ রেখাত্রয়কে স্পর্শ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Raj. U. '44]

6. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$ ও $x^2+y^2-4x-12y=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রগুলি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত। [C. U.]

7. যে বৃত্ত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $(3, 1)$, $(14, -1)$ ও $(11, 5)$ দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [Rurhki. U. '45]

8. $(3, 4)$, $(3, -6)$ ও $(-1, 2)$ বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $x^2+y^2-2x-8y+12=0$, $x^2+y^2+2x+4y-4=0$, ও $x^2+y^2-4x-14y+17=0$ বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং তা থেকে কি সিদ্ধান্ত করা চলে লেখ।

10. দেখাও যে, $x^2+y^2-18x-6y+26=0$, $x^2+y^2+10x+8y+25=0$ ও $x^2+y^2-6x+5=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় সমরেখ।

11. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=1$ ও $x^2+y^2-12x+4y=1$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় সমরেখ ; ঐ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '68]

12. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-6x+3=0$, $x^2+y^2+14x-8y+55=0$ ও $x^2+y^2-16x+4y+19=0$ বৃত্তগুলির কেন্দ্রত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং ঐ সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. $y=x$, $y=2x$ ও $y=3x+2$ রেখাগুলিদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [All. U. '48]

14. $x+y=6$, $2x+y=4$ ও $x+2y=5$ রেখাগুলিদ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [A. U. '45]

15. যে বৃত্ত নীচের বিন্দুগুলি দিয়ে যায় তার সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $(2, -1)$, $(2, 3)$ ও $(4, -1)$

(ii) $(0, 0)$, $(a, 0)$ ও $(0, b)$ (iii) $(1, 2)$, $(3, -4)$ ও $(5, -6)$

16. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং উভয় অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে p ও q অংশ ছেদ করে, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. যে বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে, $(0, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং y-অক্ষ থেকে 8 একক ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [N. U. '45]

18. যে বৃত্তের (4, 3) ও (−2, 5) বিন্দুদ্বয়গামী এবং কেন্দ্র $2x-3y=4$ রেখায় অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

19. যে বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং যা $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ রেখাকে y-অক্ষে ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '40]

20. যে বৃত্ত (−3, −6) বিন্দু দিয়ে যায় এবং উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে, তার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

21. (1, −1) ও (−5, 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা বৃত্তের ব্যাস হলে, বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

22. একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় (0, 1), (−2, 0) ও (1, 0); প্রথম পাদে ত্রিভুজের যে বাহুটি থাকে সেটি বৃত্তের ব্যাস হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '50]

23. (−1, 5) ও (−7, 5) বিন্দুদ্বয়গামী এবং $3x+4y=17$ রেখাকে স্পর্শকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Raj. U. '50]

24. কোন বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (3, 0) ও (7, −1) হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [Ali. U. '39]

25. দেখাও যে, (2, −1), (3, 2) ও (3, 8) বিন্দুত্রয় যুক্ত করলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয় তা সম্পূর্ণরূপে একটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত।

26. যদি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তের একটি জ্যা-র সমীকরণ $y=2x$ হয়, তাহলে ঐ জ্যা-কে ব্যাস ধরলে বৃত্তটির সমীকরণ কি হবে? [Alla. U. '48]

27. প্রমাণ কর যে, (2, 0), (5, −3), (2, −6) ও (−1, −3) বিন্দুগুলি বৃত্তস্থ এবং ঐ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়ের 6 ও 8 একক ছেদ করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. যে বৃত্ত মূলবিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সঙ্গে $3x+4y=12$ রেখার ছেদ বিন্দু-দুটি দিয়েও যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. মূলবিন্দু থেকে x-অক্ষের দুটি বিন্দুর দূরত্ব 2 একক, ঐ দুই বিন্দুগামী এবং 5-একক ব্যাসার্ধযুক্ত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '52]

31. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

32. কোন বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং বৃত্তটি $3x-2y-1=0$ ও $4x+y-27=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. '47]

33. $y+3x+5$ এবং $x+y+1=0$ একটি বৃত্তের দুটি ব্যাসের সমীকরণ। বৃত্তটি $3x=4y$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে। বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [H. S. '74]

34. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2+2ax+c=0$ এবং $x^2+y^2+2by+c=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পর স্পর্শ করলে $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ হবে। [H. S. '71]

35. দেখাও যে, $x^2+y^2-4x+6y-77=0$ এবং $x^2+y^2-10x+8y+1=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

36. দেখাও যে, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যার সমীকরণ $(x-x_1)(x_1+x_2)+(y-y_1)(y_1+y_2)=0$.

5.1. কনিকের জ্যামিতিক সংজ্ঞা (Geometric definition of Conics)

যদি কোন সমতলে একটি বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে, ঐ সমতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে চলমান বিন্দুটির দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদা ধ্রুবক, তবে চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **কনিকচ্ছেদ** বা **কনিক** বলে।

ধ্রুবকটিকে সঞ্চারপথের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity), নির্দিষ্ট বিন্দুকে সঞ্চারপথের **নাভি** (Focus) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাটিকে সঞ্চারপথের **নিয়ামক** (Directrix) বলা হয়। নাভিবিন্দুগামী ও নিয়ামকের উপর লম্ব-সরলরেখাকে **অক্ষ** (Axis) বলে। অক্ষ সঞ্চারপথকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

5.2. কনিকের শ্রেণীবিভাগ (Classifiation of Conics)

উৎকেন্দ্রতার মান অনুযায়ী কনিক তিন প্রকার :

যখন উৎকেন্দ্রতা $e=1$, তখন কনিককে **অধিবৃত্ত** (Parabola) বলে।
" " $e<1$, তখন " **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।
" " $e>1$, তখন " **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) বলে।

5.3. অধিবৃত্ত (Parabola)

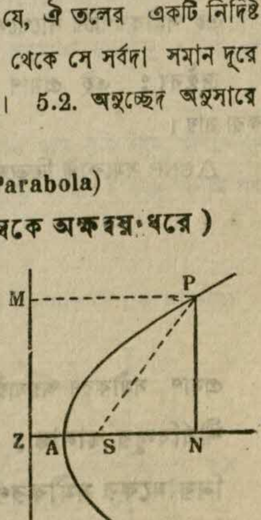
কোন সমতলে যখন কোন বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে, ঐ তলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (বা নাভি) ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (বা নিয়ামক) থেকে সে সর্বদা সমান দূরে থাকে, তখন ঐ গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথকে **অধিবৃত্ত** বলে। 5.2. অনুচ্ছেদ অনুসারে অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $e=1$.

5.4. অধিবৃত্তের সমীকরণ (Equation to a Parabola)

(নিয়ামক ও নিয়ামকের উপর নাভিগামী লম্বকে অক্ষদ্বয় ধরে)

ধর, নাভি S, নিয়ামক MZ ; নাভি থেকে MZ-এর উপর SZ লম্ব টান। A বিন্দুতে SZ-কে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

ধর, AS = AZ = a, তাহলে A শীর্ষবিন্দু এবং ZAN অধিবৃত্তের অক্ষ।



চিত্র 28

অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু P(x, y) নাও, SP যুক্ত কর এবং অধিবৃত্তের অক্ষের উপর PN ও MZ-র উপর PM লম্ব টান।

অতএব, সংজ্ঞা অনুযায়ী, SP = PM = ZN = x

এবং $PN = y$; $SN = ZN - ZS = x - 2a$.

$\triangle SNP$ সমকোণী ত্রিভুজের $PN^2 = SP^2 - SN^2 \quad \therefore \quad y^2 = x^2 - (x-2a)^2$

বা, $y^2 = 4ax - 4a^2$ $\qquad \therefore \quad y^2 = 4a(x-a)$ নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : উপরের সমীকরণ অনুযায়ী, নীচের বিষয়গুলি মনে রাখবে :

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(a, 0)$ **নাভির স্থানাঙ্ক :** $(2a, 0)$

নিয়ামকের সমীকরণ : $x = 0$ **অক্ষের সমীকরণ :** $y = 0$

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $x = a$

5.5. (i) **অধিবৃত্তের প্রমাণ সমীকরণ** (Standard. Equation)

মূলবিন্দুকে **শীর্ষবিন্দু A(a, 0)-তে স্থানান্তরিত করলে** এবং অক্ষদ্বয় পূর্ব-অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল রাখা হলে উপরের সমীকরণটি মূলবিন্দুর স্থানান্তরণের নিয়ম অনুযায়ী দাঁড়ায়,

$$(y+0)^2 = 4a\{(x+a) - a\}$$

$$\text{বা,} \quad y^2 = 4ax.$$

একে অধিবৃত্তের **প্রমাণ সমীকরণ** বলে।

এই সমীকরণটির সাপেক্ষে আমরা অধিবৃত্তের বিভিন্ন ধর্মগুলি আলোচনা করব।

দ্রষ্টব্য : এই প্রমাণ সমীকরণটি অধিবৃত্তের সংজ্ঞা থেকে সরাসরি-ও নির্ণয় করা যায়।

$\triangle SNP$ সমকোণী ত্রিভুজের $PN^2 = SP^2 - SN^2 = PM^2 - SN^2$

$$= ZN^2 - SN^2 = (AN + AZ)^2 - (AN - AS)^2$$

$$= (AN + AS)^2 - (AN - AS)^2$$

$$= 2AN.2AS = 4AS.AN.$$

$$\therefore \quad y^2 = 4ax$$

প্রমাণ সমীকরণ অনুযায়ী :

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$ **নাভির স্থানাঙ্ক :** $(a, 0)$

নিয়ামকের সমীকরণ : $x = -a \quad \therefore \quad x + a = 0$

অক্ষের সমীকরণ : $y = 0$; **শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :** $x = 0$

(ii) **নাভিকে মূলবিন্দু ও অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং x-অক্ষের উপর নাভিগামী লম্বকে y-অক্ষ** ধরা হলে,

$$SN=x,\ PN=y \text{ এবং } AN=SN+AS=x+a$$

$$\text{কিন্তু } PN^2=4AS.AN \quad \therefore \quad y^2=4a(x+a)$$

এই সমীকরণ অনুযায়ী :

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(-a, 0)$ **নাভির স্থানাঙ্ক** $=(0, 0)$

নিয়ামকের সমীকরণ : $x=-2a \therefore x+2a=0$

অক্ষের সমীকরণ : $y=0$;

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $x=-a$

5.6. অধিবৃত্তের বিশেষত্ব (Peculiarities of the parabola)

(i) x ঋণাত্মক হলে, $y^2=4ax$ থেকে y-এর মান কাল্পনিক হবে ; সুতরাং অধিবৃত্তের কোন অংশই y-অক্ষের বামপাশে থাকবে না।

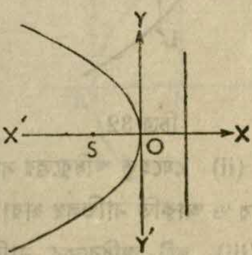
(ii) আবার, x এর প্রত্যেকটি ধনাত্মক মানের জন্য, y এর দুটি সমান কিন্তু বিপরীত মান পাওয়া যাবে ; সুতরাং অধিবৃত্ত x অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(iii) যদি $y=0, x=0$ হয়, অক্ষটি অধিবৃত্তকে শুধুমাত্র মূলবিন্দু A তে ছেদ করে।

(iv) x এর মান যত বৃদ্ধি পায়, y এর মানও তত বৃদ্ধি পায়, অর্থাৎ যখন $x\to\infty$ তখন $y\to\infty$; কাজেই অধিবৃত্ত বদ্ধরেখা নয়, y অক্ষের দক্ষিণে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত একটি **অবিচ্ছিন্ন রেখা** (Continuous curve)।

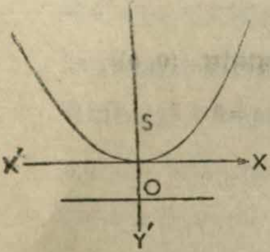
5.7. অধিবৃত্তের বিভিন্ন আকার (Different forms of parabola)

I. যদি নাভি $S=(-a, 0)$ হয় অর্থাৎ নিয়ামকের বামপাশে থাকে, তবে অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ ও শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে $y^2=-4ax,\ a>0$; অধিবৃত্ত x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত হবে।

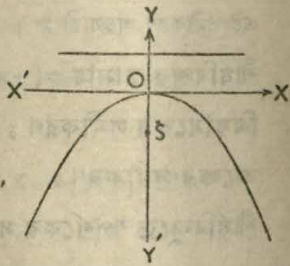


চিত্র 29

II & III. অধিবৃত্তের অক্ষকে y-অক্ষ, শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে $x^2 = 4ay, a > 0$; $x^2 = -4ay, a < 0$ অর্থাৎ অধিবৃত্ত যথাক্রমে y অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত হবে।



চিত্র 30

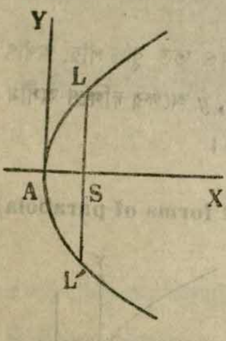


চিত্র 31

5.8. জ্যা, নাভিগামী জ্যা ও নাভিলম্ব (Chord, Focal chord & Latus rectum)

অধিবৃত্তের উপরে যে কোন দুই বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে অধিবৃত্তের **জ্যা** বলে। যে সব জ্যা অধিবৃত্তের নাভিগামী তাদের **নাভিগামী জ্যা** বলে।

অধিবৃত্তের যে নাভিগামী জ্যা অধিবৃত্তের অক্ষের উপর লম্ব তাকে অধিবৃত্তের **নাভিলম্ব** বলে।



চিত্র 32

পাশের চিত্রে নাভিলম্ব = LSL′

এখন LSL′ = 2 × LS = 2 × ($x = a$ বিন্দুতে কোটি)

$= 2 \times (\sqrt{4a.a}) = 4a$

($y^2 = 4ax$ সমীকরণে x এর সহগ)

সুতরাং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = 4a

দ্রষ্টব্য : (i) $y^2 = 4ax$ এর পরিবর্তে $y^2 = -4a(x \pm a)$ ব্যবহার করলেও নাভিলম্ব $= 4a$ হয়।

(ii) যেহেতু অধিবৃত্তের সমীকরণে একটিমাত্র ধ্রুবক, a, থাকে সুতরাং অধিবৃত্তের আকার ও আকৃতি নাভিলম্ব দ্বারা নির্ধারিত হয়।

(iii) দুটি অধিবৃত্তের নাভিলম্বদ্বয় পরস্পর সমান হলে অধিবৃত্ত দুটিকে পরস্পর সমান বলা হয়।

5.9. ফোকাস-দূরত্ব বা নাভি-দূরত্ব (Focal distance)

সংজ্ঞা : অধিবৃত্তের উপর কোন বিন্দু থেকে নাভি S-এর দূরত্বকে **ফোকাস দূরত্ব** বলে।

অধিবৃত্তের উপর কোন বিন্দু P(x, y) এর **ফোকাস দূরত্ব** হল,

$$SP = MP = ZN = ZA + AN = a + x.$$

5·10. প্রমাণ সমীকরণ $y^2 = 4ax$-এর সাপেক্ষে নিম্নোক্ত বিষয়গুলি অবশ্যই মনে রাখবে।

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক : (0, 0) **অক্ষের সমীকরণ :** $y=0$

নাভির স্থানাঙ্ক : (a, 0) **নাভি-লম্বের দৈর্ঘ্য :** 4a

নিয়ামকের সমীকরণ : $x=-a$ $\therefore$ $x+a=0$.

(x, y) **বিন্দুর ফোকাস দূরত্ব :** $a+x$

শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $x=0$

5.11. অধিবৃত্তের পরমাত্রিক সমীকরণ (Parametric equation)

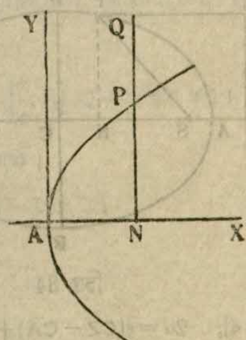
যদি $x=at^2$ এবং $y=2at$ হয় তা হলে স্পষ্টত t-র যে কোন মানের জন্য $y^2=4ax$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কাজেই $x=at^2$ এবং $y=2at$ বিন্দুটি সর্বদাই অধিবৃত্তের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। এজন্য,

$$\left.\begin{array}{l} x=at^2 \\ y=2at \end{array}\right\}$$

সমীকরণদ্বয়কে অধিবৃত্তের **পরমাত্রিক সমীকরণ** বলে। এখানে t হল **চলক পরমাত্রা** (Variable parameter)।

5·12. অধিবৃত্তের সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান (Position of a point relative to a parabola)

ধর Q (x_1, y_1) আলোচ্য বিন্দু। X অক্ষের উপর QN লম্ব টান। QN অধিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র 33

মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$.

$\therefore$ Q ও P বিন্দুদ্বয়ের x-স্থানাঙ্ক একই ;

$\because$ P অধিবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু,

$\therefore$ $PN^2=4ax$

এক্ষণে, যদি $QN^2 > PN^2$ হয়, Q বিন্দুটি অধিবৃত্তের **বাইরে** থাকবে,

যদি $QN^2 < PN^2$ হয়, Q বিন্দুটি অধিবৃত্তের **ভিতরে** থাকবে,

যদি $QN^2 = PN^2$ হয়, Q বিন্দুটি অধিবৃত্তের **উপরে** থাকবে।

সুতরাং বিন্দুটি অধিবৃত্তের বাইরে, উপরে অথবা ভিতরে থাকবে যদি $y_1^2 >$ বা $< 4ax$ হয়।

উপবৃত্ত

(Ellipse)

5.13. যদি কোন সমতলে একটি বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে, ঐ সমতলস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (ফোকাস বা নাভি) এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (নিয়ামক) থেকে চলমান বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদা সমান এবং 1-এর চেয়ে কম হয় তাহলে ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** বলে।

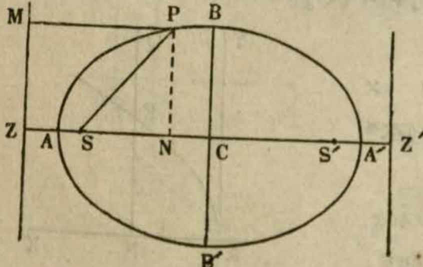
ঐ ধ্রুব অনুপাতকে উৎকেন্দ্রতা (eccentricity) e বলে ; উপবৃত্তের ক্ষেত্রে $e<1$. অর্থাৎ যে কনিকের উৎকেন্দ্রতা 1-র চেয়ে কম তাকে **উপবৃত্ত** বলে।

5·14. উপবৃত্তের সমীকরণ (Equation to an Ellipse)

(নিয়ামক ও নাভি থেকে নিয়ামকের উপর লম্বকে অক্ষদ্বয় ধরে)

ধর S নাভি, MZ নিয়ামক এবং e উৎকেন্দ্রতা; S থেকে MZ-এর উপর SZ লম্ব টান এবং SZকে A ও A′ বিন্দুতে $e : 1$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর।

$$\therefore \quad \frac{SA}{AZ} = \frac{SA'}{A'Z} = e \quad \cdots \quad (1)$$



চিত্র 34

সুতরাং সংজ্ঞা অনুযায়ী, A ও A′ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত।

মনে কর, AA′-এর মধ্যবিন্দু C এবং $AA' = 2a$;

সুতরাং $CA = CA' = a$.

(1) নং সমীকরণ থেকে

$SA + SA' = e(AZ + A'Z)$

বা, $2a = e(CZ - CA) + e(CZ + CA)$

$= 2e.CZ \quad \therefore \quad CZ = \frac{a}{e}$

আবার, $SA' - SA = e(A'Z - AZ)$

বা, $(CS + CA') - (CA - CS) = e.AA'$

বা, $2CS = 2e.CA \qquad \therefore \quad CS = ae,$

ধর, উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$।

SP যোগ কর এবং ZAS ও MZ-এর উপর যথাক্রমে PN, PM লম্ব টান।

$$\therefore \quad SP = e.PM = e.ZN = ex$$

$$SN = ZN - ZS = x - ZS$$

$$= x - (CZ - CS) = x - (a/e - ae)$$

$$= x - \frac{a}{e}(1 - e^2)$$

এবং $PN = y. \qquad \therefore \quad SN^2 + PN^2 = SP^2$ সম্বন্ধটি থেকে

$$\therefore \quad \left\{x - \frac{a}{e}(1 - e^2)\right\}^2 + y^2 = e^2x^2$$

বা, $x^2(1-e)^2 - \frac{2xa}{e}(1 - e^2) + y^2 = -\frac{a^2}{c^2}(1 - e^2)^2$

বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2x/e}{a} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = \frac{e^2 - 1}{e^2}$

উভয় পক্ষকে $a^2(1 - e^2)$ দ্বারা ভাগ করে

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a}/\mathbf{e})^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{a}^2(1 - \mathbf{e}^2)} = 1$$

$\therefore$ এই হল নির্ণেয় সমীকরণ।

5.15. উপবৃত্তের প্রমাণ সমীকরণ (Standard equation of an ellipse)

অক্ষদ্বয়কে সমান্তরাল রেখে মূলবিন্দুকে P বিন্দুতে $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ স্থানান্তরিত কর। অর্থাৎ CA' নতুন x অক্ষ এবং C বিন্দুতে CA'-র লম্বরেখা y-অক্ষ।

সুতরাং স্থানান্তরণ সূত্রানুসারে পূর্ব-অনুচ্ছেদের সমীকরণের রূপ :

$$\frac{(x - a/e + a/e)^2}{a^2} + \frac{(y + 0)^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

$$\text{বা,} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$$

ধর, যখন $x = 0$, $y = b$; $\qquad \therefore \quad \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2(1 - \mathbf{e}^2)$

অর্থাৎ $b = \pm a\sqrt{1-e^2}$, (এ থেকে বোঝা যায় যে, y-অক্ষ উপবৃত্তকে P বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে B ও B´ দুটি বিন্দুতে ছেদ করে)

$$\therefore \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

এই হল উপবৃত্তের **প্রমাণ সমীকরণ**। এই সমীকরণের সাপেক্ষে উপবৃত্তের ধর্ম আলোচনা করা হবে।

জ্ঞাতব্য : (i) C-কে মূলবিন্দু অর্থাৎ CA′Z′ ও YCY′-কে অক্ষ ধরে উপবৃত্তের সংজ্ঞা অনুযায়ীও প্রমাণ সমীকরণটি নিয় করা সম্ভব।

(ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}=\frac{(a+x)(a-x)}{a^2}$

বা, $\frac{PN^2}{b^2}=\frac{AN.A'N}{a^2}$; অর্থাৎ $\frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{BC^2}{AC^2}$.

(iii) $\therefore \ b^2=a^2(1-e^2) \ \therefore \ a^2e^2=a^2-b^2$

(iv) A ও A′ বিন্দুকে **শীর্ষবিন্দু** বলে; AA′কে **পরাক্ষ** (Major axis) বলে অর্থাৎ নাভি S থেকে MZ নিয়ামকের উপরে SZ লম্ব রেখাকে **পরাক্ষ রেখা** (Line of major axis) বলে।

পরাক্ষরেখা উপবৃত্তকে প্রথমে A বিন্দুতে ছেদ করে, Aকে **প্রথম শীর্ষবিন্দু** বলে। ZS-এর বর্ধিতাংশে A′ এমন একটি বিন্দু যাতে $\frac{SA'}{A'Z}=\frac{SA}{AZ}=e$ হয়। কাজেই A′ বিন্দুও উপবৃত্তের উপরিস্থিত, A′ বিন্দুকে **দ্বিতীয় শীর্ষবিন্দু** বলে।

AA′-এর মধ্যবিন্দু Cকে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে। BB′-কে **উপাক্ষ** (Minor axis) বলে।

(v) উপবৃত্তের **পরাক্ষের** দৈর্ঘ্য $= AA' = 2a$

এবং **উপাক্ষের দৈর্ঘ্য** $= BB' = 2b$

$\therefore$ CS $= ea$ $\quad \therefore$ **নাভি S-এর স্থানাঙ্ক** $= (ae, 0)$

যেহেতু নিয়ামক y-অক্ষের সমান্তরাল এবং CZ $= a/e$

$\therefore$ **নিয়ামকের সমীকরণ**, $x=a/e$ বা, $ex=a$

পরাক্ষরেখার উপর S′ **বিন্দুর স্থানাঙ্ক** $(-ae, 0)$,

S′-কে **দ্বিতীয় নাভি বলে**। এই বিন্দুর সাপেক্ষে আর একটি সরলরেখা M′Z′ পাওয়া যায়। তাকে **দ্বিতীয় নিয়ামক** বলে। দ্বিতীয় **নিয়ামকের সমীকরণ**

$x=-a/e$ বা, $ex=-a$ $\quad \therefore \ ex+a=0$

5.16. উপবৃত্তের বৈশিষ্ট্য (Peculiarities of an ellipse)

(i) উপবৃত্তের সমীকরণে x, y-এর বদলে যথাক্রমে $-x$, $-y$ বসালে সমীকরণটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং উপবৃত্ত পরাক্ষ ও উপাক্ষ **উভয়ের সাপেক্ষে প্রতিসম।**

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore$ x-এর মান a থেকে বড় বা $-a$ থেকে ছোট হলে y-এর মান কাল্পনিক হয়। অতএব x-এর সব চেয়ে বড় মান $+a$ ও সবচেয়ে ছোট মান $-a$;

আবার, $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$; $\therefore$ y-এর সবচেয়ে বড় মান $+b$ ও সবচেয়ে ছোট মান $-b$.

সুতরাং উপবৃত্ত হল $x = \pm a$ ও $y = \pm b$ রেখা দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র দ্বারা সীমাবদ্ধ বক্ররেখা।

দুটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের অনুপাত সমান হলে অর্থাৎ উভয়ের উৎকেন্দ্রতা e সমান হলে, উপবৃত্তদ্বয়কে সমান বলা হয়।

5.17. নাভিলম্ব (Latus rectum)

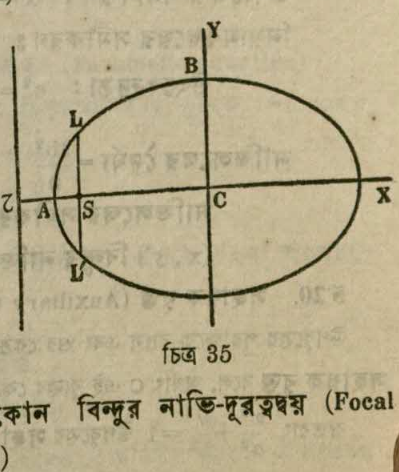
উপবৃত্তের যে নাভিগামী জ্যা পরাক্ষ রেখার উপর লম্ব তাকে **নাভিলম্ব** বলে। পাশের চিত্রে LSL′ নাভিলম্ব।

নাভিলম্ব = LL′ = 2SL = $2e$.ZS.

$= 2e(\text{CZ} - \text{CS})$

$= 2e\left(\frac{a}{e} - ae\right) = 2a(1 - e^2)$

$= \frac{2b^2}{a}$. [$\therefore$ $b^2 = a^2(1 - e^2)$]

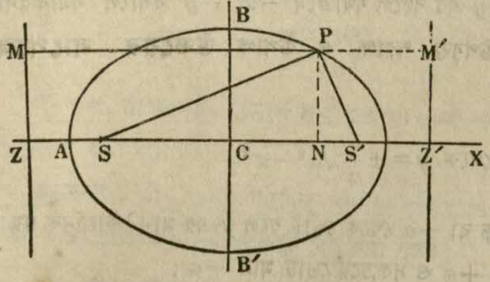


চিত্র 35

5.18. উপবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্বদ্বয় (Focal distances of a point on an ellipse)

ধর, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের উপরিস্থিত P(x', y') যে কোন বিন্দু ; S ও S′ নাভিদ্বয় এবং MZ ও M′Z′ নিয়ামকদ্বয়।

MZ ও M′Z′-এর উপর যথাক্রমে PM ও PM′ এবং P বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PN লম্ব টান।



চিত্র 36

উপবৃত্তের সংজ্ঞা অনুযায়ী,

$SP = e.PM = e.NZ$

$= e.CZ + e.CN$

$= a + ex'$

$S'P = e.PM' - e.NZ'$

$= e.CZ' - e.CN$

$= a - ex'$

∴ **নাভি-দূরত্বদ্বয়** $= SP + P'S = (a+ex') + (a-ex') = 2a$

= পরাক্ষের দৈর্ঘ্য।

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্তের এই জ্যামিতিক ধর্ম অনুযায়ী সাধারণতঃ উপবৃত্ত অঙ্কিত হয়।

5.19. প্রমাণ সমীকরণ অনুযায়ী নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখবে :

কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক : $(0, 0)$ **নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক :** $(\pm ae, 0)$

শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(\pm a, 0)$

পরাক্ষের সমীকরণ : $y = 0$ **পরাক্ষের দৈর্ঘ্য :** $2a$

উপাক্ষের সমীকরণ : $x = 0$ **উপাক্ষের দৈর্ঘ্য :** $2b$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = \pm a/e$

উৎকেন্দ্রতা : $e^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a}$ **নাভি দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি** $= 2a$.

নাভিলম্বের সমীকরণদ্বয় : $x = \pm ae$

(x', y') **বিন্দুর নাভি-দূরত্বদ্বয় :** $a \pm ex'$

5·20. সহায়ক বৃত্ত (Auxiliary Circle)

উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস এবং ওর কেন্দ্রকে কেন্দ্র ধরে অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ উপবৃত্তের **সহায়ক বৃত্ত** বলে, অর্থাৎ C এই বৃত্তের কেন্দ্র এবং AA′ ব্যাস।

সুতরাং $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের **সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ** $x^2 + y^2 = a^2$

উপবৃত্তের উপর কোন বিন্দুর ও তার সহায়ক বৃত্তের উপর কোন বিন্দুর কোটিদ্বয়ের অনুপাত উপবৃত্তের অর্ধ-উপাক্ষ ও অর্ধ-পরাক্ষের অনুপাতের সমান।

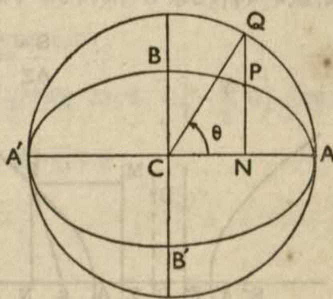
প্রমাণ : উপবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু P পরাক্ষের উপর PN লম্ব টান, অতএব P বিন্দুর কোটি = PN. এখন PN-কে উপরের দিকে বর্ধিত করায় 3টি সহায়ক বৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু Qতে ছেদ করল। অতএব Q বিন্দুর কোটি = QN.

বিন্দু দুটিকে **অনুরূপ বিন্দু** (Corresponding points) বলে। ∠QCA-কে P-বিন্দুর **উৎকেন্দ্রিক কোণ** (eccentric angle) বলা হয়।

পরাক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধ = AC ; উপাক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধ = BC

∵ P বিন্দুটি উপবৃত্তেরউপরস্থ

$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN.A'N} = \frac{BC^2}{AC^2} \quad \cdots \quad$ (i)



চিত্র 37

আবার, AA′ সহায়ক বৃত্তের ব্যাস ও Q পরিধিস্থ বিন্দু,

∴ ∠AQA′ = 1 সমকোণ

∴ QN, AA′-এর লম্ব

$\therefore \quad QN^2 = AN.A'N \quad \cdots \quad$ (ii)

∴ (i) ও (ii) থেকে $\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{BC^2}{AC^2}$

$\therefore \quad \frac{PN}{QN} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{অর্ধ-উপাক্ষ}}{\text{অর্ধ-পরাক্ষ}}$

5.21. উপবৃত্তের পরমাত্রিক সমীকরণ (Parametic equation)

পূর্ব অনুচ্ছেদ থেকে উপবৃত্তের যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)-কে $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ আকারেও প্রকাশ করা যায়। এজন্য,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণকে উপবৃত্তের **পরমাত্রিক সমীকরণ** বলে। এখানে θ হল **পরমাত্রা** এবং $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$।

পরাবৃত্ত

(Hyperbola)

5.22. যদি কোন সমতলে একটি বিন্দু এমনভাবে গতিশীল হয় যে, ঐ সমতলস্থ অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (ফোকাস বা নাভি) এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা (নিয়ামক) থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত সর্বদা সমান এবং ঐ অনুপাত 1-র চেয়ে বেশি, তা হলে ঐ বিন্দুর গতিপথকে **পরাবৃত্ত** বলে।

ঐ নির্দিষ্ট অনুপাতকে **উৎকেন্দ্রতা** e বলে পর বৃত্তের ক্ষেত্রে $e>1$.
অর্থাৎ যে কণিকের উৎকেন্দ্রতা এক অপেক্ষা বৃহত্তর তাকে **পরাবৃত্ত** বলে।

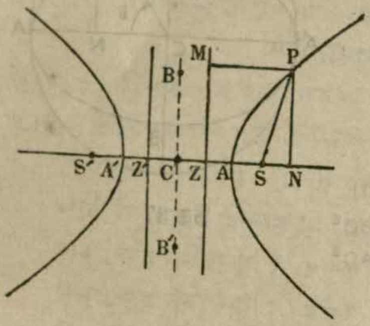
5·23. পরাবৃত্তের সমীকরণ (Equation to a hyperbola)

(নিয়ামক ও নাভি থেকে নিয়ামকের উপর লম্বকে অক্ষদ্বয় ধরে)

ধর, S নাভি ও MZ নিয়ামক এবং e উৎকেন্দ্রতা।

S থেকে MZ উপর SZ লম্ব টান এবং SZ কে A ও A′ বিন্দুতে $e : 1$ অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর।

$$\therefore \frac{SA}{AZ}=\frac{SA'}{A'Z}=e, \quad (e>1) \cdots \cdots (1^{\circ})$$



চিত্র 38

সুতরাং সংজ্ঞা অনুযায়ী, A ও A′ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত।

ধর, AA′ এর মধ্যবিন্দু C এবং $AA'=2a$; সুতরাং $CA=CA'=a$.

(1) নং থেকে পাই $SA+SA'$
$=e(AZ+A'Z)$

বা, $SA+(SA+AA')=e.AA'$

বা, $2(SA+CA)=e.2a$

বা, $CS=ea$

আবার, $SA'-SA=e(A'Z-AZ)$

বা, $(SA+AA')-SA+e\{(AA'-AZ)-AZ\}$

বা $AA'=e.(AA'-2AZ)$ বা, $2a=2e.(CA-AZ)$

বা, $a=e.CZ$ $\therefore CZ=\frac{a}{e}$

পরাবৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু $P(x, y)$ নাও। SP যোগ কর এবং ZAS ও MZ-এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব টান,

$$\therefore SP=e.PM=e.ZN=ex$$

$$SN=ZN-ZS=x-ZS=x-(CS-CZ)=x\left(ae-\frac{a}{e}\right).$$

এবং $PN=y$.

$$\therefore SN^2+PN^2=SP^2$$

$$\therefore \left\{x-\frac{a}{e}(e^2-1)\right\}^2+y^2=e^2x^2$$

বা, $x^2(1-e^2)-\frac{2xa}{e}(e^2-1)+y^2=-\frac{a^2}{e^2}(e^2-1)^2$

উভয় পক্ষকে $-a^2(e^2-1)$ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x/a}{e}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=\frac{e^2-1}{e^2}$$

বা, $\frac{(x+a/e)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$; এই হল নির্ণেয় সমীকরণ।

5·21. প্রমাণ সমীকরণ (Standard Equation)

অক্ষদ্বয়কে সমান্তরাল ভাবে পরিবর্তিত করে মূলবিন্দু Z-কে $C\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে উপরের সমীকরণটির পরিবর্তিত রূপ দাঁড়ায় :

$$\frac{\left(x+\frac{a}{e}-\frac{a}{e}\right)^2}{a^2}-\frac{(y+0)^2}{a^2(e^2-1)}=1$$

বা, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$

$\because$ এক্ষেত্রে $e>1$ $\quad\therefore$ $a^2(e^2-1)>0$ অর্থাৎ ধনাত্মক।

ধর, $b^2=a^2(e^2-1)$

সুতরাং, b বাস্তব এবং সমীকরণটি দাঁড়ায়,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$; এই হল পরাবৃত্তের **প্রমাণ সমীকরণ**।

পরাবৃত্তের ধর্ম আলোচনা করবার সময় প্রমাণ সমীকরণটিই ব্যবহার করা হয়।

জ্ঞাতব্য : (i) C-কে মূলবিন্দু অর্থাৎ CZS ও BCB′ কে অক্ষদ্বয় ধরে পরাবৃত্তের সংজ্ঞা অনুযায়ী প্রমাণ সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

(ii) $\because$ $b^2=a^2e^2-a^2$ $\quad\therefore$ $a^2e^2=a^2+b^2$

$\therefore$ $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$ এবং $CS^2=(ea)^2=a^2+b^2$

(iii) $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{x^2-a^2}{a^2}=\frac{(x-a)(x+a)}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore$ $\frac{PN^2}{b^2}=\frac{AN.A'N}{a^2}$ $\quad$ বা, $\frac{PN^2}{AN.A'N}$.

(iv) নাভিবিন্দুগামী ও নিয়ামের উপর লম্ব সরলরেখা পরাবৃত্তকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুকে পরাবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertices) বলে। চিত্রে A ও A' বিন্দুদ্বয় পরাবৃত্তের দুটি শীর্ষ এবং C বিন্দু ওর **কেন্দ্র** (Centre)।

x-অক্ষের এই AA' ছিন্ন অংশকে পরাবৃত্তের **তির্যক-অক্ষ** (Transverse axis) বলে, $AA'=2a$.

আবার, y-অক্ষের $2b$-এর সমান অংশকে **অনুবদ্ধ অক্ষ** (Conjugate axis) বলে, $BB'=2b$.

অক্ষ দুটি কেন্দ্র C-তে (এখানে মূলবিন্দুতে) সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

5 23 (a). পরাবৃত্তেরও দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

প্রমাণ ঃ SC রেখার বর্ধিতাংশের উপর S' ও Z' এমন দুটি বিন্দু নাও যেন $CS'=SC=ae$ ও $CZ'=ZC=\frac{a}{e}$ হয়।

AA' রেখার উপর Z'M' লম্ব টান, FMকে বর্ধিত করলে উহা Z'M'-কে M' বিন্দুতে ছেদ করল।

এখন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2$

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2$

বা, $(S'C+CN)^2+PN^2=e^2(DZ'+CN)^2$

বা, $S'N^2+PN^2=e^2Z'N^2$

বা, $S'P^2=e^2PM'^2 \quad \therefore \quad S'P=e.PM$

$\therefore$ $S'P=S'$ থেকে P বিন্দুর দূরত্ব ও $PM=Z'M'$ থেকে P বিন্দুর দূরত্ব,

সুতরাং একই পরাবৃত্তের শর্ত অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু S' ও অপর একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা দ্বারা সিদ্ধ হয়।

S' বিন্দুকে দ্বিতীয় নাভি এবং Z'M'-কে দ্বিতীয় নিয়ামক বলে। C-কে মূলবিন্দু ধরে দ্বিতীয় নাভি, S'-এর স্থানাঙ্ক, $(-ea, 0)$ ও দ্বিতীয় নিয়ামক, Z'M'-এর সমীকরণ,

$$x=-\frac{a}{e} \qquad \therefore \quad ex+a=0$$

দ্রষ্টব্য ঃ $\because \quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)$

সুতরাং প্রমাণ সমীকরণের বিবাত রাশি সর্বদা দুটি বাস্তব ও ভিন্ন উৎপাদকে প্রকাশ করা যায়।

5·25. পরাবৃত্তের বৈশিষ্ট্য (Peculiarities of the Curve)

(i) $\because \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ এবং $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$,

অতএব পরাবৃত্ত x ও y অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে প্রতিসম।

(ii) $\because \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \quad \therefore$ যদি $x < \pm a$ হয় অর্থাৎ x-এর যে কোন বাস্তব মানের ($\pm a$-এর থেকে ছোট) জন্য, y-এর মান কাল্পনিক। সুতরাং $x = +a$ এবং $x = -a$-এর মধ্যের কোন অংশে এই সঞ্চারপথের অস্তিত্ব সম্ভব নয়।

(iii) $\because \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$,

$\therefore$ y-এর বাস্তব মান যত বড়ই হোক না কেন (ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক), x-এর দুটি বাস্তব মান পাওয়া যায়। কাজেই পরাবৃত্ত দু'দিকেই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

5·26. নাভিলম্ব (Latus rectum)

নাভিগামী যে জ্যা তির্যক অক্ষকে লম্বভাবে ছেদ করে, তাকে নাভিলম্ব বলে।

পাশের চিত্রে, LSL′ হল নাভিলম্ব।

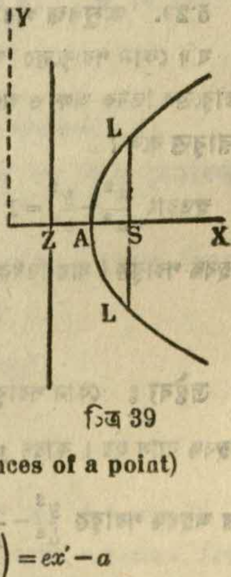
ধর, SL $= l$, সুতরাং L-এর স্থানাঙ্ক $= (ae, l)$

$$\therefore \quad \frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} = 1$$

বা, $$\frac{l^2}{b^2} = e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\therefore \quad l = \frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ নাভিলম্ব $=$ LSL′ $= 2l = \frac{2b^2}{a}$



চিত্র 39

5·27. কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব (Focal distances of a point)

ধর, পরাবৃত্তের উপর $P(x', y')$ যে কোন বিন্দু।

$$\therefore \quad SP = e.PM = e.NZ = e(CN - CZ) = e\left(x' - \frac{a}{e}\right) = ex' - a$$

$$S'P = e.PM' = e.NZ' = e(CN + CZ') = e\left(x' + \frac{a}{e}\right) = ex' + a.$$

$$\therefore \quad S'P - SP = ex' + a - (ex' - a) = 2a = AA'$$

পরাবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দুর নাভিদূরত্ব দুটির অন্তর ধ্রুবক এবং তির্যক অক্ষের সমান।

5·28. প্রমাণ সমীকরণ অনুযায়ী নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিবে।

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $=(0, 0)$ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm a, 0)$

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm ae, 0)$ তির্যক অক্ষের সমীকরণ $y=0$

অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ, $x=0$ তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য : $2a$

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য : $2b$

উৎকেন্দ্রতা, e : $e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\left(\frac{\text{অনুঃ অক্ষ}}{\text{তির্যক অক্ষ}}\right)^2$

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $x=\pm ae$;

(x', y') বিন্দুর নাভি দূরত্ব $=ex'\pm a$; নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}$

5·29. অনুবন্ধ পরাবৃত্ত (Conjugate hyperbola)

যদি কোন পরাবৃত্তের অনুবন্ধ অক্ষ BB′ ও তির্যক অক্ষ AA′ যথাক্রমে অন্য কোন পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধ অক্ষ হয়, তবে এই দুটি পরাবৃত্তকে পরস্পর অনুবন্ধ পরাবৃত্ত বলে।

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্ত (যার তির্যক অক্ষ AA′ ও অনুবন্ধ অক্ষ BB′)-এর অনুবন্ধ পরাবৃত্ত (যার তির্যক অক্ষ BB′ ও অনুবন্ধ অক্ষ AA′)-এর সমীকরণ,

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

দ্রষ্টব্য : কোন পরাবৃত্তের যে কোন দুটি অনুবন্ধ ব্যাস তার অনুবন্ধ পরাবৃত্তেরও অনুবন্ধ ব্যাস হয়। কারণ $y=mx$ ও $y=m'x$ রেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্ত ও এর অনুবন্ধ পরাবৃত্ত $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ উভয়েরই অনুবন্ধ ব্যাস হওয়ার শর্ত : $mm'=\frac{b^2}{a^2}$.

5·30. সম-পরাবৃত্ত (Rectangular or equilateral hyperbola)

কোন পরাবৃত্তের তির্যক অক্ষ ও অনুবন্ধ অক্ষ—উভয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে, সেই পরাবৃত্তকে সম-পরাবৃত্ত বলে।

সুতরাং $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের সমীকরণে $a=b$ বসালে, $x^2-y^2=a^2$, এই-ই হল সমপরাবৃত্তের সমীকরণ।

এর উৎকেন্দ্রতা, $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2a^2}{a^2}}=\sqrt{2}$

5.3'. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative Examples)

উদা. 1. যে অধিবৃত্তের নাভি $(1, -1)$ এবং নিয়ামক $x+y+7=0$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ক. বি.]

ধর, অধিবৃত্তের উপর $p(x, y)$ যে কোন বিন্দু। অধিবৃত্তের সংজ্ঞা অনুযায়ী, নাভি থেকে ঐ বিন্দুর দূরত্ব = ঐ বিন্দু থেকে নিয়ামকের লম্ব-দূরত্ব,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\frac{x+y+7}{\sqrt{2}}$$

সরল করে: $x^2-2xy+y^2-18x-10y-45=0$ নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. $3y^2=4x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং কোন্ বিন্দুতে এটি $2x=3y$ রেখার সঙ্গে মিলিত হয় স্থির কর। [ক. বি. 1935]

অধিবৃত্তের সমীকরণ, $3y^2=4x$; $\therefore\ y^2=\frac{4}{3}x$.

$\therefore$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{4}{3}$.

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}=a$ $\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $=(\frac{1}{3}, 0)$.

$3y^2=4x$ ও $2x=3y$ এই সমীকরণ দুটি সমাধান করে নির্ণেয় ছেদবিন্দু $(0, 0)$ ও $(3, 2)$.

উদা. 3. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিগামী কোন জ্যা-র প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $P(at_1^2, 2at_1)$ এবং $Q(at_2^2, 2at_2)$। দেখাও যে, $t_1t_2=-1$

PQ রেখার সমীকরণ, $y-2at_1=\frac{2at_1-2at_2}{at_1^2-at_2^2}(x-at_1^2)$

বা, $(t_1+t_2)y-2at_1(t_1+t_2)=2x-2at_1^2$

এটি অধিবৃত্তের নাভিগামী অর্থাৎ $(a, 0)$-গামী

$\therefore\ (t_1+t_2)\cdot 0-2at_1(t_1+t_2)=2a-2at_1^2$ বা, $t_1t_2=-1$.

উদা. 4. $2x=y^2+6y+5$. অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি ও নিয়ামক নির্ণয় কর। [এলাহাবাদ 1946]

$2x=y^2+6y+5$ বা, $y^2+6y+9=2x+4$

বা, $(y+3)^2=2(x+2)$ ... (1)

মূলবিন্দুকে $(-2, -3)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করলে সমীকরণ (1)

$Y^2 = 2X$ আকার পায়। $\therefore$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব $= 2$

নতুন অক্ষ অনুযায়ী, শীর্ষবিন্দু A-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$

এবং নাভি $= (\frac{1}{2}, 0)$ নিয়ামক : $X = -\frac{1}{2}$

সুতরাং পুরানো অক্ষ অনুযায়ী, শীর্ষবিন্দু : $(-2, -3)$

নাভি : $(\frac{1}{2} - 2, 0 - 3)$ অর্থাৎ $(-\frac{3}{2}, -3)$

এবং নিয়ামক : $x = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$ বা, $2x + 5 = 0$

উদা. 5. $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের উপর কোন বিন্দুর নাভি-দূরত্ব 8 ; ওর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[এলাহাবাদ 1948]

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর কোন বিন্দু (x_1, y_1) এর নাভি-দূরত্ব $= x_1 + a$

$\therefore \ 8 = x_1 + 2 \quad [\because \ y^2 = 4.2x] \quad \therefore \ x_1 = 6.$

সুতরাং, $y_1^2 = 8x_1 = 8.6 \quad \therefore \ y = \pm 4\sqrt{3}.$

$\therefore$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= (6, \pm 4\sqrt{3})$

উদা. 6. $y^2 = 4px$ অধিবৃত্ত $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় ; নাভিলম্ব ও নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ক. বি. '34]

$\because \ y^2 = 4px$ অধিবৃত্ত $(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore \ (-2)^2 = 4p.3$ বা, $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ হল : $y^2 = \frac{4}{3}x$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব $= \frac{4}{3}$. এবং **নাভির স্থানাঙ্ক** $= (\frac{1}{3}, 0)$

উদা. 7. যদি $a + b \neq 0$ হয়, তবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী $y^2 = 2mx$ অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ক. বি. '52]

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ও $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ সমীকরণদ্বয় সমাধান করে সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু

$$x = \frac{ab}{a+b} \text{ ও } y = \frac{ab}{a+b}.$$

$\because \ y^2 = 2mx$ অধিবৃত্ত এই বিন্দুগামী, অতএব $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 = 2m\frac{ab}{a+b}.$

অর্থাৎ $m = \frac{ab}{2(a+b)} \quad \therefore$ **নাভির স্থানাঙ্ক :** $\left\{\frac{ab}{(a+b)}, 0\right\}$

উদা. 8. যে উপবৃত্তের নাভিদ্বয় (2, 0) ও (−2, 0) এবং নাভিলম্ব 6 তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধর, উপবৃত্তের অর্ধ-পরাক্ষ ও অর্ধ-উপাক্ষ যথাক্রমে a ও b. এবং উৎকেন্দ্রতা $=e$.

নাভিদ্বয়ের দূরত্ব : $2ae=4 \quad \therefore \; ae=2 \quad \cdots \quad$ (i)

আবার, নাভিলম্ব, $\dfrac{2b^2}{a}=6$

বা, $\dfrac{2a^2(1-e^2)}{a}=6 \quad [\because \; b^2=a^2(1-e^2)]$

বা, $a(1-e^2)=3 \quad$ বা, $\dfrac{2}{e}(1-e^2)=3 \quad (\because \; a=2/e)$

বা, $2e^2+3e-2=0 \quad \therefore \; e=\frac{1}{2}$ বা, -2

কিন্তু $e=-2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore \; a=\dfrac{2}{e}=4$ এবং $b^2=4^2(1-\frac{1}{4})=12.$

$\because$ নাভিদ্বয় x অক্ষে অবস্থিত এবং উহাদের মধ্যবিন্দু মূলবিন্দু,

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

উদা. 9. নিম্নলিখিত উপবৃত্তের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা ও নাভি নির্ণয় কর :

(i) $2x^2+3y^2=1$ [এলাহাবাদ '52]

(ii) $3x^2+4y^2=48$ [ক. বি.]

(1) উপবৃত্তের সমীকরণ, $2x^2+3y^2=1$ বা, $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

সুতরাং এখানে $a^2=\frac{1}{2}$ ও $b^2=\frac{1}{3}$

$\therefore$ নাভিলম্ব, $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

উৎকেন্দ্রতা, $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, $(\pm ae, 0)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0\right)$

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণ $3x^2+4y^2=48$

বা, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

$\therefore$ এখানে $a^2=16$ ও $b^2=12$

$\therefore$ নাভিলম্ব, $\frac{2b^2}{a}=\frac{2.12}{4}=6.$

উৎকেন্দ্রতা, $e\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{4}{16}}=\frac{1}{2}.$

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $=(\pm 2, 0)$

উদা. 10. x ও y অক্ষদ্বয় যথাক্রমে যে উপবৃত্তের দুই অক্ষ এবং যা $(-3, 1)$ ও $(2, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায় তার সমীকরণ এবং উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [ক. বি. 1945]

ধর, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because$ এটি $(-3, 1)$ ও $(2, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad$ (i)

এবং $\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) ও (ii) সমাধান করে, $a^2=\frac{3^2}{3}$ ও $b^2=\frac{3^2}{5}$

$\therefore$ উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{3x^2}{3^2}+\frac{5y^2}{3^2}=1$ বা, $3x^2+5y^2=32$

উৎকেন্দ্রতা, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{32/5}{32/3}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$

উদা. 11. যে উপবৃত্ত (যার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x ও y অক্ষদ্বয়) $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [ক. বি. 1948]

ধর, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad$ (i)

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা, $e=\sqrt{\frac{2}{5}}$; $\quad \therefore\ e^2=\frac{2}{5}$

অর্থাৎ $1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{5}$ $\quad \left[\because\ e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\right]$

$\therefore\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5} \quad \cdots \quad$ (ii)

আবার যেহেতু উপবৃত্ত (i) $(-3, 1)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore\ \frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad$ (iii)

(ii) ও (iii) সমাধান করে $a^2=\frac{32}{3}$ ও $b^2=\frac{32}{5}$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1$

উদা. 12. p-এর কোন্ মানের জন্য $px^2+4y^2=1$ উপবৃত্ত $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যাবে? এর অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ক. বি. 1935]

$\therefore$ প্রদত্ত উপবৃত্ত $px^2+4y^2=1$ $(\pm 1, 0)$ বিন্দু দিয়ে যায়,

$\therefore$ $p(\pm 1)^2+4.0=1$; $\therefore$ $p=1$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $x^2+4y^2=1$ অর্থাৎ $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$

$\therefore$ $a^2=1$ ও $b^2=\frac{1}{4}$ বা, $a=1$, $b=\frac{1}{2}$

অতএব, প্রদত্ত উপবৃত্তের **অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য** যথাক্রমে 2, 1.

উদা. 13. যে উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, 1)$ ও $(0, -1)$ এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য এক একক তার সমীকরণ নির্ণয় কর। উপবৃত্তের নাভিদ্বয় সমাপতিত হলে ওকে কিরূপে বৃত্ত বলা যায়—ব্যাখ্যা কর। [ক. বি. '51]

ধর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a)$

নাভিদ্বয়ের প্রদত্ত স্থানাঙ্ক অনুযায়ী ধর নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(0, \pm be)$

কিন্তু নাভিদ্বয়ের প্রদত্ত স্থানাঙ্ক $(0, \pm 1)$ $\therefore$ $be=1$

আবার উপাক্ষের দৈর্ঘ্য, $2a=1$; $\therefore$ $a=\frac{1}{2}$

কিন্তু, $a^2=b^2(1-e^2)$ বা, $a^2=b^2-b^2e^2$

বা, $\frac{1}{4}=b^2-1$; $\therefore$ $b^2=\frac{5}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{5}{4}}=1$ বা, $20x^2+4y^2=1$

এখন নাভিদ্বয় সমপাতিত হলে উহারা তার উপবৃত্তের সমীকরণ হবে,

এখন $be=0$ $\therefore$ $e=1$

$\therefore$ $a^2=b^2(1-e^2)$ $\therefore$ $a^2=b^2$.

অতএব উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$; বা, $x^2+y^2=a^2$

এটি একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র উপবৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ উপবৃত্তের অর্ধ-উপাক্ষ।

উদা. 14. 40 ফুট প্রশস্ত কোন সড়কের উপর একটি (অর্ধ) উপবৃত্তাকার খিলান আছে, ভূমি থেকে খিলানের সবচেয়ে উঁচু অংশের উচ্চতা 15 ফুট। 8 ফুট চওড়া ও 10 ফুট উঁচু কোন গাড়ী সড়কের মাঝ বরাবর গেলে গাড়ী ও খিলানের মধ্যে কতটা ফাঁক থাকবে?

খিলানের সমীকরণ, $\frac{x^2}{(20)^2}+\frac{y^2}{(15)^2}=1,\quad y>0.$

যখন, $x=4,\quad y=15\sqrt{1-\frac{16}{400}}=6\sqrt{6}=14.7$ ফুট

$\therefore$ সড়কের মাঝ বরাবর গেলে গাড়ী ও খিলানের মধ্যে $14.7-10=4.7$ ফুট ব্যবধান থাকবে।

উদা. 15. যে পরাবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, নাভি (3, 0) এবং উৎকেন্দ্রতা, $e=2$, তার সমীকরণ নির্ণয় কর, নিয়ামকের সমীকরণ ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নিরূপণ কর।

নাভির স্থানাঙ্ক $=(3, 0)\quad \therefore\quad ae=3\quad \therefore\quad a=\frac{3}{e}=\frac{3}{2}\qquad [\because\ e=2]$

আবার, $b^2=a^2(e^2-1)=\frac{9}{4}(4-1)=\frac{27}{4}.$

$\therefore$ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{27}{4}}=1$

নিয়ামকের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{3}{4}$

এবং **নাভিলম্ব** $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.\frac{27}{4}}{\frac{3}{2}}=2.\frac{27}{4}.\frac{2}{3}=9$

উদা. 16. যে পরাবৃত্তের শীর্ষ বিন্দুদ্বয় (3, −2) ও (−1, −2) এবং যা (4, 0) বিন্দুগামী, তার সমীকরণ ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

শীর্ষবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, −2), মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, −2).

আবার, শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার অর্ধেক $=\frac{1}{2}\sqrt{(3+1)^2+(-2+2)^2}=2$

অর্থাৎ অর্ধ-তির্যক অক্ষ, $a=2$

সুতরাং পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{b^2}=1$

$\because$ এটি (4, 0) বিন্দুগামী, $x=4$ বসিয়ে $b^2=\frac{16}{5}.$

$\therefore$ সমীকরণটি দাঁড়ায় $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{\frac{16}{5}}=1$

$$\therefore\ ae=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{6}{5}\sqrt{5}$$

সুতরাং **নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক** $=(1\pm\frac{6}{5}\sqrt{5},\ -2).$

উদা. 17. $\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-)^2}{36}=1$ পরাবৃত্তের অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের সমীকরণ কি? এর কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দুদ্বয় উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়, নিয়ামক ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর।

প্রদত্ত পরাবৃত্তের অনুবদ্ধ পরাবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{(y-1)^2}{36}-\frac{(x-3)^2}{25}=1$

এখানে $a=6$, $b=5$, $\therefore$ $ae=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$

$\therefore$ $e=\frac{1}{6}\sqrt{61}$

এবং কেন্দ্র (3, 1) ; শীর্ষবিন্দুদ্বয় (3, 7) ও (3, −5)

নাভিদ্বয় $(3, 1+\sqrt{61})$, $(3, 1-\sqrt{61})$

নিয়ামকের সমীকরণদ্বয়, $y=1\pm\frac{36}{61}\sqrt{61}$; নাভিলম্ব $=8\frac{1}{3}$.

Exercise 5

1. নিম্নলিখিত অধিবৃত্তগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভি (−8, −2) ; নিয়ামক : $y=2x-9$

(ii) নাভি (5, 3) ; নিয়ামক : $3x-4y+1=0$

(iii) নাভি (3, −2) ; নিয়ামক : $2x-y+3=0$

[C. U. 1958]

2. নিচের অধিবৃত্তগুলির প্রত্যেকটির নাভি ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর :

(i) $5y^2=7x$ (ii) $y^2=8x$ [Alahabad, 48]

(iii) $y^2=ax+b$ (iv) $x^2+5y=0$

3. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী অধিবৃত্ত $y^2=2ax$-এর নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. 1943]

4. $x^2+4x+2y=0$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি, নিয়ামক ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. $3x^2+12x-8y=0$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Rajputana, 1945]

6. $y=ax^2+bx+c$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি, ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

7. $y^2=4y-4x$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর।

8. $4(y-1)^2=-7(x-3)$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব, নাভি ও শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. 1956]

9. $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের উপর P যে কোন বিন্দু। নিয়ামকের উপর এর পাদবিন্দু ও নাভি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[Rurhki. 1944]

10. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের অন্তঃস্থ একটি সমবাহু ত্রিভুজের কোন একটি কৌণিক বিন্দু অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হলে ত্রিভুজটির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[Allababad. 1916]

11. কোন অধিবৃত্তের বক্রতা y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত, নাভি (0, 3) ও নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12 ; অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. Comp. 1950]

12. প্রমাণ কর যে, $y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ এমন একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যার অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল। অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর। [C. U. 1953]

13. নিম্নলিখিত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, নাভিলম্ব ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $9x^2 + 25y^2 = 225$ (iii) $3x^2 + 4y^2 = 48$ [C. U. 1941]

(ii) $x^2 + 2y^2 = 2$ [C. U.] (iv) $4x^2 + 9y^2 = 36$ (v) $2x^2 + 3y^2 = 1$

14. উপবৃত্তের অক্ষকে স্থানাঙ্ক-অক্ষ ধরে নিম্নোক্ত ক্ষেত্রগুলিতে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) নাভিলম্ব, 5 এবং উৎকেন্দ্রতা 2/3

(ii) নাভিদ্বয় (±4, 0), উৎকেন্দ্রতা 1/3

(iii) উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$ এবং উপবৃত্ত $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দু দিয়ে যায় [C. U. 1942]

(iv) উপবৃত্ত (2, 2) ও (3, 1) বিন্দু দিয়ে যায় [C. U. 1939]

(v) পরাক্ষ 8 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{4}$

15. যে উপবৃত্তের নাভি (1, −2), নিয়ামক $y = 2x + 3$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. যে উপবৃত্তের নাভি (1, −2), নিয়ামক $3x - 2y - 1 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. উপবৃত্তের একটি নাভি (−1, 1), নিয়ামক $x - y + 4 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{2}}$; উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Rurhki, 1946]

18. কোন উপবৃত্ত $\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$ রেখাকে x-অক্ষে এবং $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ রেখাকে y-অক্ষে

ছেদ করে। এর অক্ষ দুটি স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় বরাবর হলে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উৎকেন্দ্রতা ও নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নিরূপণ কর। [C. U. 1938]

19. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং এর নাভিলম্ব $\frac{32\sqrt{2}}{5}$; a ও b কত? [C. U. 1949]

20. প্রমাণ কর যে, $4x^2+6y^2-9=0$ একটি উপবৃত্তের সমীকরণ এবং এর অক্ষের দৈর্ঘ্য ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [Aligarh, 1949]

21. কোন উপবৃত্তের নাভিলম্ব পরাক্ষের অর্ধেক। এর উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [Allahabad, 1948]

22. কোন উপবৃত্তের অক্ষ দুটি স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় এবং উপবৃত্তটি (2, 2) ও (3, 1) বিন্দুদ্বয়গামী ; এর সমীকরণ ও উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [C. U. 1939]

23. কোন উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$ এবং নাভি ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব 16 ইঞ্চি ; প্রধান অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

24. কোন উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (0, ±1) এবং নাভিলম্ব একক দৈর্ঘ্যযুক্ত। উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। উপবৃত্তের নাভিদ্বয় সমাপতিত হলে ওকে অন্তিমদশায় কিভাবে বৃত্তরূপে গণ্য করা যায় ব্যাখ্যা কর। [C. U. 1951]

25. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে, পরাবৃত্তের অক্ষকে স্থানাঙ্ক অক্ষ ধরে, পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) তির্যক অক্ষ 3, অনুবন্ধী অক্ষ 4

(ii) অনুবন্ধী অক্ষ 6, নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 10

(iii) অনুবন্ধী অক্ষ 7, পরাবৃত্ত (3, −2) বিন্দুগামী

(iv) উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$, নাভিদ্বয়ের দূরত্ব 16

(v) (1, 1) ও (2, −3) বিন্দুদ্বয়গামী।

26. $4x^2-9y^2=36$ পরাবৃত্তের অক্ষ, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, উৎকেন্দ্রতা ও নাভিলম্ব নির্ণয় কর।

27. $9x^2-16y^2=144$ পরাবৃত্তের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

28. নিম্নলিখিত পরাবৃত্তের কেন্দ্র, শীর্ষবিন্দুদ্বয়, নাভিদ্বয়, উৎকেন্দ্রতা, নিয়ামকের সমীকরণ এবং নাভিলম্ব নির্ণয় কর।

(i) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{y^2}{128}=1$ (ii) $7x^2-8y^2-16y-64=0$

(iii) $x^2-4y^2-6x-16y-23=0$ (iv) $4x^2-9y^2=36$

(v) $\frac{(x+5)^2}{1}-\frac{(y+2)^2}{3}=1$

29. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) শীর্ষবিন্দু (4, 0), নাভি (5, 0)

(ii) শীর্ষবিন্দুদ্বয় (0, ±1) ও নাভিদ্বয় (0, ±4)

(iii) কেন্দ্র (2, 4), শীর্ষবিন্দু (6, 4), উৎকেন্দ্রতা 5

(iv) শীর্ষবিন্দুদ্বয় (4, −3) এবং পরাবৃত্ত (−2, −3) ও (7, 3) বিন্দুগামী

(v) নিয়ামকদ্বয় : $y=5, y=-7$; নাভি (10, 6)

(vi) নাভিদ্বয় (12, −5 ও (−4, −5) ; উৎকেন্দ্রতা 2

(vii) নিয়ামকদ্বয় : $y=4, y=6$; অর্ধ-তির্যক অক্ষ = 4 নাভিলম্ব = 3

(viii) কেন্দ্র মূলবিন্দুতে, অক্ষ x-অক্ষ বরাবর এবং পরাবৃত্ত (−7, 3) ও (5, 2) বিন্দুদ্বয়গামী।

30. পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{4}$, নাভি $(a, 0)$ এবং নিয়ামক $4x-3y=a$; পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর ; কেন্দ্র এবং অপর নিয়ামকের সমীকরণ নিরূপণ কর।

31. $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$ পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা ও নাভির অবস্থান নির্ণয় কর।

[C. U. 1957]

32. দেখাও যে, পরাবৃত্তের উপরে যে কোন বিন্দু থেকে নাভিদ্বয়ের দূরত্ব সর্বদাই তির্যক অক্ষের সমান।

33. একটি অধিবৃত্তের শীর্ষ ও নাভি মূলবিন্দু থেকে যথাক্রমে a ও b দূরে $(a<b)$ x-অক্ষের উপর অবস্থিত। অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

34. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং $\frac{a^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ পরাবৃত্ত দুটির উৎকেন্দ্রতা যথাক্রমে e_1 ও e_2 হলে দেখাও যে, $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1.$

6
ষষ্ঠ অধ্যায়

স্পর্শক ও অভিলম্ব (Tangents and normals)

6.1. বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় (To find the point of intersection of a line with a circle)

ধর, বৃত্ত ও সরলরেখাটির সমীকরণ যথাক্রমে

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \ldots \qquad \text{(i)}$$

$$y=mx+c \qquad \ldots \qquad \text{(ii)}$$

নির্ণেয় ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ।

(ii) থেকে y-র মান (i)-এ বসিয়ে

$$(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0 \qquad \ldots \qquad \text{(iii)}$$

এটি x-র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; x_1, x_2 এর বীজদ্বয় হলে ছেদবিন্দুর ভুজ x_1, x_2 হবে ; x-র এই দুই মানের জন্য (ii) থেকে ছেদবিন্দুর কোটি y_1, y_2 পাওয়া যাবে। কাজেই রেখাটি বৃত্তকে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এই দুই বিন্দুতে ছেদ করবে।

6.2. স্পর্শকের ধারণা (Idea of a tangent)

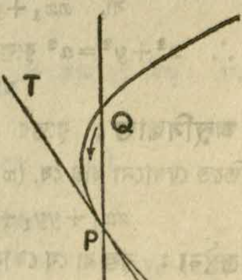
উপরের (iii) সমীকরণের বীজদ্বয় (a) কাল্পনিক হতে পারে, (b) বাস্তব ও অসমান হতে পারে বা (c) বাস্তব ও পরস্পর সমান হতে পারে।

(a)-ক্ষেত্রে রেখাটি বৃত্তকে দুটি পৃথক বিন্দুতে ছেদ করবে।

(b)-ক্ষেত্রে রেখাটি মোটেই বৃত্তকে ছেদ করবে না।

(c)-ক্ষেত্রে রেখাটি বৃত্তকে দুটি অভিন্ন বা সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করবে। এক্ষেত্রে রেখাটিকে বৃত্তের **স্পর্শক** (tangent) বলে। আর ঐ বিন্দুটিকে **স্পর্শ বিন্দু** (point of contact) বলে।

ধর, কোনও বক্ররেখার উপরস্থ P, Q যে কোন দুটি বিন্দু। Q বিন্দুটি ক্রমশঃ P-র দিকে এগুতে থাকলে এক সময় Q বিন্দুটি P-র উপর সমাপতিত হবে। PQ সরলরেখার সেই অবস্থান হল PT এবং PT-কে তখন P বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার **স্পর্শক** বলা হবে।



চিত্র 40

কাজেই, স্পর্শকের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে :

সংজ্ঞা : একটি বক্ররেখার কোনও ছেদক যে দুটি বিন্দুতে বক্ররেখাটিকে ছেদ করে সেই ছেদবিন্দুদ্বয় একটি বিন্দুতে সমাপতিত হলে ছেদকের অন্তিম অবস্থানকে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক বলে।

6.3. বৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of tangent to a circle)

ধর, $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের উপরে $P(x_1, y_1)$ যে কোন বিন্দু। $Q(x_2, y_2)$ পরিধিস্থ আর একটি বিন্দু এবং Q বিন্দু P-র খুব কাছে।

P, Q উভয়েই বৃত্তস্থ বলে,

$$x_1^2+y_1^2=a^2 \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$x_2^2+y_2^2=a^2 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

কিন্তু, PQ-জ্যার সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(i) ও (ii) থেকে $\quad y_1^2-y_2^2=x_2^2-x_1^2$

বা, $(y_1-y_2)(y_1+y_2)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$

$$\therefore \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

(iv) থেকে $(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$-এর মান (iii)-এ বসিয়ে, PQ জ্যা-র সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

যখন Q বিন্দু P-র উপর সমাপিতত হবে অর্থাৎ $x_2\to x_1$ এবং $y_2\to y_1$ হবে তখন PQ জ্যা P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হবে। অতএব (v)-এর $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসিয়ে,

স্পর্শকের সমীকরণ, $\quad y-y_1=-\dfrac{2x_1}{2y_1}(x-x_1)$

বা, $\quad xx_1+yy_1=x_1^2+y_1^2=a^2$

$\therefore \quad x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$xx_1+yy_1=a^2$$

অনুসিদ্ধান্ত : বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gn+2fy+c=0$ হলে অনুরূপ পদ্ধতিতে দেখানো যায় যে, (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হল :

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

দ্রষ্টব্য : বৃত্ত বা যে কোন কণিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ এই নিয়মে লেখা যায় : বৃত্ত বা কণিকটির সমীকরণে x^2 স্থলে xx_1, y^2 স্থলে yy_1, $2x$ স্থলে $(x+x_1)$ $2y$ স্থলে $(y+y_1)$ বসাও। ধ্রুবপদগুলো অক্ষুণ্ণ রাখ।

6.4. কোন সরলরেখার বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত (Condition of a tangency of a line to a circle)

ধর, সরলরেখাটি $y=mx+c$ ... (i)

এবং বৃত্তটি $x^2+y^2=a^2$ ... (ii)

(i) ও (ii) থেকে y-অপনয়ন করে রেখা ও বৃত্তের ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণায়ক সমীকরণটি হল :

$$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত ছেদবিন্দুদ্বয়ের সমাপতন। কাজেই (iii) সমীকরণের বীজদ্বয় পরস্পর সমান হবে। অতএব নির্ণেয় শর্ত হল :

$$(2mc)^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)=0$$

বা, $c^2=a^2(1+m^2)$ $\therefore$ $c=\pm\sqrt{1+m^2}$

এই-ই হল স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}}$ ... (iv)

রেখাদ্বয় m-র সব মানের জন্য $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের দুটি স্পর্শক।

ধর, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ; (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\mathbf{xx_1+yy_1=a^2} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) তুলনা করে : $\dfrac{x_1}{-m}=\dfrac{y_1}{1}=\dfrac{a^2}{\pm a\sqrt{1+m^2}}$

$$\therefore\ x_1=\frac{-am}{\pm\sqrt{1+m^2}},\ y_1=\frac{a}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

$\therefore$ **স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক :** $\mp\dfrac{\mathbf{am}}{\sqrt{\mathbf{1+m^2}}},\ \pm\dfrac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{1+m^2}}}$.

6·5. অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of tangent at a point to a parabola)

ধর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে কোন দুই বিন্দু। PQ-রেখার সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু P, Q উভয়েই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত, অতএব

$$y_1^2=4ax_1 \text{ এবং } y_2^2=4ax_2 \quad \therefore\ y_1^2-y_2^2=4a(x_1-x_2)$$

$$\therefore\ \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4a}{y_1+y_2} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) থেকে, অধিবৃত্তের PQ জ্যা-র সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{4a}{y_1+y_2}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এক্ষণে Q বিন্দু ক্রমে P-র দিকে এগিয়ে যখন P-তে সমাপতিত হবে তখন PQ জ্যা-টি P বিন্দুতে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে। অতএব (iii)-এ $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসিয়ে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{2a}{4y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=2a(x-x_1)$

বা, $yy_1^2=y_1^2+2a(x-x_1)=4ax_1+2a(x-x_1)$

$$\therefore \ \mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$$

এই হল (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : শীর্ষবিন্দু (0, 0)-তে স্পর্শকের সমীকরণ $\mathbf{x=0}$. অধিবৃত্তের t-বিন্দুতে অর্থাৎ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\mathbf{x-ty+at^2=0}$

দ্রষ্টব্য : $y^2=4ax$-কে $yy=2a(x+x)$ আকারে লিখে একটি x-র স্থলে x_1 এবং একটি y-র স্থলে y_1 লিখলেই স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।

6.6. কোনও রেখার অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত (Condition of tangency of a line to a parabola)

ধর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ ... (i)

এবং সরলরেখার সমীকরণ $y=mx+c$ ... (ii)

∴ অধিবৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক সমীকরণ,

$$(mx+c)^2=4ax$$

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ... (iii)

যদি সরলরেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হয় তবে (iii) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে। অতএব স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত :

$$\{2(mc-2a)\}^2-4m^2c^2=0$$

বা, $16a^2-16amc=0 \qquad \therefore \ \mathbf{c=\frac{a}{m}}$

এই হল স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{y=mx+\frac{a}{m}}$ ... (i)

রেখাটি m-র যে কোন মানের জন্য $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

ধর, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ; (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$yy_1 = 2a(x+x_1) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) তুলনা করে : $\dfrac{x_1}{1/2m} = \dfrac{y_1}{1} = \dfrac{2a}{m}$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a}{m^2}, \quad y_1 = \frac{2a}{m}$$

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}$

6.7 উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of tangent to an ellipse)

ধর, উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$-এর উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে কোন দুই বিন্দু। PQ রেখার সমীকরণ

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু, P, Q উভয়েই উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, অতএব

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \\ \text{এবং} \quad \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1 \end{array}\right\} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} = -\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} = -\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(iii)-কে ব্যবহার করে, (i) থেকে উপবৃত্তের PQ জ্যার সমীকরণ

$$y-y_1 = -\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এক্ষণে, Q বিন্দু ক্রমে P-র দিকে এগিয়ে যখন P-তে সমাপতিত হবে তখন PQ জ্যা-টি P বিন্দুতে উপবৃত্তের সমীকরণ হবে। অতএব (iv)-এ $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসিয়ে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y-y_1 = -\frac{2b^2x_1}{2a^2y_1}(x-x_1)$$

(i) ও (ii) থেকে, অধিবৃত্তের PQ জ্যা-র সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{4a}{y_1+y_2}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এক্ষণে Q বিন্দু ক্রমে P-র দিকে এগিয়ে যখন P-তে সমাপতিত হবে তখন PQ জ্যা-টি P বিন্দুতে অধিবৃত্তের সমীকরণ হবে। অতএব (iii)-এ $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ বসিয়ে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{2a}{4y_1}(x-x_1)$$

বা, $yy_1-y_1^2=2a(x-x_1)$

বা, $yy_1^2=y_1^2+2a(x-x_1)=4ax_1+2a(x-x_1)$

$$\therefore \quad \mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$$

এই হল (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে স্পর্শকের নির্ণেয় সমীকরণ।

অনুসিদ্ধান্ত : শীর্ষবিন্দু (0, 0)-তে স্পর্শকের সমীকরণ $\mathbf{x=0}$. অধিবৃত্তের t-বিন্দুতে অর্থাৎ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $\mathbf{x-ty+at^2=0}$

দ্রষ্টব্য : $y^2=4ax$-কে $yy=2a(x+x)$ আকারে লিখে একটি x-র স্থলে x_1 এবং একটি y-র স্থলে y_1 লিখলেই স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।

6.6. কোনও রেখার অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত (Condition of tangency of a line to a parabola)

ধর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax \quad \cdots \quad$ (i)

এবং সরলরেখার সমীকরণ $y=mx+c \quad \cdots \quad$ (ii)

$\therefore$ অধিবৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক সমীকরণ,

$$(mx+c)^2=4ax$$

বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0 \quad \cdots \quad$ (iii)

যদি সরলরেখাটি অধিবৃত্তের স্পর্শক হয় তবে (iii) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে। অতএব স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত :

$$\{2(mc-2a)\}^2-4m^2c^2=0$$

বা, $16a^2-16amc=0 \qquad \therefore \mathbf{c=\frac{a}{m}}$

এই হল স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : $\mathbf{y=mx+\frac{a}{m}} \quad \cdots \quad$ (i)

রেখাটি m-র যে কোন মানের জন্য $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক।

ধর, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ; (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) তুলনা করে : $\dfrac{x_1}{1/2m} = \dfrac{y_1}{1} = \dfrac{2a}{m}$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a}{m^2}, \; y_1 = \frac{2a}{m}$$

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}$

6.7 উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of tangent to an ellipse)

ধর, উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর উপর $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ যে কোন দুই বিন্দু। PQ রেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু, P, Q উভয়েই উপবৃত্তের উপর অবস্থিত, অতএব

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \text{এবং} \quad &\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$$

$$\text{বা,} \quad \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = -\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{b^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

(iii)-কে ব্যবহার করে, (i) থেকে উপবৃত্তের PQ জ্যার সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1) \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এক্ষণে, Q বিন্দু ক্রমে P-র দিকে এগিয়ে যখন P-তে সমাপতিত হবে তখন PQ জ্যা-টি P বিন্দুতে উপবৃত্তের সমীকরণ হবে। অতএব (iv)-এ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ বসিয়ে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y - y_1 = -\frac{2b^2 x_1}{2a^2 y_1}(x - x_1)$$

বা, $\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}=-\frac{x_1(x-x_1)}{a^2}$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$

বা, $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শকের নির্ণেয় সমীকরণ :

$$\frac{\mathbf{xx_1}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{yy_1}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$$

অনুসিদ্ধান্ত : (a, o) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\mathbf{x=a}$

(o, b) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\mathbf{y=b}$

সুতরাং পরাক্ষের (বা উপাক্ষের) অন্তিম প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শক ঐ অক্ষের উপর লম্ব।

উপবৃত্তের θ বিন্দুতে অর্থাৎ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ স্পর্শকের সমীকরণ,

$$\frac{\mathbf{x\cos\theta}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{y\sin\theta}}{\mathbf{b}}=1$$

6.8. কোনও রেখার উপবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত (Condition of tangency of a line to an ellipse)

ধর, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (i)

এবং সরলরেখার সমীকরণ $y=mx+c$ ... (ii)

$\therefore$ উপবৃত্ত ও রেখাটির ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক সমীকরণ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

বা, $x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$ ... (iii)

যদি সরলরেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক হয় তবে (iii)-এর বীজদ্বয় সমান হবে। অতএব, স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত :

$$(2a^2mc)^2-4(a^2m^2+b^2)a^2(c^2-b^2)=0$$

বা, সরল করে : $c^2=a^2m^2+b^2$ $\quad\therefore$ $\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

এই হল স্পর্শক হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : m-র সব মানের জন্য $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক।

আগের মতো পদ্ধতি অনুসরণ করে দেখানো যায় যে,

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $\frac{-a^2m}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

6.9. পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of tangent to a hyperbola)

6.7 অনুচ্ছেদের অনুরূপ পদ্ধতিতে সহজেই প্রমাণ করা যায় যে,

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে

স্পর্শকের সমীকরণ : $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$

অনুসিদ্ধান্ত 1. পরাবৃত্তের ϕ-বিন্দুতে অর্থাৎ $(a\sec\phi, b\tan\phi)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x\sec\phi}{a}-\frac{y\tan\phi}{b}=1$

2. $x^2-y^2=a^2$ সম-পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$xx_1-yy_1=a^2.$$

6. 10. পরাবৃত্তের স্পর্শকের শর্ত (Condition of tangency to a hyperbola)

6.8 অনুচ্ছেদের মতো সহজেই দেখানো যায় যে, $y=mx+c$ সরলরেখাটির $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত হল $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

অনুসিদ্ধান্ত : m-র সব মানের জন্যই $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ রেখা দুটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে।

স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক 6.8 অনুচ্ছেদের ন্যায় নির্ণয় করা যায় এবং

স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $\frac{-a^2m}{\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{-b^2}{\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$

6. 11. দেখাও যে, কোন বহিঃস্থ বিন্দু থেকে অধিবৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব এবং স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে ওদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ অধিবৃত্তের নিয়ামক।

$y=mx+\frac{a}{m}$ $(m\neq 0)$ সর্বদাই $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। বহিঃস্থ বিন্দুটি (α, β) ধরা যাক।

$$\therefore \quad \beta=m\alpha+\frac{a}{m}$$

$$\text{বা} \quad \alpha m^2-\beta m+a=0 \qquad \text{......(i)}$$

এটি m-র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; অতএব m-র দুটি বীজ ; কাজেই (α,β) থেকে অধিবৃত্তে দুটি স্পর্শক টানা যায়।

ধর, বীজদ্বয় m_1, m_2.

$\therefore$ $y=m_1x+\frac{a}{m_1}$ এবং $y=m_2x+\frac{a}{m_2}$ হল স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ। কিন্তু (i) থেকে বীজদ্বয়ের গুণফল $m_1m_2=a/\alpha$

(α, β) বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে

$$m_1m_2=-1$$

$$\therefore \quad a/\alpha=-1 \qquad \therefore a+\alpha=0$$

$\therefore$ (α, β) বিন্দুর সঞ্চারপথ হল : $\mathbf{a+x=0}$; এটি নিয়ামকের সমীকরণ। অতএব ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ অধিবৃত্তের নিয়ামক।

6. 12. দেখাও যে, কোন বহিঃস্থ বিন্দু থেকে উপবৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব এবং স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে ওদের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখাটি m-র সব মানের জন্যই $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক। বহিঃস্থ বিন্দুটি (α, β) ধরা যাক।

$$\therefore \quad \beta=m\alpha+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\therefore \quad (\beta-m\alpha)^2=a^2m^2+b^2$$

$$\text{বা} \quad (a^2-\alpha^2)m^2+2\alpha\beta m+(b^2-\beta^2)=0 \qquad \text{......(ii)}$$

এটি m-র একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; অতএব m-র দুটি বীজ। কাজেই (α, β) থেকে উপবৃত্তে দুটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। ধর, বীজদ্বয় m_1, m_2.

$\therefore$ $y=m_1x+\sqrt{a^2m_1^2+b^2}$; $y=m_2x+\sqrt{a^2m_2^2+b^2}$ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ। কিন্তু (ii) থেকে, বীজদ্বয়ের গুণফল :

$$m_1m_2=\frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}$$

(α,β) বিন্দুগামী স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে $m_1m_2=-1$

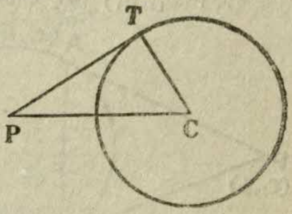
$$\therefore \quad \frac{b^2-\beta^2}{a^2-\alpha^2}=-1$$

$$\text{বা,} \quad \alpha^2+\beta^2=a^2+b^2$$

$\therefore$ (α,β) বিন্দুর সঞ্চারপথ হল $\mathbf{x^2+y^2=a^2+b^2}$; স্পষ্টত এটি একটি **বৃত্ত** (ব্যাসার্ধ $=\sqrt{a^2+b^2}$) ; এই বৃত্তটিকে ঐ উপবৃত্তের **নিয়ামক বৃত্ত (Director Circle)** বলে।

6. 13. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য (Length of a tangent)

ধর, বহিঃস্থ কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ থেকে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটির T বিন্দুতে PT স্পর্শক টানা হয়েছে ; CT স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। C বৃত্তের কেন্দ্র।



চিত্র 41

স্পষ্টত, C-র স্থানাঙ্ক : (0,0) ; CT = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=a$

ΔPCT সমকোণী ত্রিভুজে $\angle CTP=$ সমকোণ

$$\therefore \quad PT^2=PC^2-CT^2$$
$$=(x_1-0)^2+(y_1-0)^2-a^2$$
$$=x_1^2+y_1^2-a^2$$

$\therefore$ **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** $PT=\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$

অনুসিদ্ধান্ত :

1. বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হলে কেন্দ্র C-র স্থানাঙ্ক $(-g,-f)$ এবং ব্যাসার্ধ $CT=\sqrt{g^2+f^2-c}$ হবে।

$$\therefore \quad PT^2=\{x_1-(-g)\}^2+\{y_1-(-f)\}^2-(g^2+f^2-c)$$
$$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$$

$\therefore$ **স্পর্শকের দৈর্ঘ্য** $PT=\sqrt{(x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c)}$

2. (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

$$\text{দৈর্ঘ্য}=\sqrt{y_1^2-4ax_1}$$

3. (x_1, y_1) বিন্দু থেকে $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$ কনিকদ্বয়ে (যথাক্রমে উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তে) অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{\left(\frac{x_1^2}{x^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)}$

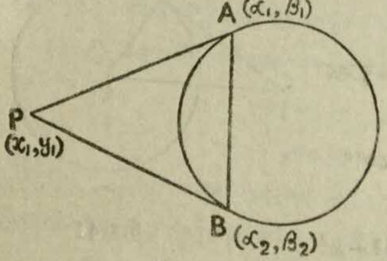
দ্রষ্টব্য ঃ লক্ষ্য কর যে, বৃত্ত বা কনিকের সমীকরণকে ডানপক্ষ শূন্য করে সাজিয়ে নিয়ে x ও y স্থলে যথাক্রমে বহিঃস্থ বিন্দুর ভুজ ও কোটি বসালে স্পর্শকের বর্গ পাওয়া যায়। ঐ রাশির বর্গমূলই স্পর্শকের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য।

6. 14. স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা (Chord of contact)

সংজ্ঞা ঃ বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে কোন বৃত্ত বা কনিকে যে দুটি স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব সেই স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর সংযোজক রেখাকে ঐ বৃত্ত বা কনিকের **স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা** বলে।

স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণ ঃ

ধর, $P(x_1, y_1)$ বিন্দু থেকে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে দুটি স্পর্শক PA ও PB টানা হয়েছে। $A(\alpha_1, \beta_1)$ এবং $B(\alpha_2, \beta_2)$ যথাক্রমে ওদের স্পর্শবিন্দু। কাজেই AB স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা।



চিত্র 42

AP স্পর্শকের সমীকরণ :

$$x\alpha_1+y\beta_1=a^2$$

$\because$ এটি $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী, অতএব $x_1\alpha_1+y_1\beta_1=a^2$ ....(i)

BP স্পর্শকের সমীকরণ : $x\alpha_2+y\beta_2=a^2$

$\therefore$ এটি $P(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী, অতএব $x_1\alpha_2+y_1\beta_2=a^2$ ... ...(ii)

(i) ও (ii) থেকে দেখা যায় $A(\alpha_1, \beta_1)$ ও $B(\alpha_2, \beta_2)$ বিন্দুদ্বয় $xx_1+yy_1=a^2$ এই এক-ঘাত সমীকরণকে সিদ্ধ করে। অতএব AB সরলরেখা বা স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণ

$$\mathbf{xx_1+yy_1=a^2}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ লক্ষ্য কর, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক এবং (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণের রূপ একই। স্পর্শকের ক্ষেত্রে (x_1, y_1) বৃত্তের উপরিস্থ, স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র ক্ষেত্রে (x_1, y_1) বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ অনুরূপে দেখান যায় যে,

অধিবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণ : $\mathbf{yy_1=2a(x+x_1)}$

উপবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণ : $\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1}$

পরাবৃত্তের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-র সমীকরণ : $\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1}$

6. 15. অভিলম্ব ও অভিলম্বের সমীকরণ (Normal and equation of the normal)

সংজ্ঞা : যে সরলরেখা স্পর্শবিন্দুতে কোন বক্ররেখার স্পর্শকের উপর লম্ব তাকে ঐ বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার **অভিলম্ব** বলে।

43 নং চিত্রে P বিন্দুতে PT হল বক্ররেখার স্পর্শক এবং PG রেখা P বিন্দুতে PT-র উপর লম্ব। অতএব PG হল P বিন্দুতে ঐ বক্ররেখার অভিলম্ব।

A. **বৃত্তের অভিলম্ব :** ধর, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ :

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

এবং এর নতি $= -\dfrac{x_1+g}{y_1+f}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের নতি $m=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হল

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

বা $(y-y_1)=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$

বা $(x-x_1)(y_1+f)-(y-y_1)(x_1+g)=0$ $\cdots$(i)

অনুসিদ্ধান্ত 1. : $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $xy_1-yx_1=0$.

2. যেহেতু (i) নং সমীকরণ বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ দ্বারা সিদ্ধ, অতএব বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে **অভিলম্ব ঐ বৃত্তের কেন্দ্রগামী।**

B. **অধিবৃত্তের অভিলম্ব :** ধর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক : $yy_1=2a(x+x_1)$

$\therefore$ স্পর্শকের নতি $=\dfrac{2a}{y_1}$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের নতি $m=-\dfrac{y_1}{2a}$

$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্ব : $y-y_1=-\dfrac{y_1}{2a}(x-x_1)$ $\cdots\cdots$(ii)

3. 't' বিন্দুতে $(at^2, 2at)$ অভিলম্বের সমীকরণ

$$y-2at=-t(x-at^2)$$

বা $$tx+y=2at+at^3 \qquad \text{......(iii)}$$

এই অভিলম্বের নতি $=-t$

C. নতিভিত্তিক অধিবৃত্তের অভিলম্ব (**Normal in terms of gradient**)

অভিলম্বের নতি $m=-\frac{y_1}{2a}$ $\quad\therefore\quad y_1=-2am$

আবার (x_1, y_1) অধিবৃত্তস্থ বলে $x_1=\frac{y_1^2}{4a}=\frac{(-2am)^2}{4a}=am^2$

$\therefore$ (ii) সমীকরণ থেকে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y+2am=-\frac{-2am}{2a}(x-am^2)$$

বা $$y=mx-2am-am^3 \qquad \text{......(iv)}$$

দ্রষ্টব্য : অভিলম্বের নতি m হলে সমীকরণ (iv) অর্থাৎ অভিলম্বটি $(am^2, -2am)$-বিন্দুতে অধিবৃত্তকে ছেদ করে।

D. উপবৃত্তের অভিলম্ব : ধর, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

(x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক : $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$

স্পর্শকটির নতি $=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$\therefore$ অভিলম্বের নতি $=a^2y_1/b^2x_1$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ : $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$

বা $$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2 \qquad \text{......(v)}$$

অনুসিদ্ধান্ত : উপবৃত্তের θ-বিন্দুতে অর্থাৎ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$

E. পরাবৃত্তের অভিলম্ব : অনুরূপে দেখানো যায় যে, পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-র (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2 \qquad \text{....(vi)}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ পরাবৃত্তের ϕ-বিন্দুতে $(a \sec \phi, b \tan \phi)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\frac{ax}{\sec \phi}+\frac{by}{\tan\phi}=a^2-b^2$

6.16 কোন বিন্দু থেকে অধিবৃত্তে তিনটি অভিলম্ব আঁকা যায়। (Three normals could be drawn from a point to a parabola)

ধর, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের সমতলে $P(x_1, y_1)$ একটি বিন্দু। ঐ অধিবৃত্তের $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অভিলম্ব হল $y+tx=2at+at^3$

$\therefore$ এটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলে

$$y_1+tx_1=2at+at^3$$

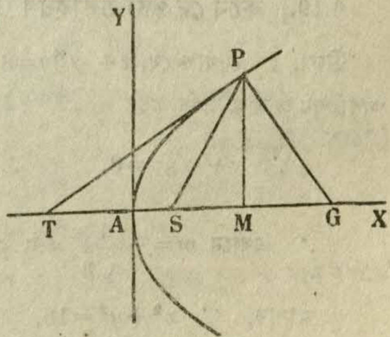
বা $$at^3+(2a-x_1)t-y_1=0 \qquad \cdots\cdots(i)$$

(i) নং সমীকরণটি t-র একটি ত্রিঘাত সমীকরণ। অতএব t-র তিনটি মান দ্বারা (i) সিদ্ধ।

$\therefore$ কোনও বিন্দু থেকে **অধিবৃত্তে তিনটি অভিলম্ব** অঙ্কন সম্ভব। অন্যভাবে বলা যায়, **অধিবৃত্তের উপরে এমন তিনটি বিন্দু আছে যে, ঐ বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত অভিলম্বত্রয় সমবিন্দু।**

6.17. উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব (Sub-tangent and sub-normal)

কোন কনিকের উপর যে কোন বিন্দু P নাও। P-তে PT স্পর্শক ও PG অভিলম্ব টান। এরা কনিকের অক্ষকে যথাক্রমে T ও G বিন্দুতে ছেদ করল। P থেকে অক্ষের উপর PM লম্ব ফেল। তা হলে TM-রেখাংশকে P বিন্দুর **উপ-স্পর্শক** এবং MG রেখাংশকে **উপ-অভিলম্ব** বলে।



চিত্র 43

একটি প্রতিজ্ঞা (A proposition): অধিবৃত্তের যে কোনও বিন্দুতে **উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক।**

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $at^2, 2at$

P বিন্দুতে অভিলম্ব PG-র সমীকরণ : $y+tx=2at+t^3$

অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষকে ($y=0$ রেখাকে) যে বিন্দুতে (G) ছেদ করে তার ভুজ x হলে
$$tx=2at+at^3$$
$$\therefore\ x=2a+at^2$$

∴ G বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(2a+at^2, 0)$

M বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $(at^2, 0)$

∴ **উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য** GM = AG − AM

$$=(2a+at^2)-at^2=2a=\text{ধ্রুবক।}$$

6.18. আরও একটি প্রতিজ্ঞা (Another proposition) : অধিবৃত্তের **উপস্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়।**

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক : $at^2, 2at$;

P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $ty=x+at^2$

স্পর্শক অধিবৃত্তের অক্ষকে ($y=0$ রেখা) T বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব T বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-at^2,0)$। কিন্তু A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,0)$।

∴ $AT=at^2$ এবং $AM=at^2$

∴ A বিন্দুতে উপ-স্পর্শক TM সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

6.19. কষে দেওয়া উদাহরণ (Illustrative examples)

উদা. 1. দেখাও যে, $x+\sqrt{3}y=8$ রেখাটি $x^2+y^2=16$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

(Andhra, 1941)

$$\because\ x+\sqrt{3}y=8, \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{8}{\sqrt{3}}$$

∴ এখানে $m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $c=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$;

আবার, $\because\ x^2+y^2=16, \qquad \therefore\ a=4$

যেহেতু, $a\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{1+(-1/\sqrt{3})^2}=\dfrac{8}{\sqrt{3}}=c,$

∴ $x+\sqrt{3}y=8$ রেখা $x^2+y^2=16$-এর স্পর্শক।

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক : $-\dfrac{ma}{\sqrt{1+m^2}}, \dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}$

বা, $-\dfrac{-4/\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}, \dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}$ বা $(2, 2\sqrt{3})$

উদা. 2. $x^2+y^2=25$ বৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় $4x+3y=0$ রেখার সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Utkal, 1947]

$4x+3y=0$ রেখার সমান্তরাল রেখা : $4x+3y=c_1$ ... (i)

এর নতি $m=-\frac{4}{3}$, $c=\frac{c_1}{3}$

$\because$ (i) সমীকরণ $x^2+y^2=25$ বৃত্তের স্পর্শক,

$\therefore\quad c=a\sqrt{1+m^2}=5\sqrt{1+(-\frac{4}{3})^2}=\pm\frac{25}{3}$

$\therefore\quad c_1=\pm 25$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ : $4x+3y=\pm 25$

উদা. 3. দেখাও যে, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু থেকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c'=0$ বৃত্তের স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c'-c}$.

ধর, $P(x', y')$ প্রথমোক্ত বৃত্তের উপর যে কোন বিন্দু।

$\therefore\quad x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c=0$ ... (i)

আবার, (x', y') থেকে দ্বিতীয় বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য L হলে,

$L^2=x'^2+y'^2+2gx'+2fy'+c'$ ... (ii)

$=-c+c'$; [(i) সমীকরণ ব্যবহার ক'রে]

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $L=\sqrt{c'-c}$.

উদা. 4. $x^2+y^2=3$ বৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে নত তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. B. Sc. 1955]

বৃত্তের সমীকরণ : $x^2+y^2=(\sqrt{3})^2$ $\therefore\quad a=\sqrt{3}$

ঐ বৃত্তের স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ : $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ .... (i)

এখানে $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$; অতএব (i) সমীকরণে m ও a-র মান বসিয়ে স্পর্শদ্বয়ের নির্ণেয় সমীকরণ,

$$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{3}$$

উদা. 5. যদি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কোন স্পর্শকের সমীকরণ $y=x\sin\alpha+a\sec\alpha$ হয়, তা হলে দেখাও যে, $\cos^2\alpha=1$ [C. U.]

$y=x\sin a+a\sec\alpha$ রেখার $m=\sin\alpha$, $c=a\sec\alpha$.

স্পর্শকের শর্ত হল : $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$; $a=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ শর্তানুসারে, $a \sec \alpha = \pm a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

বা, $\sec^2 \alpha - 1 = \sin^2 \alpha$

বা, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = 1 - \cos^2 \alpha$

বা, $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - (1-\cos^2\alpha) = 0$

বা, $(1-\cos^2\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) = 0$

$\therefore$ উভয় উৎপাদক থেকেই $\cos^2\alpha = 1$

উদা. 6. দেখাও যে, অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের যে অংশ ঐ বিন্দু নিয়ামক দ্বারা সীমাবদ্ধ তা নাভিতে সমকোণ উৎপন্ন করে।

ধর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ এবং $P(at^2, 2at)$ অধিবৃত্তস্থ যে কোন বিন্দু। P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হল $ty = x + at^2$ এবং স্পর্শকটি $x = -a$ নিয়ামককে যদি K বিন্দুতে ছেদ করে তবে K বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল $(-a, at - a/t)$.

যেহেতু নাভি S-র স্থানাঙ্ক (a, o)। অতএব PS এবং SK রেখার m-দ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{2at - o}{at^2 - a} \cdot \dfrac{o - (at - a/t)}{a - (-a)} = \dfrac{2t}{t^2 - 1} \cdot \dfrac{-(t^2-1)}{2t} = -1$

$\therefore$ PS রেখা SK রেখার উপর লম্ব অর্থাৎ $\angle KSP = 90^\circ$.

উদা. 7. যে বিন্দুর কোটি 6 সেই বিন্দুতে $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

আলোচ্য বিন্দুর ভুজ $x = \frac{1}{12}y^2 = \frac{1}{12}.6^2 = 3$

$\therefore$ $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তে $(3, 6)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হল :

$y \times 6 = 6(x+3)$ বা, $y = x + 3$

উদা. 8. পরস্পর সমকোণে অবস্থিত অধিবৃত্তের স্পর্শকগুলোর ছেদবিন্দুর সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

অধিবৃত্তের সমীকরণ : $y = mx + \dfrac{a}{m}$ অর্থাৎ $m^2x - my + a = 0 \cdots$ (i)

(i) নং স্পর্শকের সঙ্গে সমকোণে অবস্থিত স্পর্শকের সমীকরণ :

$y = (-1/m)x + \dfrac{a}{(-1/m)}$ বা, $x \neq my + am^2 = 0$ ...(ii)

নির্ণেয় সঞ্চারপথ হল (i) ও (ii) সমীকরণের m-অপনয়ক।

(i) ও (ii) যোগ করে

$$(m^2+1)x+a(1+m^2)=0 \qquad \text{বা,} \quad (m^2+1)(x+a)=0$$

$$\therefore \quad x+a=0 \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় সঞ্চারপথ } \mathbf{x+a=0}$$

উদা. 9. কোন সরলরেখা যথাক্রমে $x^2+y^2=2a^2$ বৃত্ত এবং $y^2=8ax$ অধিবৃত্ত উভয়কেই স্পর্শ করে। ঐ সরলরেখার সমীকরণ কি? [C. U. '55]

ধর, নির্ণেয় সমীকরণ $y=mx+c$

যেহেতু এটি $x^2+y^2=2a^2$ কে স্পর্শ করে, অতএব

$$c^2=2a^2(1+m^2) \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

আবার, এটি $y^2=8ax$ কে স্পর্শ করে বলে

$$c=\frac{2a}{m} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \text{(i) ও (ii) থেকে} \quad \left(\frac{2a}{m}\right)^2=2a^2(1+m^2)$$

$$\text{বা,} \quad \frac{2}{m^2}=(1+m^2) \qquad \text{বা,} \quad m^4+m^2-2=0$$

$$\therefore \quad m=\pm 1 \qquad (\because \quad m^2=-2 \text{ থেকে } m \text{ কাল্পনিক})$$

$$\therefore \quad c=\pm 2a \qquad \therefore \quad y=\pm x \pm 2a$$

বা, $\mathbf{x \pm y+2a=0}$ নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 10. দেখাও যে, $2x+4y=9$ রেখা $y^2=8x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব। ঐ রেখা থেকে কর্তিত জ্যা-র দৈর্ঘ্য কত? [C. U. '50]

$y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে কোন অভিলম্বের সমীকরণ

$$y=mx-4m-2m^3 \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

প্রদত্ত রেখার $m=-\frac{1}{2}$; অতএব নির্ণেয় অভিলম্ব হল

$$y=-\tfrac{1}{2}x-4(-\tfrac{1}{2})-2(-\tfrac{1}{2})^3=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{9}{4}$$

বা, $\mathbf{2x+4y=9}$

এটি $y^2=8x$ অধিবৃত্তকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার y-মান নিম্নোক্ত সমীকরণ সিদ্ধ করে :

$$y^2=8(9-4y)/2 \qquad \therefore \quad y=2,\ -18$$

এক্ষণে, $y=2$ হলে $x=\frac{1}{2}$ এবং $y=-18$ হলে $x=\frac{81}{2}$

$$\therefore \quad \text{জ্যা-র নির্ণেয় দৈর্ঘ্য}=\sqrt{(81/2-\tfrac{1}{2})^2+(-81-2)^2}$$

$$=\sqrt{1600+400}=\mathbf{20\sqrt{5}}$$

উদা. 11. দেখাও যে, কোন অধিবৃত্তে অঙ্কিত দুটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর কোটি ঐ স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুর কোটির সমান্তর মধ্যক।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$yy_1 = 2a(x+x_1) \quad \text{এবং} \quad yy_2 = 2a(x+x_2)$$

স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর পক্ষে

$$y(y_1 - y_2) = 2ax_1 - 2ax_2$$

$$= \tfrac{1}{2}(y_1^2 - y_2'^2) = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$

$$\therefore \quad \mathbf{y} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2})$$

∴ ছেদবিন্দুর কোটি = স্পর্শবিন্দুর কোটিদ্বয়ের সমান্তর মধ্যক।

উদা. 12. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের কোন অভিলম্ব অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সেই বিন্দু থেকে ঐ অভিলম্বের সঙ্গে সমকোণে একটি রেখা টানা হল। দেখাও যে, ঐ রেখা সর্বদাই একটি সমান অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে।

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে কোন অভিলম্বের সমীকরণ

$$y = mx - 2am - am^3$$

ঐ অভিলম্ব অক্ষকে $(2a + am^2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$(2a + am^2, 0)$-বিন্দুগামী ও অভিলম্বের সঙ্গে সমকোণে কোন রেখার সমীকরণ

$$y = m_1(x - 2a - am^2)$$

এখানে $m_1 = -\dfrac{1}{m}$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $y = m_1(x - 2a - a/m_1^2)$

$$= m_1(x - 2a) - a/m_1$$

যেহেতু সমীকরণটি $y = mx + \dfrac{a}{m}$ আকারের, অতএব এটি সর্বদাই একটি সমান অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পষ্টত অধিবৃত্তের সমীকরণ $\mathbf{y^2 = -4a(x - 2a)}$

অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(2a, 0)$ এবং অবতলত্ব x অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর।

উদা. 19. নাভিদ্বয় থেকে উপবৃত্তের কোন স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের গুণফল অর্দ্ধ-উপাক্ষের বর্গের সমান।

ধর, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ যে কোন উপবৃত্ত।

এর যে কোন স্পর্শকের সমীকরণ : $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

নাভি $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ থেকে স্পর্শক অঙ্কিত **লম্বদ্বয়ের গুণফল** হল :

$$\frac{m\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{-m\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\{-m^2(a^2-b^2)+a^2m^2+b^2\}/(1+m^2)$$

$$=\frac{m^2b^2+b^2}{1+m^2}=\frac{b^2(1+m^2)}{1+m^2}=b^2$$

উদা. 14. দেখাও যে, $3y=4x+11$ রেখাটি $2x^2+3y^2=11$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$3y=4x-11 \quad \cdots(1) \qquad 2x^2+3y^2=11 \quad \cdots(2)$$

(1) থেকে y এর মান (2)-এ বসিয়ে

$$2x^2+3\frac{(4x+11)^2}{9}=11 \qquad \text{বা,} \quad x^2+4x+4=0$$

বা, $(x+2)^2=0$ $\therefore$ $x=-2, -2$ কাজেই $y=1, 1$

$\therefore$ $3y=4x+11$ রেখা $(-2, 1)$ **বিন্দুতে উপবৃত্তটির স্পর্শক**।

উদা. 15. নিম্নোক্ত ক্ষেত্রদুটিতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) (4, 3) বিন্দুতে $20x^2+36y^2=405$ উপবৃত্তে

(ii) যে বিন্দুর ভুজ 2 সেই বিন্দুতে $7x^2+8y^2=36$ উপবৃত্তে।

(i) উপবৃত্তের সমীকরণ : $20x^2+36y^2=405$

অতএব, (4, 3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ :

$$20x.4+36y.3=405 \quad \text{বা,} \quad \mathbf{80x+108y=405} \qquad \cdots(i)$$

ধর, (4, 3) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y-3=m(x-4)$ $\cdots$(ii)

যেহেতু (ii) সমীকরণ (i)-এর সঙ্গে লম্ব

$\therefore$ $m(-80/108)=-1$ বা, $m=108/80=27/20$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $y-3=\frac{27}{20}(x-4)$

বা, $\mathbf{27x-20y-48=0}$ $\cdots$(iii)

(ii) যেহেতু $x=2$ $\therefore$ $7.2^2+8y^2=36$ বা, $y=\pm1$

$\therefore$ $(2, \pm1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$7x.2\pm8y.1=36 \quad \text{বা,} \quad \mathbf{7x\pm4y=18} \qquad \cdots(i)$$

ধর $(2, \pm 1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $(y \mp 1) = m(x-2)$

$\therefore \quad m(\mp 7/4) = -1 \qquad$ বা, $\quad m = \pm 4/7$

$\therefore$ অভিলম্বের নির্ণেয় সমীকরণ : $\quad y \mp 1 = \pm \frac{4}{7}(x-2)$ বা, $\quad 4x \mp 7y = 1$

উদা. 16. $(2, 1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব এবং $x^2 + 4y^2 = 8$ উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ জ্যা-র দৈর্ঘ্য নিরূপণ কর।

$(2, 1)$ বিন্দুতে স্পর্শক : $\quad 2x + 4y = 8$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ : $2(x-2) = y - 1 \quad$ বা, $\quad y = 2x - 3$

এটি উপবৃত্তকে আবার এমন বিন্দুতে ছেদ করে যার

$$x^2 + 4(2x-3)^2 = 8 \quad \text{বা,} \quad 17x^2 - 48x + 28 = 0$$

বা, $\quad x = 2 \qquad$ বা, $\quad 14/17 \quad \therefore \quad y = 1$ বা, $\quad -23/17$

$\therefore$ জ্যা-র দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{(2-14/17)^2 + (1+23/17)^2\}} = \frac{20}{17}\sqrt{5}$

উদা. 17. $(4, -3)$ বিন্দুতে $\dfrac{(x+1)^2}{5} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমীকরণ : $\quad \dfrac{(x+1)(4+1)}{5} - \dfrac{(y-1)(-3-1)}{4} = 1$

সরল করে : $\quad x + y - 1 = 0$

উদা. 18. $-\dfrac{(x-5)^2}{96} + \dfrac{(y+3)^2}{49} = 1$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শক $x + 2y - 7 = 0$ রেখার সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত তার সমীকরণ নিরূপণ কর

স্পর্শকের m-মান $= 2$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ : $\; y + 3 = 2(x-5) \pm \sqrt{196 - 96}$

বা, $\quad 2x - y - 3 = 0$ এবং $\; 2x - y - 23 = 0$

উদা. 19. দেখাও যে, কোন পরাবৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ঐ বিন্দুর সঙ্গে নাভিদ্বয় যুক্ত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তার অন্তর্দ্বিখণ্ডক।

ধর, $P(x_1, y_1)$ আলোচ্য বিন্দু এবং F, F' নাভিদ্বয়।

স্পর্শকের সমীকরণ : $\quad \dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2} = 1$

ঐ স্পর্শকের m-মান হল : $\quad m_1 = \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$

PF' রেখার m-মান হল : $\quad m_2 = y_1/(x_1 + ae)$

$\therefore$ PF′ ও স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণ θ_{12} হলে

$$\tan\theta_{12}=(m_2-m_1)/(1+m_1m_2)$$

$$=\frac{y_1/(x_1+ae)-b^2x_1/a^2y_1}{1+\frac{y_1}{x_1+ae}\cdot\frac{b^2x_1}{a^2y_1}}$$

$$=\frac{-a^2b^2-aeb^2x_1}{a^2e^2x_1y_1+a^3ey_1} \quad \text{(সরল করে)}$$

$$=-b^2/aey_1$$

অনুরূপে, PF এবং স্পর্শকের মধ্যবর্তী কোণের ট্যাঞ্জেণ্টও $-b^2/aey_1$.

উদাহরণমালা 6

1. নিচের বৃত্তগুলির উদ্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) $x^2+y^2-4x=9$, $(-1, 2)$ বিন্দুতে

(b) $x^2+y^2-6x+8y-5=0$, $(3, 0)$ বিন্দুতে

(c) $x^2+y^2-3x+4y=0$, $(2, -1)$ বিন্দুতে

(d) $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$, $(h+a\cos\alpha, k+a\sin\alpha)$ বিন্দুতে

2. নিচের কণিকগুলোর প্রদত্ত বিন্দুতে (i) স্পর্শক ও (ii) অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(a) $y^2=8x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তদ্বয়

(b) $y^2=12x$ অধিবৃত্তের $(2, 4)$ বিন্দুতে

(c) $3x^2+4y^2=12$ উপবৃত্তের $(4, -3)$ বিন্দুতে

(d) $4x^2-9y^2=1$ পরাবৃত্তের $(2, -1)$ বিন্দুতে

3. $25x^2-9y^2=225$ পরাবৃত্তের মূলবিন্দুগামী যে জ্যা উভয় অক্ষের সঙ্গে সমান কোণ উৎপন্ন করে তার দৈর্ঘ্য কত? [পঃ বঃ উঃ মাঃ 1960]

4. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটি $y=mx+c$ সরলরেখা থেকে কত দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে। এ থেকে সরলরেখাটির বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত নিরূপণ কর।

5. দেখাও যে,

(i) $3x+4y+7=0$ রেখা $x^2+y^2-4x-6y+12=0$ বৃত্তের স্পর্শক

(ii) $x+y=2+\sqrt{2}$ রেখা $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ বৃত্তের স্পর্শক

উভয়ক্ষেত্রেই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $x^2+y^2=3$ বৃত্তের যে স্পর্শকদ্বয় x-অক্ষের সঙ্গে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. যদি $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ রেখা $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে দেখাও যে, $a \cos \alpha + b \sin \alpha = p \pm r$

8. $x^2+y^2-6x+4y=12$ বৃত্তের যে স্পর্শক দুটি $4x+3y+5=0$ রেখার সমান্তরাল তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্তের যে স্পর্শকগুলো $3x-4y-1=0$ রেখার (i) সমান্তরাল এবং (ii) সমকোণে তাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. c-র মান কত হলে $y+mx+c$ রেখা m-র যে কোন মানেই $x^2+y^2=4y$ বৃত্তের স্পর্শক ?

[Rajputana 1950]

11. কোন বৃত্তের কেন্দ্র (α, β) এবং বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী। দেখাও যে, মূল বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকে সমীকরণ $\alpha x + \beta y = 0$.

[Rajputana 1942]

12. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। দেখাও যে, $x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+g^2+f^2=0$

[কলিঃ বিশ্বঃ 1947]

13. (f, g) বিন্দু থেকে $x^2+y^2=6$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2+y^2-3x+3y=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দ্বিগুণ। দেখাও যে, $f^2+g^2+4f+4g+2=0$.

[কঃ বিঃ]

14. $(7, 2)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2+5x+y-15=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কত ?

15. যে বিন্দুর কোটি 8 সেই বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. নিম্নোক্ত শর্ত পূরণ করে $x^2=8x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) স্পর্শক $2x-3y+1=0$ রেখার সমান্তরাল

(ii) স্পর্শক $x+2y+7=0$ রেখার সঙ্গে লম্ব।

17. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক $y=3x+5$ রেখার সঙ্গে $45°$ কোণে অবস্থিত তার সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

[Rajputana 1943]

18. যদি $y=3x+1$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য কত ?

[Dacca 1949]

19. কোন অধিবৃত্তের উপস্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। $y^2=12x$ এবং $4x+2y+3=0$ স্পর্শকের ক্ষেত্রে উপপাদ্যটির সত্যতা যাচাই কর। দেওয়া আছে, স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $(3/4, 3)$। [কঃ বিঃ 1950]

20. a-র মান কত হলে $y=x+3$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করবে?

21. দেখাও যে, $7x+6y=13$ রেখা $y^2-7x-8y+14$ বক্ররেখার স্পর্শক। [বেনারস 1945]

22. দেখাও যে, $x+my+am^2=0$ রেখা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? [এলাহাবাদ 1945]

23. $x+y=3$ রেখা $y^2=4x$ অধিবৃত্তের অভিলম্ব। ঐ রেখা থেকে অধিবৃত্তটি কত দৈর্ঘ্যের জ্যা ছিন্ন করে?

24. $x^2=4ay$ অধিবৃত্তের যে অভিলম্ব x-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রাজপুতানা 1942]

25. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের কোন্ বিন্দুতে ঐ অধিবৃত্তের অভিলম্ব অধিবৃত্তের অক্ষের সঙ্গে 60° কোণ উৎপন্ন করে? [কঃ বিঃ 1948]

26. দেখাও যে, $(5, 6)$ বিন্দুতে $x^2+y^2-5x+2y+48=0$ বৃত্তের স্পর্শক $5y^2+448x=0$ অধিবৃত্তের স্পর্শক। (কঃ বিঃ 1949)

27. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

28. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের কোন নাভিগামী জ্যার অংশদ্বয়ের দৈর্ঘ্য l ও l' হলে দেখাও যে, $\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a}$ (কঃ বিঃ 1951)

29. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের তিনটি বিন্দু (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3)-তে অঙ্কিত অভিলম্বত্রয় এক বিন্দুতে মিলিত হলে দেখাও যে, $y_1+y_2+y_3=0$ (রাজপুতানা, 1949)

30. দেখাও যে, কোন অধিবৃত্তের পরস্পর লম্ব দুই স্পর্শকের ছেদ বিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ অধিবৃত্তের নিয়ামক। (কঃ বিঃ 1944)

31. যে বিন্দুদ্বয়ের ভুজের অনুপাত 16 : 1 সেই দুই বিন্দুতে $y^2=4x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। (এলাহাবাদ, 1948)

32. যদি t_1, t_2 বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয় অধিবৃত্তের উপরে মিলিত হয় তবে দেখাও যে, $t_1t_2=2$

33. $(at_1^2, 2at_1)$ বিন্দুতে অভিলম্ব অধিবৃত্তকে আবার $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করলে দেখাও যে, $t_2 = -t_1 - 2/t_1$ (এলাহাবাদ, 1945)

34. নাভি থেকে সমান দূরে এবং অক্ষদ্বয়ে অবস্থিত দুটি ধ্রুববিন্দু থেকে অধিবৃত্তের কোন স্পর্শকের উপর দুটি লম্ব টানা হল। দেখাও যে, ওদের বর্গের অন্তর একটি ধ্রুবক।

35. দুটি রেখা পরস্পর লম্ব; একটি $y^2 = 3a(x+a)$ অধিবৃত্তকে এবং অন্যটি $y^2 = 4a'(x+a')$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু $x+a+a'=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

36. $x^2+y^2=2ax$ বৃত্তের এবং $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শকসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

37. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তটিকে $5y=3x+25$ রেখাটি স্পর্শ করে। উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা 3/5 হলে a ও b-র মান কত? (গৌহাটি, 1948)

38. $(4\cos\phi, 16\sin\phi/\sqrt{11})$ বিন্দুতে $6x^2+11y^2=256$ উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকটি $x^2+y^2-2y=15$ বৃত্তেরও স্পর্শক। ϕ-র মান কত? (রুড়কি, 1942)

39. দেখাও যে, $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}y^2=1$ উপবৃত্ত এবং $x^2+y^2=6$ বৃত্তের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1}\sqrt{116}$. (এলাহাবাদ, 1946)

40. যদি $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ রেখা $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হয় তবে দেখাও যে, $p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$. (আলিগড়, 1950)

41. উপবৃত্তের কোনও নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব উপাক্ষের একটি প্রান্তবিন্দুগামী হলে প্রমাণ কর যে, $e^4+e^2+1=0$ এবং পরাক্ষ ও উপাক্ষের অনুপাত নির্ণয় কর।

(এলাহাবাদ, 1944, '47)

42. দেখাও যে, $y=mx+c$ রেখা থেকে $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ উপবৃত্ত যে জ্যা ছিন্ন করে তার দৈর্ঘ্য ও মধ্যবিন্দু যথাক্রমে

$$2b\sqrt{\left\{\left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2m^2+b^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{a^2m^2-b^2}\right)\right\}}$$

এবং $\left(-\dfrac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}, \dfrac{b^2c}{a^2m^2+b^2}\right)$

43. $2x^2+y^2=17$ উপবৃত্তের যে স্পর্শক (i) $4x-3y=12$ রেখার সমান্তরাল তার এবং (ii) $3x+4y=9$ রেখার সঙ্গে লম্ব তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

44. $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ রেখার যে অংশকে $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ উপবৃত্ত ছেদ করে তা উপবৃত্তের কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করলে দেখাও যে, রেখাটি উপবৃত্তের সমকেন্দ্রিক এবং $ab/\sqrt{a^2+b^2}$ ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

(**এলাহাবাদ**, 1946)

45. দেখাও যে, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ উপবৃত্তের কোন স্পর্শকের যে অংশ অক্ষদ্বারা ছিন্ন হয় তার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $a^2y^2 + b^2x^2 = 4x^2y^2$.

(**এলাহাবাদ**, 1958)

46. $4x^2 - 9y^2 = 1$ পরাবৃত্তের যে স্পর্শক $4y = 5x + 7$ রেখার সমান্তরাল তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

47. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ পরাবৃত্তের অভিলম্ব অক্ষদ্বয়কে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। MP ও NP অক্ষদ্বয়ের সমকোণে অঙ্কিত দুটি রেখা। দেখাও যে, P-র সঞ্চারপথ একটি পরাবৃত্ত এবং তার সমীকরণ $a^2x^2 - b^2y^2 = (a^2+b^2)^2$.

48. e উৎকেন্দ্রতাযুক্ত কোন পরাবৃত্তের P বিন্দুতে আঁকা অভিলম্ব তির্যক অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষকে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, LM-র সঞ্চারপথ $e/\sqrt{e^2-1}$ উৎকেন্দ্রতাযুক্ত একটি পরাবৃত্ত।

উত্তরমালা

বীজগণিত

Exercise 1

1. $x=6, y=3$ 2. $b=2\sqrt{3}, a=20\frac{1}{4}, b=\pm 2\sqrt{a}$ 3. (i) $l \propto t^2$
(ii) $a \propto \frac{1}{x^2}$ 4. $38\frac{4}{7}$ 5. ভেদ ধ্রুবক তিনটির গুণফল 1 হইবে

8. $a=2b+3/b$; 7 9. $x=1+2y+3y^2$ 10. 10 বা, 8

16. $38\frac{1}{2}$ বর্গফুট 17. 1024 ফুট এবং 240 ফুট 18. 6 ইঞ্চি

19. 16 দিন 20. 3185 টাকা 21. 7 ফুট

22. $20(\sqrt{2}-1)$ সে.মি. 23. 143 (প্রশ্নে 14 থানার পরিবর্তে 4 থানা বসী হইবে)

24. 8 : 21 26. 40 ঘন ইঞ্চি 28. 100000 টা.

29. $32\frac{5}{32}$ gm. 30. 108 : 25

33. Q, P এর সহিত সরলভেদে এবং W এর সহিত বিপরীত ভেদে পরিবর্তিত হয়; Q, 50% হ্রাস পাইবে।

Exercise 2

1. $47, 3p+2$ 2. 2 3. $a, a+b, a+2b, \cdots\cdots$

4. -3 of, -2 5. 160 তম পদ, $(p-q)$ তম পদ 6. না।

7. (i) $a+1-\frac{1}{n}$ (ii) $\frac{1}{n}-1+n$ 8. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. প্রথম পদ $=p+q-1$, সাধারণ অন্তর $=-1$ 10. $m+n-p$

12. 2, 5, 8, 11,... 13. 0 15. (i) 20 (ii) 11
(iii) $-22{\cdot}5$ (iv) a^2+b^2 (v) $\frac{m^4+n^4}{m^4-n^4}$

16. $\frac{11}{2}, 9, \frac{25}{2}, 16, \frac{39}{2}$ 17. $9\frac{3}{4}, 17, 24\frac{1}{4}, 31\frac{1}{2}, 38\frac{3}{6}, 46, 53\frac{1}{4}$

18. 26 19. 19 20. 465

21. 144 22. 2380 23. 108

24. 290 25. $-\frac{3}{2}$ 26. $-67{\cdot}5$

27. $2n^2-5n+3$ 28. $21\sqrt{2}(1-10\sqrt{2})$ 29. $\frac{1}{2}n(n-1)$

30. 3927　31. $\frac{n}{2}a\{(n+3)-b(n+5)\}$　32. $\frac{1}{2}(n+1)$

33. $n\{x^2+y^2+(3-n)xy)$　34. -90　35. 19096

36. 132　37. $n(2n+1)$　38. 299

39. 14　40. 1301, 50　41. 9075

42. 900　43. 19　44. 661

45. পদসংখ্যা 10 অথবা 12, শেষপদ 3 অথবা -1　46. 79

47. 39 : 37　52. 8, 12, 16 বা 16, 12, 8

53. 5, 7, 9, 11, বা, 11, 9, 7, 5　57. 9 : 17　58. 5, 7, 9 অথবা 9, 7, 5

61. $2\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}$ অথবা, $8\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}, 4\frac{5}{2}, 2\frac{1}{2}$　63. 25 মাস

64. 16 জন　65. 9 দিন　66. 20টা. 25 পয়সা ; মোট খরচ 51·51 টাকা　67. 82·50 টাকা

Exercise 3

1. $\frac{1}{6}n(4n^2+3n-1)$　2. $\frac{n}{3}(n^2+6n+1)$　3. $n(2^2+10n+16)$

4. $\frac{n}{3}(4n^2-1)$　5. $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$

6. $\frac{n}{2}(6n^2+21n+23)$　7. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

8. $\frac{n}{3}(4n^2+18n-1)$　9. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$

10. $\frac{n}{4(n+1)}$　11. $\frac{n}{n+1}$　12. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

13. $-\frac{n}{2}$ যখন n যুগ্ম, $\frac{n+1}{2}$ যখন n অযুগ্ম　14. $n(4n^2+9n+6)$

15. $-\frac{1}{2}r(r+1)$ যখন r যুগ্ম, $\frac{1}{2}r(r+1)$ যখন r অযুগ্ম,

16. $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$　17. $\frac{1}{6}n(2n^2-3n+31)$

18. $\frac{1}{6}n(8n^2+3n+1)$　19. $-n(2n+1)$

Exercise 4

1. 243　2 -2187　3. $\frac{512}{19683}$ (প্রশ্নে ৩য় পদ $\frac{8}{27}$ হইবে)

4. $\frac{1}{2^{n-5}}$　5. $\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$　6. 8　7. 2　8. 2

9. p-তমপদ $\sqrt{mn}$; q-তমপদ $= \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1-p}{2q}}$ 11. 8, 12, 18 অথবা 18, 12, 8 (প্রশ্নে 52 এর পরিবর্তে 38 হইবে) 12. $\left(\frac{a^{n-q}}{b^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$

13. ± 16 14. ± 6 15. 12, 36, 108 বা, $-12, 36, -108$

16. $\frac{1}{3}$, 1, 3 বা, $-\frac{1}{3}$, 1, -3 18. 18, 8 25. 1, 4, 16 বা, 16, 4, 1

Exercise 5

1. 9141 2. $60\frac{7}{9}$ 3. $255\frac{3}{4}$

4. $121(3+\sqrt{3})$ 5. $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 6. $\frac{4.10^{n-1}-1}{3.10^n}$

7. $\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 8. $39\frac{9}{16}$ 9. 1530

10. $\frac{A\{1-(1+i)^n\}}{i(1+i)}$ 11. 8190 12. 1524

13. $\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 14. 8 15. 7

16. 1092 17. 1, 8, 64 বা, 68, 8, 1

18. 12 মাসে, 11-তম কিস্তি 4096 টাকা

21. $\frac{70}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{7n}{9}$ 22. $\frac{4}{9}n-\frac{4}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

23. $2^{n+1}-n-2$ 24. $n.2^n$ 25. $\frac{5^{n+1}-5n-4}{16.5^{n-1}}$

27. 3, 6, 12 অথবা, 12; 6, 3 28. 2, 5, 8 অথবা, 8, 5, 2 (প্রশ্নে ২য় পদের সহিত 5 এর পরিবর্তে 10 যুক্ত হইবে) 31. $\frac{ac-b^2}{a-2b+c}$

32. 3, 9, 27 বা, 27, 9, 3 34. 4161 40.

Exercise 5A

1. $\frac{3}{8}$ 2. $\frac{1}{31}$ 3. $\frac{60}{16-n}$

Exercise 6

1. 1 2. a^{n^2-1} 3. $\frac{1}{x^{p^2+q^2}}$ 4. 1

5. 1 15. 3 16. 5 17. $\frac{3}{2}$

18. 3 19. 3 20. 1, 2 21. $x=1, y=1$

22. $x=a,\ y=a$ বা, $x=a^{-1}, y=a^{-1}$ 23. $x=1, y=\frac{1}{2}$

24. $x=y=z=\frac{1}{3}a$

Exercise 7

1. (i) $9\sqrt{3}-9\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}-6+2\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}$ (ii) $\sqrt[3]{2}+1$

2. (i) $\frac{1}{3}(2-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5})$ (ii) $a+x+\sqrt{x(a+x)}$

(iii) $3(\sqrt[3]{2}-1)$ 3. $2(x^2+\sqrt{x^4-1})$ 4. $\dfrac{6\sqrt{5}+42}{11}$

5. $6\sqrt{6}$ 8. (i) $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ (iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{7}+1)$

(iii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(5-\sqrt{7})$ (iv) $\pm\left\{\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right\}$

(v) $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ (vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+1}\right)$

(vii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a}+\sqrt{a+2b})$ (viii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{y-z}-\sqrt{z-x}+\sqrt{x+y})$

(ix) $\pm(\sqrt{3x-1}+\sqrt{1-2x})$ (x) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}$

9. (i) $1+\sqrt{2}$ (ii) $1-\sqrt{7}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 10. x

14. 0 15. $6\sqrt{6}$

Exercise 8

1. (i) $\pm(3+i)$ (ii) $\pm(4+7i)$ (iii) $\pm(3+2i)$

(iv) $\pm(1-i)$ (v) $\pm(a-i)$ (vi) $\pm(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$

(vii) $\pm(3i-1)$ (viii) $\pm\left(x+\frac{1}{x}+2i\right)$

2. (i) $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$ (ii) $(a+ib)(a-ib)$

(iii) $(a+i\sqrt{ab}-b)(a-i\sqrt{ab}-b)$

(iv) $(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$

4. (i) $\frac{1}{7}(6+2\sqrt{5}i+3\sqrt{3}i-\sqrt{15})$ (ii) $\frac{1}{19}(4+\sqrt{-3})$

(iii) $-\frac{52}{25}i$ (iv) $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}i$ 5. (i) $\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$

(ii) $\frac{24}{25}+i\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{18}{13}+i\frac{1}{13}$ (iv) $0+i$

(v) $\frac{4}{7}-i\frac{\sqrt{6}}{14}$ (vi) $-5+40i$ 6. (i) 5 (ii) 13 (iii) $\frac{5}{13}$

(iv) $\sqrt{\frac{10}{13}}$ 19. $(1-yz-zx-xy)^2+(x+y+z-xyz)^2$

21. $x=\frac{4}{7}, \frac{\sqrt{6}}{14}$

Exercise 9

2. (i) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ (ii) $\frac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$ (iii) $\frac{6^2-2ac}{a^4c^4}(6^4-4ab^2c+a^2c^2$

(iv) $\frac{b^2(b_2-4ac)}{a^2c^2}$ (v) $\frac{-3b}{ac+2b^2}$

3. (i) $\frac{3pq-p^3}{q^3}$ (ii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$

(iv) $\frac{p(p^2-4q)(q-p^2)}{q}$ (v) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$

4. (i) $x^2+2x-35=0$ (ii) $x^2-4x+1=0$

(iii) $x^2-2(a^2+1)x+(a^2-1)^2=0$

5. (i) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ (ii) $acx^2+(2ac-b^2)x+ac=0$

(iii) $acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$ (iv) $acx^2-bx+1=0$

6. $x^3-50x+49=0$ 7. $x^2-40x+384=0$

8. (i) $x^2-10x+22=0$ (ii) $x^2+6x+29=0$

10. $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$, যদি $x^2+px+q=0$ এর বীজ α, β, হয়।

13. $4x^2-12x+5=0$ 16. $rx^2+qx+p=0$ 19. $x^2-14x+48=0$

Exercise 10 (পাঠ্যপুস্তকে Ex. 9A-র পরিবর্তে 10 ধরিবে)

1. (i) বাস্তব, অসমান, অমূলদ (ii) বাস্তব, অসমান, মূলদ।

(iii) কাল্পনিক (iv) বাস্তব, অসমান, মূলদ। 5. 9 অথবা 5

6. 9 7. (i) 2, $\frac{1}{2}$ (ii) $-\frac{2}{3}$ 13. (i) $q=0$ (ii) $p=q=0$

14. (i) $(n+1)^2ac=b^2n$ (ii) $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}=-\frac{b}{a}$

24. (i) বাস্তব ও ধনাত্মক (ii) বাস্তব ও ঋণাত্মক।

Exercise 11

(পাঠ্যপুস্তকের Ex. 10-এর পরিবর্তে Ex. 11 ধরিবে)

1. ধনাত্মক 2.. ঋণাত্মক 4. x এর মান -3 ও $\frac{1}{7}$ এর মধ্যে থাকিবে। সর্বনিম্ন মান $-\frac{49}{8}$ হইবে। 7. সর্বাধিক মান 7 এবং $x=-\frac{2}{3}$
13. 4 17. 3 এবং $\frac{1}{3}$ 22. $a+b=0$ 23. ± 5
24. $(aa'-bb')^2+4(a'h'+bh')(b'h+ah')=0$

Exercise 12

1. (i) 6720 (Ii) $\frac{11}{240}$ 4. 8 3. $m=6$, $n=2$
6. 120 7. 720 8. 180 9. 240
10. 20 11. 4989600, 453600 12. 2520, 720
13. 576 15. 210 16. 60 17. 2160
18. 36 19. 154 20. (i) 240 (ii) 480
21. (i) 3024 (ii) 2016 22. 576 23. 45360, 35280
25. 720, 600 26. 30240 27. 120 28. 2520
29. 1152 30. 28800 31. $\frac{\lfloor 3^9}{\lfloor 5\{\lfloor 4\}^2\{\lfloor 6\}^3}$
32. 120 33. 12 34. 1000 35. 1024
26. 4320 37. 36000 38. 3456.

Exercise 13

1. (i) 5050 (ii) 3276 2. 24 3. $n-1$ 4. $r=4$, $n=6$
7. 210 8. 840 9. 441 10. 990 12. 344
13. 3360 14. 120, 35 15. 120
16. (i) $\frac{1}{2}\{n(n-1)-m(m-1)+2\}$
(ii) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$
17. (i) 35 (ii) 35, উভয়ে সমান 18. 68 19. 255 20. 55
21. $\frac{\lfloor 22}{2\lfloor 11\lfloor 11}$ 22. $\frac{\lfloor 5^2}{(\lfloor 13)^4}$ 24. 200 25. 119
26. 1960, 1540 27. (i) 160 (ii) 2724 29. (i) 60 (ii) 24
31. 90 32. 136 34. 5 35. 15 37. 6 38. 32

Exercise 14

1. $32a^5 + 240x^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$

2. $1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 - 21x^{10} + 7x^{12} - x^{14}$

3. $x^8 - \frac{4}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{27x} - \frac{1}{81x^4}$

4. $x^6 + 6x^4a + 15x^2a^2 + 20x^3 + 15\frac{a^4}{x^2} + 6\frac{a^5}{x^4} + \frac{a^6}{x^6}$

5. 82 6. $2 + 8a^2 - 8a^4$ 7. $\frac{2835}{128}$ 8. $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-1 \lfloor n+1}$

9. -252 10. $-\frac{560x}{27}$, $\frac{280}{81x}$ 11. 70 12. 924

13. $1120x^4y^4$ 14. $-35\frac{y}{x}$, $35\frac{x}{y}$

15. ${}^{2n+1}C_r \left(\frac{a}{b}\right)^{2n-2r+1}$, $\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1}\cdot\frac{b}{a}$, $\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1}\cdot\frac{a}{b}$

17. 13440 18. -6435 19. -792 20. 4433

21. 252 22. 495 23. 495 24. -70

25. $\frac{7}{18}$ 27. $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$ 29. 1·1254 30. $10c^9$

31. ·997, 96059601 34. $r = n$

36. ২য় এবং ৩য় পদ, 1152 37. $\frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor n-r+1}\{2^{n-r+1} - 1\}$

Exercise 14A

1. 462 2. 4-তম পদ 3. 6-তম পদ

4. ${}^{13}C_5 2^{18} 3^{21}$ 5. 1 6. 4725000

7. 1 9. $\frac{6}{7} < x < \frac{7}{6}$ 10. $a = 2$, $x = 3$, $n = 6$

11. 7 12. 12 14. 4

Exercise 14B

1. $1-5x+15x^2-35x^3+\cdots$ 2. $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots$

3. $1-6x+24x^2-80x^3+\cdots$ 4. $1-\frac{3}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots$

5. $8+9x+\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{128}x^3+\cdots$ 6. $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^3}+\frac{3}{8x^5}-\frac{5}{16x^7}+\cdots$

7. $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\cdots$ 8. $\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\left(1+\frac{6}{5}x^2+\frac{81}{50}x^4+\frac{567}{250}x^6+\cdots\right)$

9. $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots$

10. চতুর্থ পদ $=10x^2$, সাধারণ পদ $=\frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$

11. $\dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-2)n+1\}}{n^{r-1}\lfloor r-1}\cdot\dfrac{r^{r-1}}{-\frac{1}{a^n}+r-1}$

12. $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3).2^r x^r$ 13. $\dfrac{(n+1)(2n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}$

14. $\dfrac{1.4.7\cdots(3r-2)}{\lfloor r}x^r$ 15. $\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}\cdot x^r$

16. $\dfrac{1.3.5\cdots(2r-5)}{\lfloor r\, 2^{2r-3}}3^{r+1}x^r$

18. $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots$ ($\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ এর পরিবর্তে $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ হবে)

19. $\frac{2187}{512}$ 20. $-\frac{27}{128}$ 21. 121

22. $-\frac{2}{243}$, $\frac{r-5}{3^{r+2}}$ 23. 1, $(-1)^r$ 24. $2n^2+2n+1$

27. নবম পদ 28. $-\frac{1}{2x^3}$ 29. 2টি পদ

30. চতুর্থ পদ এবং পঞ্চম পদ 31. $\frac{143}{8}x^2$ 32. 10·0995

33. 1·0198 34. 4·9920 35. 1·2599

36. ·213 37. 4·9597 40. $\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots$

44. $1+\frac{13}{6}a$.

Exercise 15

1. $\frac{3}{2}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $2\sqrt{2}$ 5. $\frac{3}{2}$
6. $2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 7. a 8. $\frac{3}{2}$ 14. $\sqrt{3}$ 15. $\sqrt{\frac{2}{3}}$
16. $\sqrt[3]{4}$ 17. $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 18. 2 19. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 20. $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$
21. $(\frac{3}{2})^{-\frac{3}{2}}$ 22. $\frac{1}{24}$ 23. $4(2)^{\frac{1}{3}}-2$ 24. $\frac{19}{8}$ 25. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercise 16

1. (i) 6 (ii) 6 (iii) 2 (iv) 6 (v) $-\frac{4}{5}$
(vi) 12 (vii) 3 (viii) -3 2. (i) 6 (ii) 4
(iii) 5 (iv) sec α 15. $\frac{1}{5}(a+3b), \frac{1}{5}(a-2b)$
19. 1.

Exercise 16A

1. (i) 10 (ii) 8 (iii) 18 (iv) 23 (v) 36
(vi) 26 2. (i) 29 (ii) 84 (iii) 8 (iv) 14
3. (i) $\bar{2}\text{·}6532126$ (ii) ·4860760 (iii) $\bar{1}\text{·}9345759$
(iv) ·4621396 (v) 3·6532126 (vi) $\bar{1}\text{·}2730013$
5. $\bar{6}\text{·}2007583$ 6. 259·569 7. $\bar{2}\text{·}7780766$ 8. 1·197342
9. 2·406 10. ·41369 11. 37·6018 12. ·7400827
13. (a) 1·593 (b) 2·961 (c) 1·206 (d) 1·77
(e) ·03 (f) $x=2\text{·}71, y=1\text{·}71$ (g) $x=-1\text{·}34, y=-\text{·}30$
(h) 100, $\frac{1}{100}$ 14. 10·5675 15. 12·5
16. 166·7 বৎসর (প্রায়) 17. 3993 18. প্রায় 7 বার
19. 18·24.

Exercise 17

11. ·8187 13. $3e$ 14. 4 15. $\frac{e-e^x}{1-x}$ 16. $5e$
17. $(-1)^n.\frac{(n+1)^2}{n!}$ 18. $\frac{e^2 3^r}{r!}$ 19. $e(1+x+x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{8}x^4+\cdots)$

24. $2+\frac{x}{1!}+\frac{(2^2+1)x^2}{2!}+\frac{(2^3-1)x^3}{3!}+\frac{(2^4+1)x^4}{4!}+\frac{(2^5-1)x^5}{5!}+\cdots$

25. $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\cdots$

26. $4+\frac{2+2}{1!}x+\frac{2^2+2}{2!}x^2+\frac{2^3+2}{3!}x^3+\cdots$

27. $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!}+\cdots$

Exercise 17A

9. $(x^3-\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{3}x^9-\cdots)-(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots)$

r, 3 এর গুণিতক না হইলে x^r এর সহগ $-\frac{1}{r}$ এবং r, 3 এর গুণিতক হইলে x^r এর সহগ $\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{1}{r}\{3(-1)^{r+1}-1\}$

10. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots$; x^n এর সহগ $=\frac{1}{n}$

11. $\log_e \frac{3}{2}$ 12. $\log_e 3$ 13. $\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$

14. $-\frac{1}{3}\log_e(1-x^2)$

Exercise 18

1. 7·27 বৎসর (প্রায়) 2. 58·7 বৎসর প্রায় 3. 4·2%
4. 4936·29 টাকা 5. ·08 টাকা 6. 12·8%
7. 265329·75 টাকা 10. বাটা = 630·50 টাকা, বর্তমান মূল্য = 5261 টা.
11. $P(1-r)^n$ 12. 15 বৎসর (প্রায়)

Exercise 18A

1. 1335·56 টাকা (প্রায়) 2. 1257·8 টাকা (প্রায়)
3. 1979·12 টাকা 4. 123·29 টাকা 5. 450 টাকা
6. 14·2 বৎসর 7. 1156·62 টাকা 8. 9733 টাকা (প্রায়)
9. 246·50 টাকা

ত্রিকোণমিতি

উদাহরণমালা 1

1. 135°, 225°, 3°20′, 85°56′36″, 1°8′45″ (প্রায়). 75°

2. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{72}$, $\frac{2\pi}{25}$, $\frac{33\pi}{320}$, 0·789327 ($\pi=3·1416$ ধরে)

3. $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{5}$ 4. $\frac{(n-2)\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{7}$ 5. $22\frac{1}{2}°$, $\frac{\pi}{8}$ 6. $67\frac{1}{2}°$

7. 1·087, 0·913 8. 91°, 81° 9. 40°, 60°, 80° ; $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$

10. 0·0358 সেকেণ্ড (প্রায়) 11. $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{15}$

12. $\left.\begin{matrix}\pi/6, & \pi/3, & \pi/2\\ 30°, & 60°, & 90°\end{matrix}\right\}$ 13. 75°, 60°, 45°

14. $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$; $\frac{\pi}{21}$, $\frac{4\pi}{21}$, $\frac{6\pi}{21}$ 15. $\frac{\pi}{8}$ 16. 9 17. $\frac{1}{2}$ রেডিয়ান

20. 34°21′ (প্রায়) 21. 1·53 ফুট 22. 3436·36 ফুট (প্রায়)

23. 7·16 মিনিট 24. 2°52′ 25. 4 মিনিট $53\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড

26. $49\frac{1}{11}$ ইঞ্চি 27. 33 ফুট 28. 32 : 31

উদাহরণমালা 2

24. $\frac{13}{12}$, $\frac{5}{12}$ 26. $(p^2-q^2)/(p^2+q^2)$ 28. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\frac{p^2+q^2}{p^2-q^2}$

29. $\frac{2m}{m^2+1}$, $\frac{m^2+1}{m^2-1}$ 30. $\frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\frac{m^2-n^2}{2mn}$

32. $\frac{a+b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}$ 37. $(\sin\theta-\cos\theta)^2$

38. $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$ 39. $\pm\frac{3}{4}$ বা, $\pm\sqrt{5/2}$ 41. 1 বা 2

45. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 47. 0 61. (i) $\sqrt{3}/2$, (ii) 4/3, (iii) 3/2, (iv) 5/4, (v) 2 62. (i) 6 (ii) $16/3\sqrt{3}$ 63. (i) 60°, (ii) 30°, (iii) 60°, (iv) 30°, (v) 45° 64. $\frac{1}{2}$ 65. 16/63
67. $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 2\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}$ 68. -4
69. (i) $\sin\theta$, (ii) $\cot^2\theta$ 70. (i) 2, (ii) 2, (iii) 0 বা $\cos\alpha$ (n যুগ্ম বা অযুগ্ম অনুসারে) (iv) 1
71. (i) 90°, (ii) 60°, 300°, (iii) 60°, 90°, 120°, 240°, 270°, 300° (iv) 30°, 150°, 210°, 330°, (v) 60°, 300°, (vi) 30°, 120°, 210°, 300°

উদাহরণমালা 3

1. $\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}}{8}$ 2. $-\frac{85}{36}$

উদাহরণমালা 5

23. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
24. $\frac{1}{16}(\sqrt{5}-1)(6+\sqrt{2})-\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})$ এবং $\frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5+\sqrt{5}})+\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)$
36. $(b^2-a^2)/(b^2+a^2)$ 37. (i) $2n\pi-\pi/4$ এবং $2n\pi+\pi/4$ (ii) $2n\pi+5\pi/4$ এবং $2n\pi+7\pi/4$ (iii) $2n\pi+3\pi/4$ এবং $2n\pi+5\pi/4$
38. উভয়েই ধনাত্মক
39. না ; $2\sin\frac{A}{2}=\sqrt{1+\sin A}+\sqrt{1-\sin A}$

উদাহরণমালা 6

1. $n\pi\pm\pi/6$ 2. $n\pi\pm\pi/4$ 3. $2n\pi\pm2\pi/3$
4. $n\pi+\pi/2$, $n\pi\pm\pi/4$ 5. $n\pi$, $n\pi/2\pm\pi/12$
6. $n\pi/4$, $\frac{1}{3}n\pi+(-1)^n\pi/18$ 7. $2n\pi\pm\pi/3$, $(2k+1)\pi$
8. $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\pi/12$ 9. $\frac{r\pi}{p+(-1)^r q}$

10. $\frac{(4k+1)\pi}{2(q-p)}, \frac{(4k-1)\pi}{2(q+p)}$ 11. $2n\pi$ বা $(4n\pm1)\pi/2$ বা $(4n\pm1)\pi/5$

12. $(2n+1)\pi/2$ বা $(2n+1)\pi/4$ বা $(2n+1)\pi/8$ 13. $n\pi\pm\pi/3$

14. $2n\pi, 2n\pi\pm2\pi/3$ 15. $n\pi+(-1)^n\pi/6, (4n-1)\pi/2$

16. $n\pi+\pi/4$ বা $n\pi+\alpha$ যেখানে $\cot\alpha=\frac{1}{2}$ 17. $n\pi\pm\pi/4$

18. $(4n+1)\pi/8$ 19. $2n\pi$ বা $2n\pi-2\pi/3$

20. $2n\pi-7\pi/12, 2n\pi-\pi/12$

21. $2n\pi+7\pi/12$ বা $2n\pi+\pi/12$ 22. $2n\pi+\pi/4$

23. $2n\pi-\pi/4$ 24. $2n\pi+5\pi/12$ বা $2n\pi-\pi/12$

25. $2n\pi+\pi/12$ বা $2n\pi-\beta$ ($\beta=$একটি ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ যার সাইন $\frac{3}{5}$)

26. $2n\pi+\pi/2$ বা $2n\pi-\pi/6$

27. $2n\pi, \frac{1}{6}(4n+1)\pi$ 28. $2n\pi-\alpha, 2n\pi-\pi/2+\alpha$

29. (i) $(2n+1)\pi/2$ বা $n\pi+(-1)^n\pi/6$ (ii) $(2n+1)\pi/5$ বা $2n\pi/3$

30. $n\pi/3, n\pi\pm\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ 31. $\frac{1}{6}n\pi$ 32. $n\pi\pm\pi/6$

33. $\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$; [$\tan\alpha=2$]. 34. $(2n+1)\pi/24$ বা $n\pi/4$

35. $n\pi+(-1)^n\pi/6$ 36. $n\pi+\pi/4, 2n\pi+\pi/3$

37. $\theta=n\pi\pm\pi/4, \phi=n\pi\pm\pi/6$ 38. $\theta=n\pi\pm\pi/6, \phi=n\pi+\pi/3$

39. $n\pi/3+\pi/9$ 40. $n\pi\pm\pi/4$ বা $2n\pi\pm2\pi/3$

41. $n\pi+\frac{\alpha}{2}$; $(2n+1)\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{6}$

42. $2n\pi+\pi/2, 2n\pi-\pi/2+2\alpha$ (α হল $21^\circ48'$ এর রেডিয়ান)

43. $n.363^\circ+112^\circ40'$ বা $n.360^\circ$ 47. $x=y=\pi/4$

48. (i) $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ (ii) $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi/3, 4\pi/3$
(iii) $7\pi/12, \pi/12$

উদাহরণমালা 7

42. (i) 1 (ii) $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (iii) 0 বা $\frac{1}{2}$ (iv) 0 বা $\pm\frac{1}{2}$

(v) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vi) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (vii) $-\frac{3}{2}$, 3 (viii) $2-\sqrt{3}$ (ix) $\frac{a-b}{1+ab}$

(x) $\sqrt{3}$ (xi) $\frac{1}{6}$ (xii) $\pm\frac{1}{2}$ (xiii) $-461/9$ (xiv) 2

(xv) 2 (xvi) $x=\frac{1}{2}, y=1$ (xvii) $\pm\sqrt{\sin 2\beta}$

(xviii) $ab/\{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}\}$ 43. $\pm$ বা $(1\pm\sqrt{2})$

45. $(x-y)(1+yz)=(y-z)(1+xy)$

46. (i) 1 (ii) $\dfrac{x+y}{1-xy}$ (iii) $\frac{3}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{5})$ (iv) ∞

উদাহরণমালা 9

1. $4\sqrt{3}$, 90°
2. 60°, $\cos^{-1} 11/14$, $\cos^{-1} 1/7$
3. $\sqrt{6}/8$, $1/\sqrt{6}$, $\sqrt{3/2}$
4. $10\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}/7$

96. 4, $8\frac{1}{8}$

উদাহরণমালা 10

1. 113°34′41″
2. 55°46′16″
3. 104°28′39″ (প্রায়)
4. 58°59′33″
5. 88°59′40·9″
6. 48°11′23″, 58°24′43″, 73°23′54″
7. 112°37′2·8″ (প্রায়)
8. 71°42′ (প্রায়)
9. 132°34′32″ (প্রায়)
10. 78°28′13″
11. 55°46′16·14″ (প্রায়)
12. $b=18·46$, $c=37·16$, C = 70°30′
13. 769·8622
14. 152·41 (প্রায়)
15. 89·896 ফুট
16. 172·6436 ফুট
17. 27·0375
18. 765·4321, 1035·43
19. 76°47′2·2″, 49°12′57·8″
20. 22°36′, 12°36′
21. B = 38°12′47·6″ C = 21°47′12·4″
22. 70°53′36″, 49°6′14″
23. 116°33′54″, 26°33′54″
24. $a=1$, B = 120°, C = 30°
25. 94°42′54″
26. B = 71°44′29·5″, C = 41°15′30·5″
27. 78°17′39·6″, 49°36′20·4″
28. 119°16′51‴, 5°43′9″
29. A = 79°35′ বা 35°45′, C = 68°5′ বা 111°55′, $a=595·81$ বা 353·95
30. 44°25·6′ বা 135°34·4′

31. $B = 34°27'$ (প্রায়), $C = 100°33'$ (প্রায়)

32. $57°30'11·8''$ বা $122°29'41·2''$, হ্যাঁ

33. 4·56706 মিটার

34. $23°45'35''$

35. দ্ব্যর্থক নয়, দ্ব্যর্থক, দ্ব্যর্থক নয়

39. $1 : \sqrt{3} : 2$

উদাহরণমালা 11

2. 0 এবং 1·17 (প্রায়)

3. 30°

4. 0

5. 0·74 রেডিয়ান (প্রায়)

6. 30°

7. 0°, 60°, 180°, 300°, 360°

8. $\pi/8$, $5\pi/8$

9. $\pi/4$

11. $\pi/4$

12. 0

13. 90° এবং 46°25′ (প্রায়)

14. 22·5° এবং 112·5°

15. 38°10′ (প্রায়)

উদাহরণমালা 12

1. 62·28 ফুট (প্রায়)

2. 86·6 ফুট (প্রায়)

3. 30°

4. 25°95 ফুট (প্রায়)

5. 22 5 ফুট, 39·97 ফুট

6. 51 ফুট, 81 ফুট

7. 283 গজ (প্রায়)

8. $a/\sqrt{2}$

9. 68·3 ফুট (প্রায়)

10. 0·86 মাইল (প্রায়)

11. 236 ফুট, 136 ফুট

12. 519·6 ফুট

13. $130\frac{2}{3}$ ফুট

14. 69·28 ফুট

15. 2·73 মাইল (প্রায়)

19. $9000\sqrt{2}$ ফুট

21. 3606·24 ফুট (প্রায়)

23. 1034 ফুট (প্রায়)

24. $c \sin \alpha \cos(\alpha+\beta)/\cos(2\alpha+\beta)$, $c \sin \beta/\cos(2\alpha+\beta)$

45. 10,000 ফুট।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

Exercise 1

1. (i) 13 (ii) 10 (iii) a (iv) a

2. (i) 10 (ii) 5 (iii) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

(iv) $a(t_1-t_2)\sqrt{(t_1+t_2)^2+4}$ (v) $2a \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

3. (i) $x^2+y^2=2ax$ (ii) $2(x^2+y^2)-ax=a\sqrt{x^2+y^2}$

(iii) $r \cos 2\theta = 2a \sin \theta$ (iv) $r^2=a^2 \cos 2\theta$

4. (i) 1, 1 (ii) 0, 0 (iii) 3/2, 1 (iv) 5/2, 0

4A. (4নং প্রশ্ন পরপর দুবার লিখিত হওয়ায় দ্বিতীয়টিকে 4A বলা হল)

(i) 6, 1 (ii) -31, 4 (iii) 2, 6

5. $(4/3, -1)$; $\{-(a^2-ab+b^2), a+b\}$ 6. $2:1$

7. $(8/3, -1)$ 9. 2 বা -14 24. 3/2, 5

25. $3x+y-12=0$ 26. (i) $7\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{2}a^2$

(iii) $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (iv) 0

31. -1 বা $\frac{1}{2}$ 33. $(10/3, 7/3)$; $2\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$

37. (2, 5) 38. $1\frac{3}{8}$ 41. $4\frac{1}{2}$ 42. 3

44. $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

45. (i) $5x'+2y'+1=0$ (ii) $x'^2+y'^2-14x'+18y'+114=0$

(iii) $x'^2+2y'^2-12x'-16y'+66=0$

46. $x'^2+y'^2-8y'+12=0$ 47. $x'^2+y'^2+2cx'=0$

48. $(a-b)^2(x'^2+y'^2)=a^2b^2$ 50. (1, 1) 51. $(-2, -4)$

Exercise 2

1. (i) সরলরেখা (ii) বৃত্ত (iii) অধিবৃত্ত

2. (i) $x^2+y^2-ax=0$ (ii) $2k^2+4ax=0$

(iii) $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-a^2}=1$ (iv) $2(3a-d)x+d^2-a^2=0$

3. (i) $x=4$ (ii) $x^2+y^2=a^2$ (iii) $2x=y+4$

4. (i) $2y=3x+4$ (ii) $3x^2+4y^2-16x-16y+32=0$

(iii) $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ (iv) $3x^2+4y^2-16x-16y+32=0$

(v) $4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$ 5. $x+y=a$

7. $\frac{a}{2x}+\frac{b}{2y}=1$ 8. $2y-x=15$ 9. $x+y=k$, ধ্রুবক

Exercise 3

1. (i) $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ (ii) $x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}=0$

(iii) $\frac{x}{12}-\frac{y}{5}=1$ 2. (i) 2 (ii) 1/11

(iii) $-2\sqrt{3}$ (iv) $2/(t_1+t_2)$ (v) $-a/b$

3. (i) $-\frac{2}{3}$, (9/2, 0), (0, 3) (ii) 3/2, (1/3, 0), $(0, -\frac{1}{2})$

(iii) $\cot\theta$, $(r\sin\theta, 0)$, $(0, -r\cos\theta)$

4. (i) $\tan^{-1} 2$; (0, 0) (ii) $\tan^{-1} 3$; (0, −16)

(iii) 135° ; (0, −3) 5. (i) $4x-9y+6=0$

(ii) $ax+by=1$ (iii) $x\cos\theta+y\sin\theta=r$

(iv) $a^2x \operatorname{cosec}\alpha+y\sin\alpha=a$ 6. (i) 4 (ii) $1/\sqrt{2}$

(iii) r (iv) 3 (v) $l\sin^2\theta$ (iv) $x+y=3$; $3\sqrt{2}$

7. (i) $x+y=2$ (ii) $y=x+1$ (iii) $x-y+1=0$; (1, 2)

(v) $2x+3y=12$ (vi) $\sqrt{3}x+y-6=0$

(vii) $x+y=15$ অথবা, $8x+7y=112$ 8. $x-y+3=0$

9. $(-c/a, 0)$, $(0, -c/b)$, $\frac{c}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$

10. $\frac{x}{12}+\frac{y}{5}=\pm 1$; $\frac{x}{5}+\frac{y}{12}=\pm 1$ 11. $9x-2y+1=0$

12. $3y=2x$; $3y=8x$ 13. 29/13, −123/13

14. (2, 1) 15. $(1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{5})$ 16. $x=1$

17. $14x+11y+2=0$ 18. $3x-y=7$, $8\frac{1}{6}$

19. $3x+4y-21=0$; 7 : 9 20. $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$

22 (i) $\tan^{-1} 11/13$ (ii) 45° (iii) 90°

23. 3 26. 2 29. 3 30. (i) $2x+3y=1$

(ii) $4x-3y+3=0$ (iii) $y=(x-3)\ tan 5^\circ - 2$ (iv) $3x-y=7$

(v) $y+3x-5=0$ (vi) $3x+7y=0$ (vii) $x+3y-1=0$

(viii) $x+y+2=0$ (ix) $x=y$ (x) $119x+102y-125=0$

31. (i) (15/17, 31/17) (ii) $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$

35. $3y-4x+20=0$; 1 36. $12y+18x+11=0$

37. $2x+3y+4=0$

38. $4x+3y=5$; 13/5 বা $3x+4y=2$; 3

42. (i) $-\frac{1}{10}, \frac{37}{10}$ (ii) 5, 6 43. $-5/4$, $5/24$

44. $y-x\pm1=0$; $y+x\pm1=0$

45. $x=0$; $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$; $\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$

47. $(a-a')x+(b-b')y=0$; $(a+a')x+(b+b')y+c+c'=0$;
$a^2+b^2=a'^2+b'^2$

49. $(1\pm100\sqrt{2}, 7)$; $(1, 7\pm100\sqrt{2})$ (ফুটকে স্থানাঙ্কের একক ধরা হয়েছে)

51. (0, 0) ; $0, \sqrt{3})$; $(7, \sqrt{3})$; (10, 0) ; $17\sqrt{3}/2$

52. $(b-b')x-(a-a')y+(ab'-a'b)(a-a')=0$;
$(b'-b)x-(a-a')y+(ab-a'b')(a-a')=0$

53. বিপরীত দিকে

55. $x(\cos\theta\pm\cos\phi)+y(\sin\theta\pm\sin\phi)=p_1+p_2$

56. $(c_2\sim c_1)/\sqrt{1+m^2}$ 57. $\frac{a}{b}(b\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

58. $16l^2+21m^2-n^2+12ml-6ln+4mn=0$

60. $y=a$, $3y-4x=3a$; $2x+y=5a$

61. $9x-7y=1$; $7x+9y=73$ 62. $(-39/7, -13/7)$

63. $p^2(x^2+y^2)-4x^2y^2=0$ ($-y\sin\alpha$ স্থলে $+y\sin\alpha$ পড়)

Exercise 4

1. (i) $x^2+y^2-6x+8y=0$ (ii) $x^2+y^2-6y-1=0$

(iii) $x^2+y^2-12x-8y-12=0$

(iv) $x^2+y^2-2ax\cos\phi-2ay\sin\phi+b^2=0$

2. (i) $x^2+y^2+2x+4y-24=0$ (ii) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$

(iii) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

3. (i) $(0, 0), 1$ (ii) $(0, 0), \sqrt{5}$ (iii) $(-1, -1), \sqrt{2}$ (iv) $(1, 3), 4$

(v) $(-2, 1), 1$ (vi) $(3/2, 2), 5/2$ (vii) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \sqrt{10}/4$

4. $(a, 0)$; $(0, a)$ [$+2ay$ স্থলে $-2ay$ পড়]

5. $x^2+y^2-cx \pm cy+c^2/4=0$

7. $x^2+y^2-17x+41=0$

8. $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

9. 0 ; কেন্দ্রগুলি একরৈখিক

11. $x+3y=0$

12. $2x+5y-6=0$

13. $x^2+y^2-6x+8y=0$

14. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$

15. (i) $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ (ii) $x^2+y^2-ax-by=0$

(iii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$

16. $x^2+y^2-px-qy=0$

17. $x^2+y^2 \pm 6x-10y+9=0$

18. $x^2+y^2+2x+4y-45=0$

19. $x^2+y^2=36$

20. $(-3, -3)$ বা $(-15, 15)$

21. $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

22. $x^2+y^2-x-y=0$

23. $x^2+y^2+8x-2y-8=0$

24. $x^2+y^2-10x+y+21=0$

26. $x^2+y^2-2x-4y=0$

27. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

28. $x^2+y^2-6x-8y=0$

29. $x^2+y^2-4x-3y=0$

30. $x^2+y^2 \pm 2\sqrt{21}y-4=0$

31. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$

32. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

33. $x^2+y^2-6x+8y=0$ ($+5$ স্থলে $=5$ হবে)

35. $(11, -6)$

Exercise 5

1. (i) $x^2+4y^2+4xy+116x+20y+259=0$

(ii) $16x^2+9y^2+24xy-256x-142y+849=0$

(iii) $(x+2y)^2-42x+26y+56=0$

2. (i) $(\frac{7}{20}, 0)$ (ii) $(2, 0), 8$ (iii) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{4}, 0\right)$; a (iv) $(0, -5/4)$; 5

3. $(\frac{3}{10}, 0)$

4. $(-2, 2)$; $(-2, \frac{3}{2})$; $2y=5$; 2

5. $(-2, -3/2)$; $(-2, -5/6)$; $\frac{8}{3}$; $6y+13=0$

6. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$; $\frac{1}{a}$

7. $(1, 2), (0, 2), 4$ 8. $\frac{7}{4}, (\frac{41}{16}, 1), (3, 1)$ 9. $(3, \pm 2\sqrt{3})$

10. $8a\sqrt{3}$ 11. $x^2=12y$ 12. $\left(\frac{b^2-c}{2a}, -b\right)$

13. (i) $4/5$; $(\pm 4, 0)$; $18/5$; $x=\pm 25/4$
(ii) $1/\sqrt{2}$; $(\pm 1, 0)$; $\sqrt{2}$; $x=\pm 2$
(iii) $1/2$; $(\pm 2, 0)$; 6 ; $x=\pm 8$
(iv) $\sqrt{5}/3$; $(0, \pm\sqrt{5})$; $8/3$; $y=\pm 9\sqrt{5}/5$
($4x^2+9y^2$ স্থলে $9x^2+4y^2$ হবে)
(v) $1/\sqrt{3}$; $(\pm 1/\sqrt{6}, 0)$; $2\sqrt{2}/3$; $x=\pm\sqrt{6}/2$

14. (i) $20x^2+36y^2=405$ (ii) $8x^2+9y^2=1152$
(iii) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (iv) $3x^2+5y^2=32$
(v) $15x^2+16y^2=240$

15. $16x^2+19y^2+4xy-52x+86y+91=0$

16. $17x^2+22y^2+12xy-58x+108y+129=0$

17. $3x^2+2xy+3y^2=8$

18. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; $\frac{2}{7}\sqrt{6}$; $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$

19. $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ 20. $3, \sqrt{6}$; $1/\sqrt{3}$ 21. $1/\sqrt{2}$

22. $3x^2+5y^2=32$; $e=\sqrt{2/5}$ 23. 30 ইঞ্চি, 24 ইঞ্চি

24. $20x^2+4y^2=5$ 25. (i) $16x^2-9y^2=36$
(ii) $9x^2-16y^2=144$ (iii) $65x^2-36y^2=441$
(iv) $x^2-y^2=32$ (v) $2x^2-3y^2=5$

26. $y=0, x=0, (\pm\sqrt{13}, 0), \sqrt{13}/3, 2\frac{2}{3}$ 27. $9/2$; $5/4$; $(\pm 5, 0)$

28. (i) $(4, 0)$; $(4\pm 4, 0)$; $(4\pm 12, 0)$; 3 ; $x=4\pm\frac{4}{3}$; 64
(ii) $(0, -1)$; $(\pm 2\sqrt{2}, -1)$; $(\pm\sqrt{15}, -1)$; $\frac{1}{4}\sqrt{30}$;
$x=\pm\frac{8}{15}\sqrt{5}$; $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

2. (i) $x^2+y^2+2x+4y-24=0$ (ii) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
(iii) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

3. (i) $(0, 0), 1$ (ii) $(0, 0), \sqrt{5}$ (iii) $(-1, -1), \sqrt{2}$ (iv) $(1, 3), 4$
(v) $(-2, 1), 1$ (vi) $(3/2, 2), 5/2$ (vii) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \sqrt{10}/4$

4. $(a, 0)$; $(0, a)$ [$+2ay$ স্থলে $-2ay$ পড়]

5. $x^2+y^2-cx\pm cy+c^2/4=0$

7. $x^2+y^2-17x+41=0$

8. $x^2+y^2-6x+2y-15=0$

9. 0 ; কেন্দ্রগুলি একরৈখিক

11. $x+3y=0$

12. $2x+5y-6=0$

13. $x^2+y^2-6x+8y=0$

14. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$

15. (i) $x^2+y^2-6x-2y+5=0$ (ii) $x^2+y^2-ax-by=0$
(iii) $x^2+y^2-22x-4y+25=0$

16. $x^2+y^2-px-qy=0$

17. $x^2+y^2\pm 6x-10y+9=0$

18. $x^2+y^2+2x+4y-45=0$

19. $x^2+y^2=36$

20. $(-3, -3)$ বা $(-15, 15)$

21. $x^2+y^2+4x-6y-12=0$

22. $x^2+y^2-x-y=0$

23. $x^2+y^2+8x-2y-8=0$

24. $x^2+y^2-10x+y+21=0$

26. $x^2+y^2-2x-4y=0$

27. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

28. $x^2+y^2-6x-8y=0$

29. $x^2+y^2-4x-3y=0$

30. $x^2+y^2\pm 2\sqrt{21}y-4=0$

31. $\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$

32. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$

33. $x^2+y^2-6x+8y=0$ ($+5$ স্থলে $=5$ হবে)

35. $(11, -6)$

Exercise 5

1. (i) $x^2+4y^2+4xy+116x+20y+259=0$
(ii) $16x^2+9y^2+24xy-256x-142y+849=0$
(iii) $(x+2y)^2-42x+26y+56=0$

2. (i) $(\frac{7}{20}, 0)$ (ii) $(2, 0), 8$ (iii) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{4}, 0\right)$; a (iv) $(0, -5/4)$; 5

3. $(\frac{3}{10}, 0)$

4. $(-2, 2)$; $(-2, \frac{3}{2})$; $2y=5$; 2

5. $(-2, -3/2)$; $(-2, -5/6)$; $\frac{8}{3}$; $6y+13=0$

6. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$; $\frac{1}{a}$

7. $(1, 2), (0, 2), 4$ 8. $\frac{7}{4}, (\frac{41}{16}, 1), (3, 1)$ 9. $(3, \pm 2\sqrt{3})$

10. $8a\sqrt{3}$ 11. $x^2=12y$ 12. $\left(\frac{b^2-c}{2a}, -b\right)$

13. (i) $4/5$; $(\pm 4, 0)$; $18/5$; $x=\pm 25/4$

(ii) $1/\sqrt{2}$; $(\pm 1, 0)$; $\sqrt{2}$; $x=\pm 2$

(iii) $1/2$; $(\pm 2, 0)$; 6 ; $x=\pm 8$

(iv) $\sqrt{5}/3$; $(0, \pm\sqrt{5})$; $8/3$; $y=\pm 9\sqrt{5}/5$

($4x^2+9y^2$ স্থলে $9x^2+4y^2$ হবে)

(v) $1/\sqrt{3}$; $(\pm 1/\sqrt{6}, 0)$; $2\sqrt{2}/3$; $x=\pm\sqrt{6}/2$

14. (i) $20x^2+36y^2=405$ (ii) $8x^2+9y^2=1152$

(iii) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (iv) $3x^2+5y^2=32$

(v) $15x^2+16y^2=240$

15. $16x^2+19y^2+4xy-52x+86y+91=0$

16. $17x^2+22y^2+12xy-58x+108y+129=0$

17. $3x^2+2xy+3y^2=8$

18. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$; $\frac{2}{7}\sqrt{6}$; $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$

19. $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$ 20. $3, \sqrt{6}$; $1/\sqrt{3}$ 21. $1/\sqrt{2}$

22. $3x^2+5y^2=32$; $e=\sqrt{2/5}$ 23. 30 ইঞ্চি, 24 ইঞ্চি

24. $20x^2+4y^2=5$ 25. (i) $16x^2-9y^2=36$

(ii) $9x^2-16y^2=144$ (iii) $65x^2-36y^2=441$

(iv) $x^2-y^2=32$ (v) $2x^2-3y^2=5$

26. $y=0, x=0, (+\sqrt{13}, 0), \sqrt{13}/3, 2\frac{2}{3}$ 27. $9/2$; $5/4$; $(+5, 0)$

28. (i) $(4, 0)$; $(4\pm 4, 0)$; $(4\pm 12, 0)$; 3 ; $x=4\pm\frac{4}{3}$; 64

(ii) $(0, -1)$; $(\pm 2\sqrt{2}, -1)$; $(\pm\sqrt{15}, -1)$; $\frac{1}{4}\sqrt{30}$;

$x=\pm\frac{8}{15}\sqrt{5}$; $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

(iii) $(3, -2)$; $(3\pm 4, -2)$; $(3\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$;

$x=3\pm 8/\sqrt{5}$; 2

(iv) $(0, 0)$; $(\pm 3, 0)$; $(\pm\sqrt{13}, 0)$; $\sqrt{13}/3$; $x=\pm 9/\sqrt{13}$; $2\frac{2}{3}$

(v) $(-5, -2)$; $(-5\pm 1, -2)$; $(-5\pm 2, -2)$; 2 ;

$x=-5\pm\frac{1}{2}$; 6

29. (i) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ (ii) $-\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{1}=1$

(iii) $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{384}=1$ (iv) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{12}=1$

(v) $-\frac{(x-10)^2}{7}+\frac{(y+1)^2}{42}=1$ (vi) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y+5)^2}{8}=1$

(vii) $-\frac{(x\ \ h)^2}{6}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$ (viii) $5x^2-24y^2=29$

30. $7y^2+24xy-24ax-6ay+15a^2=0$; $(-a/3, a)$;

$12x-9y+29a=0$

31. $13/12$, $(\pm 13, 0)$ 33. $y^2=4(b-a)(x-a)$

উদাহরণমালা 6

1. (a) $3x-2y+7=0$ (b) $2y=7$

(c) $x+2y-10=0$ (d) $(x-h)\,a\cos\alpha+(y-k)\,a\sin\alpha$

2. (a) স্পর্শক : $y=x+3$, $x+y+3=0$; অভিলম্ব : $x+y=9$, $y=x-9$

(b) স্পর্শক : $2y-3x-6=0$; অভিলম্ব : $3y+2x-16=0$

(c) স্পর্শক : $x-y-1=0$; অভিলম্ব : $x+y-1=0$

(d) স্পর্শক : $8x+9y-1=0$; অভিলম্ব : $9x-8y-26=0$

3. $15\sqrt{2}/2$ 4. $2\sqrt{a^2(1+m^2)-c^2}/\sqrt{1+m^2}$, $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$

5. (i) $-1, -1$($+12$ স্থলে -12 হবে) (ii) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

6. $y=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{3}$ 8. $4x+3y+19=0$; $4x+3y-31=0$

9. (i) $4x+3y+5=0$ বা, $4x+3y-25=0$

(ii) $3x-4y+20=0$ বা, $3x-4y-10=0$

10. $2\pm2\sqrt{1+m^2}$ 14. 8 15. $4y-x=16$

16. (i) $2x-3y+9=0$ (ii) $2x-y+1=0$

17. $2x+y+1=0, (\frac{1}{2}, -2)$ বা, $x-2y+8=0, (8, 8)$

18. 12 20. 3 22. $(am^2, -2am)$ 23. $8\sqrt{2}$

24. $\sqrt{3}x=y-\frac{7}{3}a$ 25. $(50/3, 20/\sqrt{3}), (6, -4\sqrt{3})$

27. $\pm y=x+a$; $x\pm y=3a$ 31. $4y^2=25x$; বা $4y^2+9x=0$

36. $x\pm\sqrt{3}y+3a=0$ 37. $a=5, b=4$

38. $\pm60^\circ$ ($-2y$ স্থলে $-2x$ হবে) 41. $2:\sqrt{5}-1$

43. (i) $4x-3y=17$; $4x-3y+17=0$

(ii) $4x-3y=17$; $4x-3y+17=0$

46. $24y-30x=\pm\sqrt{161}$

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	94	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

	0	1	2	3	4	5	5	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	98686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	45
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	58	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

(Columns 1′–9′: Mean Differences)

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	292	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0.65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·71242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90389	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

NATURAL COSINES

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	·28360	·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	·085912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

									1′	2′	3′	4′	5	6′	7′	8′	9
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	160	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	424	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	9·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·078	10·385	10·712	11·059	11·4301	5°									
85°	11·430	11·826	12·251	12·706	13·197	13·727	14·301	4°									
86°	14·301	14·924	15·605	16·350	17·169	18·075	19·081	3°									
87°	19·081	20·206	21·470	22·904	24·542	26·432	28·636	2°									
88°	28·636	31·242	34·368	38·188	42·964	49·104	57·290	1°									
89°	57·290	68·750	85·940	114·59	171·89	343·77	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5	6′	7′	8′	9

The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.

The cotangent of a small angle of x′ or the tangent of 90°—x′ is very nearly equal to 3437·7 divided by x.

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	1·00000	·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5	6′	7′	8′	9
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	160	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	424	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	9·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·078	10·385	10·712	11·059	11·4301	5°									
85°	11·430	11·826	12·251	12·706	13·197	13·727	14·301	4°									
86°	14·301	14·924	15·605	16·350	17·169	18·075	19·081	3°									
87°	19·081	20·206	21·470	22·904	24·542	26·432	28·636	2°									
88°	28·636	31·242	34·368	38·188	42·964	49·104	57·290	1°									
89°	57·290	68·750	85·940	114·59	171·89	343·77	+ ∞	0°									
90°	+ ∞																

The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.

The cotangent of a small angle of x′ or the tangent of 90°—x′ is very nearly equal to 3437·7 divided by x.

NATURAL COTANGENTS

LOGARITHMIC SINES

	0′	10	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9
0°	— ∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of x minutes log sin x′ or log cos (90°−x′) = log x + 4·46373.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5	6′	7′	8′	9
65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	5	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	4	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	8·7778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	.90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	65	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81245	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	∞	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of x minutes log tan x′ or log cot (90°—x′) $=\log x+\bar{4}\cdot46373$.								
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

(The nine right-hand columns are headed "Mean Differences".)

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9 85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	3·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33793	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35823	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10 57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·92524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+ ∞	0°									
90°	+ ∞																

Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.

LOGARITHMIC COTANGENTS